第 16 卷第 3 期
2005 年 9 月

中 国 计 量 学 院 学 报
Journal of China Jiliang University

Vol. 16 No. 3
Sep. 2005

【文章编号】 1004-1540(2005)03-0222-05

LMI 的广义系统输出反馈 H_2 控制

房庆祥
(中国计量学院 理学院，浙江 杭州 310018)

【摘　要】 利用广义系统正常化方法，在较为一般的条件下，把存在输出反馈控制器使得闭环系统无脉冲模，内稳定且满足 H_2 性能指标的充分条件表示成线性矩阵不等式(LMI)的形式. 给出的控制器含有可调参数，便于工程应用.

【关键词】 广义系统；H_2 控制；输出反馈；线性矩阵不等式
【中图分类号】 O231.1　　【文献标识码】 A

LMI based on the output feedback H_2 control of linear singular systems

FANG Qing-xiang
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The H_2 control problem of linear singular systems was investigated through transforming the systems to standard state-space linear systems. A sufficient condition is formulated for the existence of the output feedback controller in the format of linear matrix inequalities (LMIs). The given controller guarantees that the closed-loop system is impulse-free and stable and satisfies H_2 performance. In addition, the controller contains an adjustable parameter in favour of engineering appliance.

Key words: linear singular system; H_2 control; output feedback; linear matrix inequality

广义系统是客观系统的一种自然表示，是比正常状态空间系统更为一般的系统. 近三十年来，广义系统的控制设计受到众多学者的重视，它的许多性质已得到广泛的研究，广义系统的理论也取得了明显的进展，它的许多结果在经济[1,2]，电力系统[3]，以及机器人[4]控制中都有广泛的应用. 近年来，系统时域分析中的 LMI 方法得到广泛重视，这种方法已被应用于广义系统的 H_∞ 控制等领域[5].

本文主要针对一类广义系统，研究输出反馈 H_2 控制器的设计方法. 首先把广义系统的问题转化为正常状态空间线性系统的问题，然后在正常状态空间系统的框架下，利用线性矩阵不等式方法，给出了广义系统的输出反馈 H_2 控制问题

【收稿日期】 2005-04-19
【基金项目】 浙江省教育厅科研基金资助项目(No. 20040365)
【作者简介】 房庆祥(1974－)，男，山东兖州人，讲师. 主要研究方向为多变量控制系统的理论及应用.

有解的充分条件.在文章最后,给出了一个说明以上方法可行性的算例.

1　问题的描述和转化

考虑广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 E x, \\ y = C_2 x + D_{21} w. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$ 是系统状态,$w \in R^q$ 为干扰输入,$u \in R^p$ 为控制输入,$z \in R^m$ 是可控输出,$y \in R^l$ 是可观测输出,$E, A \in R^{n\times n}$,$\mathrm{rank}E = r < n$,$B_1 \in R^{n\times q}$,$B_2 \in R^{n\times p}$,$C_1 \in R^{m\times n}$,$C_2 \in R^{l\times n}$,$D_{21} \in R^{l\times q}$ 为常数阵.

如文献[6]所述,系统(1)从 w 到 z 的传递函数 $T_{zw}(s)$ 的 H_2 范数为

$$\| T_{zw}(s) \|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Trace}[T_{zw}^T(-j\omega) T_{zw}(j\omega)] \mathrm{d}\omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

本文的目的是设计输出反馈控制器

$$u = K(s) y, \tag{2}$$

使之与系统(1)构成的闭环满足:

(ⅰ)无脉冲模,(ⅱ)内稳定,(ⅲ)$\| T_{zw}(s) \|_2 < \gamma$.

称上述问题为输出反馈 H_2 控制问题.

因 $\mathrm{rank}E = r < n$,故存在非奇异矩阵 $M, N \in R^{n\times n}$,使得 $MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.设

$$MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, MB_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix},$$

$$MB_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, C_1 M^{-1} = [C_{11} \quad C_{12}],$$

$$C_2 N = [C_{21} \quad C_{22}], N^{-1} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$ 其中

$A_{11} \in R^{r\times r}$,$A_{12} \in R^{r\times(n-r)}$,$A_{21} \in R^{(n-r)\times r}$,$A_{22} \in R^{(n-r)\times(n-r)}$,$B_{11} \in R^{r\times q}$,$B_{12} \in R^{(n-r)\times q}$,$B_{21} \in R^{r\times p}$,$B_{22} \in R^{(n-r)\times p}$,$C_{11} \in R^{m\times r}$,$C_{12} \in R^{m\times(n-r)}$,$C_{21} \in R^{l\times r}$,$C_{22} \in R^{l\times(n-r)}$,$x_1 \in R^r$,$x_2 \in R^{n-r}$,于是系统(1)受限系统等价($r.s.e$)[7] 于下述系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_{11} w + B_{21} u, \\ 0 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_{12} w + B_{22} u, \\ z = C_{11} x_1, \\ y = C_{21} x_1 + C_{22} x_2 + D_{21} w. \end{cases} \tag{3}$$

注意到 $r.s.e$ 变换不改变系统的输入输出关系,故考察广义系统(1)在输出反馈(2)下的 H_2 控制问题可以等价地代之以考察广义系统(3)在输出反馈(2)下的 H_2 控制问题.分别记前一问题为 P_1,后一问题为 P_2.显然,解 P_2 即是解 P_1.以下考察 P_2 的解,即考察输出反馈控制器(2)的设计,使之与系统(3)构成的闭环满足(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ).本文对系统作如下假设:

A1)系统(1)脉冲能控且脉冲能观.

由假设 A1),存在矩阵 $K \in R^{p\times l}$,使得

$$A_{22K} = A_{22} + B_{22} K C_{22}. \tag{4}$$

非奇异.对系统(3)作输出反馈

$$u = Ky + v, \tag{5}$$

得系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11K} x_1 + A_{12K} x_2 + B_{11K} w + B_{21} v, & (6.1) \\ 0 = A_{21K} x_1 + A_{22K} x_2 + B_{12K} w + B_{22} v, & (6.2) \\ z = C_{11} x_1, & (6.3) \\ y = C_{21} x_1 + C_{22} x_2 + D_{21} w. & (6.4) \end{cases}$$

其中

$A_{11K} = A_{11} + B_{21} K C_{21}$,$A_{12K} = A_{12} + B_{21} K C_{22}$,
$B_{11K} = B_{11} + B_{21} K D_{21}$,$A_{21K} = A_{21} + B_{22} K C_{21}$,
$B_{12K} = B_{12} + B_{22} K D_{21}$.

注 1　系统(6)可看作是由系统(3)作非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \\ KC_{21} & KC_{22} & I_p & KD_{21} \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{7}$$

得到的.

由(6.2)得

$$x_2 = -A_{22K}^{-1} A_{21K} x_1 - A_{22K}^{-1} B_{12K} w - A_{22K}^{-1} B_{22} v. \tag{8}$$

因而系统(6)可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}_{11} x_1 + \bar{B}_{11} w + \bar{B}_{21} v, \\ z = C_{11} x_1, \\ y = \bar{C}_{21} x_1 + \bar{D}_{21} w - C_{22} A_{22K}^{-1} B_{22} v, \\ x_2 = -A_{22K}^{-1} A_{21K} x_1 - A_{22K}^{-1} B_{12K} w - A_{22K}^{-1} B_{22} v. \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{A}_{11}=A_{11K}-A_{12K}A_{22K}^{-1}A_{21K},\\ \bar{B}_{11}=B_{11K}-A_{12K}A_{22K}^{-1}B_{12K},\\ \bar{B}_{21}=B_{21}-A_{12K}A_{22K}^{-1}B_{22},\\ \bar{C}_{21}=C_{21}-C_{22}A_{22K}^{-1}A_{21K},\\ \bar{D}_{21}=D_{21}-C_{22}A_{22K}^{-1}B_{12K}.\end{cases} \tag{10}$$

易见系统(9)的可控输出z与干扰输入w的输入输出关系同系统(3),因此其从w到z的传递函数同系统(3)的传递函数$T_{zw}(s)$.

注意,系统(9)是正常状态空间系统,其状态为x_1,干扰输入为w,控制输入为v,可控输出为z,可观测输出为y.记系统(9)在动态输出反馈

$$\dot{x}_k=A_kx_k+B_ky,v=C_kx_k \tag{11}$$

下的H_2控制问题为P_3.下面要讨论问题P_3与问题P_2的关系.

定理1 若假设A1)成立,系统(9)与动态输出反馈(11)构成的闭环内稳定且从w到z的传递函数$T_{zw}(s)$的H_2范数为J,则存在输出反馈,使之与系统(3)构成的闭环内稳定且从w到z的传递函数$G_{zw}(s)$的H_2范数也为J.

证明 输出反馈(11)与系统(9)构成的闭环为

$$\begin{cases}\dot{x}_c=\bar{A}x_c+\bar{B}w,\\ z=\bar{C}x_c.\end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{B}_{21}C_k\\ B_kC_{21} & A_k-B_kC_{22}A_{22K}^{-1}B_{22}C_k\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}\bar{B}_{11}\\ B_k\bar{D}_{21}\end{bmatrix},\bar{C}=[C_{11}\quad 0],x_c=\begin{bmatrix}x_1\\ x_k\end{bmatrix}.$$

令$F=A_k,G=C_k,R=K$,则输出反馈

$$\dot{x}_k=Fx_k+Gy,u=Hx_k+Ry, \tag{13}$$

与系统(3)构成的闭环也为(12).因此结论成立.证毕.

注2 定理1说明,在假设A1)成立的条件下,问题P_2有解(2)的充分条件为输出反馈(4)确定的问题P_3有解(11).

2 输出反馈控制器设计

引理1[8] 考虑线性定常系统(A,B,C),其中A为系统矩阵,B为控制矩阵,C为观测矩阵,其传递函数记为$G(s)$,则A渐近稳定,并且$\|G(s)\|_2<\gamma$的充要条件为:存在$Q>0$及$X>0$,使得下述不等式成立:

$$\begin{bmatrix}XA+A^TX & XB\\ B^TX & -I\end{bmatrix}<0. \tag{14.1}$$

$$\begin{bmatrix}X & C^T\\ C & Q\end{bmatrix}>0. \tag{14.2}$$

$$\mathrm{trace}(Q)<\gamma^2 \tag{14.3}$$

定理2 (1)考虑问题P_3,对于给定的$\gamma>0$,存在输出反馈(11),使之与系统(9)构成的闭环满足(ⅱ),(ⅲ)的充要条件为:存在$X>0,Y>0,Q>0,W_B,W_C,L$,满足以下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}R_1 & L & Y\bar{B}_{11}-W_B\bar{D}_{21}\\ L^T & R_2 & \bar{B}_{11}\\ (Y\bar{B}_{11}-W_B\bar{D}_{21})^T & \bar{B}_{11}^T & -I\end{bmatrix}<0, \tag{15.1}$$

$$Q-C_{11}XC_{11}^T>0, \tag{15.2}$$

$$\mathrm{trace}(Q)<\gamma^2. \tag{15.3}$$

其中

$$R_1=Y\bar{A}_{11}+\bar{A}_{11}^TY-W_B\bar{C}_{21}-\bar{C}_{21}^TW_B^T,$$

$$R_2=\bar{A}_{11}X+X\bar{A}_{11}^T+\bar{B}_{21}W_C+W_C^T\bar{B}_{21}^T.$$

(2)若不等式(15)有解$X>0,Y>0,Q>0,W_B,W_C,L$,则问题P_3有输出反馈解(11),其中

$$A_k=\bar{A}_{11}+\bar{B}_{21}C_k-B_k\bar{C}_{21}+S^{-1}X^{-1}(\bar{A}_{11}X+X\bar{A}_{11}^T)X^{-1}+S^{-1}X^{-1}\bar{B}_{21}C_k+B_kC_{22}A_{22K}^{-1}B_{22}C_k-S^{-1}LX^{-1},$$

$$B_k=S^{-1}W_B,C_k=W_CX^{-1},S=Y-X^{-1}.$$

证明 输出反馈(11)与系统(9)构成的闭环为(12).由引理1知,闭环(12)无脉冲模,内稳定,且从w到z的传递函数$T_{zw}(s)$的H_2范数$\|T_{zw}(s)\|_2<\gamma$的充要条件为存在$\bar{X}>0,Q>0,A_k,B_k,C_k$,使得下述线性矩阵不等式成立:

$$\bar{A}\bar{X}+\bar{X}\bar{A}^T+\bar{B}\bar{B}^T<0, \tag{16.1}$$

$$Q-\bar{C}\bar{X}\bar{C}^T>0, \tag{16.2}$$

$$\mathrm{trace}(Q)<\gamma^2. \tag{16.3}$$

下证(15)和(16)等价.

注意到(16.3)与(15.3)相同,故只须证(16.1),(16.2)与(15.1),(15.2)等价.下面证(16.

1),(16.2) 成立可推得(15.1),(15.2) 成立,同理可证明其逆也成立.

设

$$\bar{X}=\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_4 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中 $X,X_2,X_4\in R^{n\times n}$,$X>0$. 显然(15.2) 即为(16.2). 下证(16.1) 成立可推得(15.1) 成立.

不妨设 X_2 可逆,令

$$T_1=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_2^{-1}X \end{bmatrix},\tilde{X}=T_1^T\bar{X}T_1, \tag{18}$$

$$\tilde{A}=T_1^T\bar{A}T_1^{-T},\tilde{B}=T_1^T\bar{B},\tilde{C}=\bar{C}T_1^{-T},$$

$$\bar{A}_k=XX_2^{-T}A_kX_2^TX^{-1}, \tag{19.1}$$

$$\bar{B}_k=XX_2^{-T}B_k, \tag{19.2}$$

$$\bar{C}_k=C_kX_2^TX^{-1}. \tag{19.3}$$

则

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix} X & X \\ X & XX_2^{-T}X_4X_2^{-1}X \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{21}\bar{C}_k \\ \bar{B}_k\bar{C}_{21} & \bar{A}_k-\bar{B}_kC_{22}A_{22K}^{-1}B_{22}\bar{C}_k \end{bmatrix}, \tag{21.1}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_k\bar{D}_{21} \end{bmatrix}, \tag{21.2}$$

$$\tilde{C}=[C_{11}\quad 0]. \tag{21.3}$$

由闭环$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 与$(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 代数等价知两者有相同的传递函数. 结合(16),(20),(21),容易推得

$$\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{X}\tilde{A}^T+\tilde{B}\tilde{B}^T<0, \tag{22.1}$$

$$Q-\tilde{C}\tilde{X}\tilde{C}^T>0. \tag{22.2}$$

故根据引理 1 可知,闭环$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 与$(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 同时满足(ⅱ),(ⅲ).

因 $\bar{X}>0$,故 $X_4-X_2^TX^{-1}X_2>0$. 令

$$S^{-1}=XX_2^{-T}(X_4-X_2^TX^{-1}X_2)X_2^{-1}X>0,$$

则

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix} X & X \\ X & S^{-1}+X \end{bmatrix}. \tag{23}$$

比较闭环$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 与$(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 的参数矩阵,可以看出不同的只是控制器参数 A_k,B_k,C_k 与 $\bar{A}_k,\bar{B}_k,\bar{C}_k$. 因此, 不失一般性, 可以直接将式(12),(11),(17) 中的 $\bar{A},\bar{B},\bar{C},A_k,B_k,C_k$ 及 $\bar{X}$ 看作式(21),(23) 中的 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\bar{A}_k,\bar{B}_k,\bar{C}_k$ 及 $\tilde{X}$.

令

$$Y=S+X^{-1}, \tag{24}$$

$$T_2=\begin{bmatrix} Y & -S \\ I & 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

以 T_2,T_2^T 分别左乘,右乘(16.1),得

$$\begin{bmatrix} R_1 & L \\ L^T & R_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Y\bar{B}_{11}-W_B\bar{D}_{21} \\ \bar{B}_{11} \end{bmatrix}$$
$$[(Y\bar{B}_{11}-W_B\bar{D}_{21})^T\quad \bar{B}_{11}^T]<0, \tag{26}$$

其中

$$R_1=Y\bar{A}_{11}+\bar{A}_{11}^TY-W_B\bar{C}_{21}-\bar{C}_{21}^TW_B^T,$$

$$R_2=\bar{A}_{11}X+X\bar{A}_{11}^T+\bar{B}_{21}W_C+W_C^T\bar{B}_{21}^T,$$

$$W_B=SB_k,W_C=C_kX,$$

$$L=Y\bar{A}_{11}X+Y\bar{B}_{21}W_C-W_B\bar{C}_{21}X-SA_kX+W_BC_{22}A_{22K}^{-1}B_{22}W_C+\bar{A}_{11}^T.$$

易知(26) 式即为(15.1). 证毕.

返回到问题 P_1,综合以上讨论,我们有:

定理 3 　若假设 A1) 成立,则问题 P_1 有解的充要条件为不等式(15) 有解 $X>0,Y>0,Q>0,W_B,W_C,L$. 若该条件被满足,则 P_1 有输出反馈解

$$\dot{x}=A_kx_k+B_ky,u=C_kx_k+Ky. \tag{27}$$

其中

$$A_k=\bar{A}_{11}+\bar{B}_{21}C_k-B_k\bar{C}_{21}+S^{-1}X^{-1}(\bar{A}_{11}X+X\bar{A}_{11}^T)X^{-1}+S^{-1}X^{-1}\bar{B}_{21}C_k+B_kC_{22}A_{22K}^{-1}B_{22}C_k-S^{-1}LX^{-1},$$

$$B_k=S^{-1}W_B,C_k=W_CX^{-1},S=Y-X^{-1},$$

K 为使 $A_{22}+B_{22}KC_{22}$ 非奇异的任一矩阵.

3　数值例子

考虑广义系统(1),其中

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix} -0.195 & -0.68 & -0.92 \\ 1.478 & 0 & 0 \\ -0.052 & 0 & -0.368 \end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix} -0.023 \\ -16.945 \\ 0 \end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix} -0.048 \\ -3.811 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},C_2=[1\quad 0\quad 1],D_{21}=0.3.$$

显然,该系统满足条件 A1).取

$$M=N=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

用 Matlab Toolbox 解由不等式(15.1),(15.2)及

$$J^2=\min[\mathrm{trace}(Q)]$$

组成的凸优化问题,可得

$$X=\begin{bmatrix}65.8043&-29.6138\\-29.6138&13.3398\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}2128.1&0\\0&29.3\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}19.9405&-16.2687\\-16.2687&13.3659\end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix}6.4372&-38.7735\\0&0\end{bmatrix},$$

$$W_B=\begin{bmatrix}-2255.5\\184.7\end{bmatrix},$$

$W_C=[-2614.9\quad -3865.2],J=5.7638.$
取 $K=0.42$,得 $A_{22}+B_{22}KC_{22}=0.052\neq 0$,从而控制器(27)中的参数为

$$A_k=\begin{bmatrix}676000&1502000\\15246000&33871000\end{bmatrix},$$

$$B_k=\begin{bmatrix}-1.1173\\-2.9570\end{bmatrix},$$

$C_k=[-177990\quad -395430],K=0.42.$
此控制器与系统(1)构成的闭环无脉冲模,内稳定,且从 w 到 z 的传递函数满足 $\|T_{zw}(s)\|_2\leqslant 5.7638$.

4 结束语

本文从新的角度讨论了广义系统 H_2 控制问题的输出反馈解,在较为一般的条件下,讨论了它和一个正常状态空间线性系统的输出反馈 H_2 控制问题的关系,利用线性矩阵不等式方法给出了问题有解的充分条件,并获得了控制器的表达式.本文所设计的控制器保证闭环无脉冲模,内稳定且满足指定的 H_2 范数指标.此外,本文所获得的控制器带有可调参数 K,便于工程调整.

【参 考 文 献】

[1] LUENBERGER D G. Singular dynamic Leontief systems[J]. Econometrics,1977, 45(41):991-995.

[2] LUENBERGER D G. Dynamic equations in descriptor systems[J]. IEEE Trans Autom Contr,1977,22:312-321.

[3] HILL D J,MAREELS I M. Stability theory for differential algebraic systems with applications to power systems[J]. IEEE Trans On Circuits and systems,1980,27(11):1416-1423.

[4] MCCLAMROCH N H,WANG D W. Feedback stablization and tracking of contrained robots[J]. IEEE Trans Autom Contr ,1998,33: 419-426.

[5] MA S P,CHENG Z L. H∞ control for singular systems: state feedback case[A]. In Poceedings of the 3rd Asia Control Conference[C]. Shanghai,2000.

[6] 解学书,钟宜生. H 控制理论[M]. 北京:清华大学出版社,1995.

[7] DAI L. Singular Control Systems[M]. New York:Springer-Verlag Press, 1989.

[8] SCHERER C, GAHINET P, CHIALI M. Multiobjective output feedback control via LMI optimization[J]. IEEE Tran Autom Contr ,1997,42(7):896-911.