第51卷第1期 数学学报中文版 Vol.51, No.1
2008年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)01-0191-06 文献标识码: A

有限可补格上的格值逻辑的特征

童 雪

华北电力大学数理系 北京 102206
E-mail: txue@ncepu.edu.cn

别容芳 李永强

北京师范大学信息科学学院 北京 100875
北京师范大学数学科学学院 北京 100875
E-mail: rfbie@bnu.edu.cn; liyq319@126.com

摘 要 本文给出了有限可补格上的格值逻辑的特征, 即如果 $\mathscr{L}$ 是一个强于 $\mathscr{L}_1$ 的正则逻辑系统并且 $\mathscr{L}$ 有紧致性和 LS 性质, 则 $\mathscr{L} \sim \mathscr{L}_1$.

关键词 强特征公式; 正则逻辑系统; 紧致性
MR(2000) **主题分类** 03C86
中图分类 O141.4

A Characterization of First Order Lattice–Valued Logic with the Lattice Being Finite Complemented and Having a Strong Character Formula

Xue TONG

Mathematics & Physics School, North China Electric Power University, Beijing 102206*, P. R. China*
E-mail: txue@ncepu.edu.cn

Rong Fang BIE Yong Qiang LI

College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875*, P. R. China*
School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875*, P. R. China*
*E-mail: rfbie@bnu.edu.cn; liyq*319*@*126*.com*

Abstract This paper gives a characterization of first order lattice–valued logic with the lattice being finite, inverse and having a strong character formula, that is, if $\mathscr{L}$ is a regular logical system stronger than $\mathscr{L}_1$ and $\mathscr{L}$ has compactness property and LS property, then $\mathscr{L} \sim \mathscr{L}_1$.

Keywords strong character formula; regular logical system; compactness property
MR(2000) Subject Classification 03C86
Chinese Library Classification O141.4

作为古典模型论的一个分支, 抽象模型论是随着 (二值) 一阶逻辑日臻完善而表达能力相对不足日益明显的情况下产生的. 当时, 人们企图建立一个既有一阶逻辑所具有的那些优良品质如紧致性特征和 LS 特征等, 又具有较之一阶逻辑更强的表达能力的新的逻辑系统. 在这种背景下, Lindstrom 于六十年代末成功地对一阶逻辑进行了刻画. 从而告诉人们, 在一阶逻辑之外不可能

收稿日期: 2006-12-18; 接受日期: 2007-07-25

有将致性特征和 LS 特征聚于一身的逻辑系统. 从那以后, 人们开始意识到抽象模型论在模型论中的重要位置, 并注重从不同的角度探寻各种新出现的逻辑系统的特征.

格值模型论是王世强先生开拓的一个领域, 沈复兴老师在此基础上考虑了无限长逻辑. 以这两位前辈的工作为基础我们在文 [1] 中讨论了有限可补格上的格值逻辑的正规性, 证明了有限可补格上的格值逻辑的是正规逻辑, 并且 Fraise 定理在其上成立. 本文将在以上工作的基础上对有限可补格上的格值逻辑进行刻画.

在本文中, $LA=\{\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ 为一给定的有限可补格, 所有的讨论均在 LA 上进行, 此外我们经常要用到以下一些符号.

设 $\mathscr{L}$ 是一阶逻辑系统, S 是一符号集, T_1,T_2 是 $\mathscr{L}(S)$ 中的分组理论. 如果 T_1 的任意模型都是 T_2 的模型, 则记之为 $T_1\models_{\mathscr{L}} T_2$. 特别地, 如 $T_2=\{\varphi\}_\lambda$, 则将 $T_1\models_{\mathscr{L}}\{\varphi\}_\lambda$ 简记为 $T_1\models^\lambda_{\mathscr{L}}\varphi$. 如果对任意分组理论 T, 均有 $T\models_{\mathscr{L}} T_2$, 则记之为 $\models_{\mathscr{L}} T_2$.

设 $\mathscr{L}$ 是一阶逻辑系统, S 是一符号集, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 S- 结构, 如 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{L}(S)$ 中相同的分组理论时, 则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 关于 $\mathscr{L}$ 初等等价. 记为 $A\equiv_{\mathscr{L}} B$, 我们以 $\mathrm{Th}^S_{\mathscr{L}}(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{L}(S)$ 中的分组理论. 如果 $\mathrm{Th}^S_{\mathscr{L}}(\mathscr{A})_\lambda=\mathrm{Th}^S_{\mathscr{L}}(\mathscr{B})_\lambda$, 则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 关于 $\mathscr{L}$ λ 初等等价, 记为 $\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}}\mathscr{B}$. 在不致引起混淆的情况下, 常将以上这些记号中的 S 省去, 而当 $\mathscr{L}$ 是一阶逻辑 $\mathscr{L}_1$ 时, 常将 $\mathscr{L}_1$ 省去.

对符号集 S, 我们以 $F^r_n(S)$ 表示 $\mathscr{L}_1(S)$ 中所有以 $x_1,x_2\dots,x_n$ 为自由变元且量词深度 $\le r$ 的公式组成的集合, 并令 $F_n(S)=\bigcup_{r\in\omega}F^r_n(s)$.

设 $\mathscr{L},\mathscr{L}'$ 为两逻辑系统, 称 $\mathscr{L}'$ 不弱于 $\mathscr{L}$ (记之为 $\mathscr{L}\le\mathscr{L}'$) 当且仅当对任意 S 和任意 $\varphi\in\mathscr{L}(S)$, 均存在 $\psi\in\mathscr{L}'(S)$, 使得对任意 $\lambda\in LA$, 有 $\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}}(\varphi)_\lambda=\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}'}(\psi)_\lambda$. 如果 $\mathscr{L}\le\mathscr{L}'$ 且 $\mathscr{L}'\le\mathscr{L}$, 则称 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 等价, 记之为 $\mathscr{L}\sim\mathscr{L}'$.

另外, 我们还要经常同时考虑两个满足 $\mathscr{L}\le\mathscr{L}'$ 的逻辑系统 $\mathscr{L},\mathscr{L}'$, 此时, 如果 $\varphi\in\mathscr{L}(S)$, 则我们以 φ^* 表示 $\mathscr{L}'(S)$ 中满足 $\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}}(\varphi)=\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}'}(\psi)$ 的一个语句 ψ. 如果 T 是 $\mathscr{L}(S)$ 中一个分组理论时, 则以 T^* 表示 $\mathscr{L}'(S)$ 中的分组理论 $\{\{\varphi^*\}_\lambda,\varphi\in T_\lambda,\lambda\in LA\}$.

除以上记号外, 本文所使用的所有其他符号均是标准的, 可参见文 [1–7].

1 基本定义和基本引理

首先, 我们需要将文 [1] 中部分定义和引理进行相对化.

定义 1.1 设 S 是一符号集, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 S- 结构, $\lambda\in LA$, p 是 A 到 B 上的双射, 如果下列条件满足, 则称 p 是从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的 λ- 同构映射.

p 具有 λ- 同态性质. 即

(a) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意 n 元关系符号 R 和任意 $a_1,\dots,a_n\in A$, $\mathscr{A}\models^\lambda_{\mathscr{L}} R[a_1,\dots,a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models^\lambda_{\mathscr{L}} R[p(a_1),\dots,p(a_n)]$.

(b) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意 n 元函数符号 f 和任意 $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\in A$, $f(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}$ 当且仅当 $f(p(a_1),\dots,p(a_n))=p(a_{n+1})$.

(c) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意常量符号 c 和任意 $a\in A$, $c^{\mathscr{A}}=a$ 当且仅当 $c^{\mathscr{B}}=p(a)$.

如果存在一从从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的 λ- 同构映射, 则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ λ- 同构, 记为 $\mathscr{A}\cong^\lambda\mathscr{B}$.

定义 1.2 设 $\mathscr{L}$ 是一阶逻辑系统, S 是一符号集, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 S- 结构, $\lambda\in LA$, p 是 A 到 B 的部分映射, 如果下列条件满足, 则称 p 是从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个 λ- 部分同构.

(1) p 是单射.

(2) p 具有 λ- 同态性质, 即

(a) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意 n 元关系符号 R 和任意 $a_1,\dots,a_n\in\mathrm{dom}(p)$, $\mathscr{A}\models^{\lambda}_{\mathscr{L}} R[a_1,\dots,a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models^{\lambda}_{\mathscr{L}} R[p(a_1),\dots,p(a_n)]$.

(b) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意 n 元函数符号 f 和任意 $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\in\mathrm{dom}(p)$, $f(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}$ 当且仅当 $f(p(a_1),\dots,p(a_n))=p(a_{n+1})$.

(c) 对 $\mathscr{L}(S)$ 中任意常量符号 c 和任意 $a\in\mathrm{dom}(p)$, $c^{\mathscr{A}}=a$ 当且仅当 $c^{\mathscr{B}}=p(a)$.

我们以 $\mathrm{part}(\mathscr{A},\mathscr{B})_\lambda$ 表示所有从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的 λ- 部分同构组成的集合.

定义 1.3 如果存在一个满足下列特征的序列 $(I_n)_{n<\omega}$, 则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ λ- 有限同构, 记为 $\mathscr{A}\cong^{\lambda}_{f}\mathscr{B}$:

(a) $I_n\in\mathrm{part}(\mathscr{A},\mathscr{B})_\lambda$, $n<\omega$.

(b) (λ-forth 特征) 对每一 $p\in I_{n+1}$ 和任一 $a\in A$, 存在 $q\in I_n$, 使得 $p\subseteq q$ 且 $a\in\mathrm{dom}(q)$.

(c) (λ-back 特征) 对每一 $p\in I_{n+1}$ 和任一 $b\in B$, 存在 $q\in I_n$, 使得 $p\subseteq q$ 且 $b\in rg(q)$.

定义 1.4 如果有一满足下列条件的集合 I, 则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ λ- 部分同构.

(a) $I\subseteq\mathrm{part}(\mathscr{A},\mathscr{B})_\lambda$.

(b) I 具有 λ-forth 特征和 λ-back 特征.

定义 1.5 设 $\mathscr{L}$ 是一阶逻辑系统, 如果对任意符号集 S 和任意 $\mathscr{L}(S)$ 中分组理论 T, T 有模型当且仅当 T 的任意有限子集有模型, 则称 $\mathscr{L}$ 具有紧致性特征, 记之为 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$; 如果对任意符号集 S 和任意 $\varphi\in\mathscr{L}(S)$, φ 有模型当且仅当 φ 有可数模型, 则称 $\mathscr{L}$ 具有 LS 特征, 记之为 $LS(\mathscr{L})$.

由文 [2] 我们有:

引理 1.1 一阶格值逻辑 $\mathscr{L}_1$ 具有紧致性特征和 LS 特征, 即有 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L}_1)$ 和 $LS(\mathscr{L}_1)$.

引理 1.2 设 $\lambda\in LA$, S 是符号集, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 S- 结构, 如果 $\mathscr{A}\cong^{\lambda}_{p}\mathscr{B}$, 且 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 均可数, 则 $\mathscr{A}\cong^{\lambda}\mathscr{B}$.

引理 1.3 设 S 是有限符号集, $\lambda\in LA$, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 S- 结构, 如果 $\mathscr{A}\equiv^{\lambda}\mathscr{B}$, 则 $\mathscr{A}\cong^{\lambda}_{f}\mathscr{B}$.

引理 1.2, 引理 1.3 的证明可参考文 [1] 中相应结果的证明.

引理 1.4 设 $\mathscr{L}$ 是强于 $\mathscr{L}_1$ 的正规逻辑系统, 且 $\mathscr{L}$ 满足 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$, $\Psi\in\mathscr{L}(S)$, 则存在 S 的有限子集 S_0, 使得对任意 S- 结构 $\mathscr{A},\mathscr{B}$, 如 $\mathscr{A}\upharpoonright S_0\cong\mathscr{B}\upharpoonright S_0$, 则对任意 $\lambda\in LA$, $\mathscr{A}\models^{\lambda}_{\mathscr{L}}\Psi$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models^{\lambda}_{\mathscr{L}}\Psi$.

证明 在 S 上添加两个新的一元关系符号 U,V 和一个新的一元函数符号 f, 并令 $S'=S\cup\{U,V,f\}$. 以 Σ 表示由下列一阶 S- 语句组成的 λ_1- 语句集:

(a) $\exists x(\Delta(U(x),c_{\lambda_1}))$, $\exists y(\Delta(V(y),c_{\lambda_1}))$.

(b) $\forall x(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\vee\Delta(U(x),c_{\lambda_0}))$, $\forall x(\Delta(V(x),c_{\lambda_1})\vee\Delta(V(x),c_{\lambda_0}))$.

(c) $\forall x(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\to\Delta(V(f(x)),c_{\lambda_1}))$, $\forall x(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\to\exists y(\Delta(V(y),c_{\lambda_1})\wedge f(x)\equiv y))$.

(d) $\forall xy(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\wedge\Delta(V(y),c_{\lambda_1})\to(f(x)\equiv f(y)\to x\equiv y))$.

(e) 对任一 $\lambda\in LA$ 和任一 S 中的 n 元关系符号 R, 有 $\forall x_1\cdots x_n(\bigwedge_{i\le n}\Delta(U(x_i),c_{\lambda_1})\to(\Delta(R(x_1,\dots,x_n),c_\lambda)\leftrightarrow\Delta(R(f(x_1),\dots,f(x_n)),c_\lambda)))$.

(f) 对任一 S 中的 n 元函数符号 g, 有 $\forall x_1\cdots x_nx_{n+1}(\bigwedge_{i\le n+1}\Delta(U(x_i),c_{\lambda_1})\to(g(x_1,\dots,x_n)\equiv x_{n+1}\leftrightarrow g(f(x_1),\dots,f(x_n))\equiv f(x_{n+1})))$.

$$\forall x_1\cdots x_n\left(\bigwedge_{i\le n}\Delta(U(x_i),c_{\lambda_1}\right)\to(U(g(x_1,\dots,x_n)),c_{\lambda_1})).$$

$$\forall x_1\cdots x_n\left(\bigwedge_{i\le n}\Delta(V(x_i),c_{\lambda_1}\right)\to(V(g(x_1,\dots,x_n)),c_{\lambda_1})).$$

下面证明对任一 $\lambda \in LA$,

$$\Sigma^* \models_{\mathscr{L}}^{\lambda_1} \Delta(\Psi^U, \lambda) \leftrightarrow \Delta(\Psi^V, \lambda). \tag{1}$$

任取 Σ^* 的一个模型 $(\mathscr{A}, U^A, V^A, f^A)$, 则 $(\mathscr{A}, U^A, V^A, f^A) \models_{\mathscr{L}_1}^{\lambda_1} \Sigma$, 由 Σ 的构成易知, U^A, V^A 非空, 且 $f \upharpoonright U_A$ 是从 U^A 到 V^A 的一个同构映射, 从而由同构特征有对任意 $\lambda \in LA$, $[U^A]^{\mathscr{A}} \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi$ 当且仅当 $[V^A]^{\mathscr{A}} \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi$, 于是由 $\mathrm{Rel}(\mathscr{L})$ 有: 对任意 $\lambda \in \mathscr{L}A$, $(\mathscr{A}, U^A) \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi^U$ 当且仅当 $(\mathscr{A}, V^A) \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi^V$, 从而由 $\mathscr{L}$ 的归约特征和布尔特征有

$$(\mathscr{A}, U^A, V^A, f^A) \models_{\mathscr{L}_1}^{\lambda_1} \Delta(\Psi^U, \lambda) \leftrightarrow \Delta(\Psi^V, \lambda).$$

至此, 我们证明了 (1).

由 $\mathscr{L}$ 的紧致性特征, 存在 Σ 的有限子集 Σ_0, 使得对任意 $\lambda \in LA$,

$$\Sigma_0^* \models_{\mathscr{L}}^{\lambda_1} \Delta(\Psi^U, \lambda) \leftrightarrow \Delta(\Psi^V, \lambda). \tag{2}$$

由于 Σ_0 是一阶语句集, 从而存在 S 的有限子集 S_0, 使得 $\Sigma_0 \subseteq \mathscr{L}_1(S_0)$.

下面证明 S_0 满足引理的要求. 任取两个 S- 结构 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, 使之满足 $\pi : \mathscr{A} \upharpoonright S_0 \cong \mathscr{B} \upharpoonright S_0$ 且 $A \cup B = \emptyset$, 则我们可以相应地定义一个 S^1- 结构 $(\mathscr{C}, U^C, V^C, f^C)$ 如下:

(i) $\mathscr{C}$ 的论域为 $C = A \cup B$.

(ii) 对每一 $\lambda \in \mathscr{L}A$ 和每一关系符号 $R \in S$, 有 $R_\lambda^C = R_\lambda^A \cup R_\lambda^B$.

(iii) $U_{\lambda_1}^C = A$, $V_{\lambda_1}^C = B$, f^C 满足 $f^C \upharpoonright U^C = \pi$.

(iv) 对 S 中任一 n 元函数符号 g 和任意 $c_1, \ldots, c_n \in C$, 定义 $g^{\mathscr{A}}(c_1 \cdots c_n)$ 为:

$$g^{\mathscr{A}}(c_1 \cdots c_n) = \begin{cases} g^{\mathscr{A}}(c_1 \cdots c_n), & \text{如 } c_1, \ldots, c_n \in A, \\ g^{\mathscr{B}}(c_1 \cdots c_n), & \text{如 } c_1, \ldots, c_n \in B, \\ C \text{ 中任一元素}, & \text{其他情况}, \end{cases}$$

则易见 $(\mathscr{C}, U^C, V^C, f^C)$ 是 Σ_0 的一个模型, 从而 $(\mathscr{C}, U^C, V^C, f^C) \models_{\mathscr{L}}^{\lambda_1} \Sigma_0^*$, 于是由 (2), 有

$$(\mathscr{C}, U^C, V^C, f^C) \models_{\mathscr{L}}^{\lambda_1} \Delta(\Psi^U, \lambda) \leftrightarrow \Delta(\Psi^V, \lambda).$$

注意到 $[U^C]^{\mathscr{C}} = \mathscr{A}$, $[V^C]^{\mathscr{C}} = \mathscr{B}$, 由 $\mathrm{Rel}(\mathscr{L})$ 知, 对任意 $\lambda \in LA$, $\mathscr{A} \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi$ 当且仅当 $\mathscr{B} \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \Psi$.

引理 1.5 设 $\mathscr{L}$ 是强于 $\mathscr{L}_1$ 的正规逻辑系统, 且 $\mathscr{L}$ 满足 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$, 如果对任意 $\lambda \in LA$ 任意 S 和任意 S- 结构 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, 有 $\mathscr{A} \equiv_{\mathscr{L}_1}^{\lambda} \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \equiv_{\mathscr{L}}^{\lambda} \mathscr{B}$, 则 $\mathscr{L} \sim \mathscr{L}_1$.

证明 任取 $\varphi \in \mathscr{L}(S)$, $\lambda \in LA$, $\mathscr{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda$, 下面证明, 存在 $\varphi_{\mathscr{A}} \in \mathscr{L}_1(S)$, 使得

$$\mathscr{A} \models_{\mathscr{L}_1}^{\lambda} \varphi_{\mathscr{A}} \text{且} \varphi_{\mathscr{A}}^* \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \varphi. \tag{3}$$

为此, 首先证明, $\mathrm{Th}(\mathscr{A})_\lambda^* \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \varphi$. 任取 $\mathrm{Th}(\mathscr{A})_\lambda^*$ 的一个模型 $\mathscr{B}$, 则 $\mathscr{B} \models_{\mathscr{L}_1} \mathrm{Th}(\mathscr{A})_\lambda$, 从而 $\mathscr{A} \equiv_{\mathscr{L}_1}^{\lambda} \mathscr{B}$, 于是由引理的条件知, $\mathscr{A} \equiv_{\mathscr{L}}^{\lambda} \mathscr{B}$, 因而 $\mathscr{B} \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \varphi$. 由 $\mathscr{B}$ 的任意性即知 $\mathrm{Th}(\mathscr{A})_\lambda^* \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \varphi$.

由 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$ 知, 存在 $\mathrm{Th}(\mathscr{A})_\lambda$ 的有限子集 Σ_λ, 使得 $\Sigma_\lambda \models_{\mathscr{L}}^{\lambda} \varphi$. 令 $\varphi_{\mathscr{A}} = \wedge \Sigma$, 则易见 $\varphi_{\mathscr{A}}$ 满足 (3) 的要求.

由 (3) 有

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda = \bigcup_{\mathscr{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda} \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi_{\mathscr{A}}^*)_\lambda. \tag{4}$$

可以证明, 存在 $\mathrm{Mod}\ {}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda$ 的有限子集 M, 使得

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda = \bigcup_{\mathscr{A} \in M} \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi_{\mathscr{A}}^*)_\lambda. \tag{5}$$

如若不然, 则对任意 $\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda$ 的有限子集 N, 均有

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi)_\lambda \neq \bigcup_{\mathscr{A} \in N} \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}^S(\varphi_{\mathscr{A}}^*)_\lambda,$$

即 $\Sigma_1=\{\varphi\}_\lambda\cup\{\neg\varphi^*_{\mathscr{A}},\mathscr{A}\in\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}}(\varphi)_\lambda\}$ 的任意有限子集可满足, 从而由 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$, Σ_1 自身亦可满足, 这与 (4) 矛盾.

由 (5) 可令 $\Psi=\bigvee_{\mathscr{A}\in M}\varphi_{\mathscr{A}}$, 则易见 $\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}}(\varphi)_\lambda=\mathrm{Mod}^S_{\mathscr{L}_1}(\psi)_\lambda$.

2 主要定理及其证明

定理 2.1 设 $\mathscr{L}$ 是强于 $\mathscr{L}_1$ 的正规逻辑系统, 且 $\mathscr{L}$ 满足 $LS(\mathscr{L})$ 和 $\mathrm{Comp}(\mathscr{L})$, 则 $\mathscr{L}\sim\mathscr{L}_1$.

证明 由引理 1.5, 我们只需证, 对任意 $\lambda\in LA$ 对任意 S 和任意 S- 结构 $\mathscr{A},\mathscr{B}$, 有

$$\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}_1}\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}}\mathscr{B}. \tag{6}$$

另一方面, 如果对任意关系符号集 S, (6) 成立, 则对任意 S 我们亦可以证明 (6) 成立. 这是因为, 对任意 S 和任意 S- 结构 $\mathscr{A},\mathscr{B}$, 如果在 S^r 上, 有 $\mathscr{A}^r\equiv^\lambda_{\mathscr{L}_1}\mathscr{B}^r$, 则 (由文 [1] 推论 2.2) 有

$$\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}_1}\mathscr{B}\Leftrightarrow\mathscr{A}^r\equiv^\lambda_{\mathscr{L}_1}\mathscr{B}^r\Rightarrow\mathscr{A}^r\equiv^\lambda_{\mathscr{L}}\mathscr{B}^r\Leftrightarrow\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}}\mathscr{B}.$$

故我们只需对关系符号集来证明 (6).

假设存在关系符号集 S, 使得在 S 上 (6) 不成立, 即存在 $\lambda\in LA$, S- 结构 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 和 $\Psi\in\mathscr{L}(S)$, 使得

$$\mathscr{A}\equiv^\lambda_{\mathscr{L}_1}\mathscr{B},\ \ \mathscr{A}\models^\lambda_{\mathscr{L}}\Psi \text{ 且 } \mathscr{B}\not\models^\lambda_{\mathscr{L}}\Psi. \tag{7}$$

由定理的条件, 存在有限的 $S_0\subseteq S$, 使得对任意 S- 结构 $\mathscr{M},\mathscr{N}$, 有

$$\mathscr{M}\upharpoonright S_0\cong\mathscr{N}\upharpoonright S_0\Rightarrow\mathscr{M}\models^\lambda_{\mathscr{L}}\Psi \text{ 当且仅当 } \mathscr{N}\models^\lambda_{\mathscr{L}}\Psi. \tag{8}$$

由引理 1.3, 有

$$(I_n)_{n\in N}:\mathscr{A}\cong^\lambda_f\mathscr{B}. \tag{9}$$

现在 S 上添加一些新符号: f (一元函数符号), P,U,V (一元关系符号), $<,I$ (二元关系符号), G (三元关系符号), 这样得到一新符号集 S', 然后在必要的情况下改变 B 中元素的记号, 使得 $A\cap B=\emptyset$.

下面我们定义一 S'- 结构 $\mathscr{C}$ 如下:

(a) $\mathscr{C}$ 的论域 $C=A\cup B\cup N\cup(\bigcup_{n\in N}I_n)$ (N 是自然数集).

(b) $U^C_{\lambda_1}=A,\ U^C_{\lambda_0}=C-A$, 且 $[U^C]^{\mathscr{C}}=\mathscr{A}$.

(c) $V^C_{\lambda_1}=B,\ V^C_{\lambda_0}=C-B$, 且 $[V^C]^{\mathscr{C}}=\mathscr{B}$.

(d) $<^C_{\lambda_1}$ 是 C 上的良序, $<^C_{\lambda_0}=C\times C-<^C_{\lambda_1}$, 且 $(n,n+1)\in<^C_{\lambda_1}$ $(n\in N)$.

(e) f^C 满足: 对任意 $n\in N,\ f^C(n+1)=n$ 且 $f^C(0)=0$.

(f) $P^C_{\lambda_1}=\bigcup_{n\in N}I_n,\ P^C_{\lambda_0}=C-P^C_{\lambda_1}$.

(g) $[I(np)]_{\mathscr{C}}=\lambda_1$ 当且仅当 $n\in N$ 且 $p\in I_n$. $I^C_{\lambda_0}=C\times C-I^C_{\lambda_1}$.

(h) $[G(pab)]_{\mathscr{C}}=\lambda_1$ 当且仅当 $P^C(p),\ a\in\mathrm{dom}(p)$, 且 $p(a)=b,\ G^C_{\lambda_0}=C\times C\times C-G^C_{\lambda_1}$,
则当我们以 r 表示下列有限 λ_1- 语句的合取式时, 容易验证 $\mathscr{C}$ 是 r 的模型.

(i) $\forall x(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\vee\Delta(U(x),c_{\lambda_0})),\ \forall x(\Delta(V(x),c_{\lambda_1})\vee\Delta(V(x),c_{\lambda_0}))$.

(ii) $\forall x(\Delta(P(x),c_{\lambda_1})\vee\Delta(P(x),c_{\lambda_0})),\ \forall xy(\Delta(<(xy),c_{\lambda_1})\vee\Delta(<(xy),c_{\lambda_0}))$

(iii) $\forall xy(\Delta(I(xy),c_{\lambda_1})\vee\Delta(I(xy),c_{\lambda_0})),\ \forall xyz(\Delta(G(xyz),c_{\lambda_1})\vee\Delta(G(xyz),c_{\lambda_0}))$

(iv) $\forall p(\Delta(P(p),c_{\lambda_1})\rightarrow\ \forall xy(\Delta(G(pxy),c_{\lambda_1})\rightarrow(\Delta(U(x),c_{\lambda_1})\wedge\Delta(V(y),c_{\lambda_1}))))$.

(v) $\forall p(\Delta(P(p),c_{\lambda_1})\rightarrow\forall xx'\,\forall yy'(\Delta(G(pxx'),c_{\lambda_1})\wedge\Delta(G_0(pyy'),c_{\lambda_1}))\rightarrow(\Delta(x\equiv x',c_{\lambda_1})\leftrightarrow\Delta(y\equiv y',c_{\lambda_1})))$.

(vi) 对每一 S_0 中 n 元关系符号 R:

$\forall p(\Delta(P(p), c_{\lambda_1}) \to \forall x_1 \cdots x_n \ \forall y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{i\leq n} \Delta(G(px_iy_i), c_{\lambda_1}) \to (\Delta(R(x_1, \ldots, x_n), \lambda) \leftrightarrow \Delta(R(y_1, \ldots, y_n), \lambda)))).$

(vii) $\forall xy(\Delta(<(yx), c_{\lambda_1}) \to (\Delta(<(f(x)x), c_{\lambda_1}) \wedge \neg\exists z(\Delta(<(f(x)z), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(<(zx), c_{\lambda_1})))).$

(viii) $\forall x(\exists y(\Delta(<(xy), c_{\lambda_1}) \vee \Delta(<(yx), c_{\lambda_1})) \to \exists p(\Delta(P(p), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(I(xp), c_{\lambda_1}))).$

(ix) $\forall x \forall p \forall u(\Delta(<(f(x)x), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(I(xp), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(U(u), c_{\lambda_1}) \to \exists q \exists v(\Delta(I(f(x)q), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(G(quv), c_{\lambda_1}) \wedge \forall x'y'(\Delta(G(px'y'), c_{\lambda_1}) \to \Delta(G(qx'y'), c_{\lambda_1})))).$

(x) $\forall x \ \forall p \forall v(\Delta(<(f(x)x), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(I(xp), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(U(u), c_{\lambda_1}) \to \exists q \exists u(\Delta(I(f(x)q), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(G(quv), c_{\lambda_1}) \wedge \ \forall x'y'(\Delta(G(px'y'), c_{\lambda_1}) \to \Delta(G(qx'y'), c_{\lambda_1})))).$

(xi) $\exists u\Delta(U(u), c_{\lambda_1}) \wedge \exists v\Delta(V(v), c_{\lambda_1}) \wedge \Delta(\Psi^U, c_{\lambda_1}) \wedge \Delta((\neg\Psi)^V, c_{\lambda_1}).$

由此, 对 $\mathscr{L}(S_0)$ 中的语句 r^*, $\mathscr{C}$ 是 r^* 的模型.

现在 S' 上加一新常量 c 构成 S'', 然后考虑 $\mathscr{L}(S'')$ 中的语句集

$\Sigma = r^* \cup \{\Delta(<(f^n(c)f^{n-1}(c)), c_{\lambda_1})^*, n \in N\}$ (其中 f^n 是 $\underbrace{f \cdots f(c)}_{n}$ 的简写).

可以证明 Σ 可满足, 这只要注意到对 Σ 的任意有限子集 Σ_0, 均可相应地取充分大的 $n \in N$ 作为 c 的解释而使 $(\mathscr{C}, c^C)$ 成为 Σ_0 的模型.

由于 $\mathscr{L}$ 满足 $LS(\mathscr{L})$, 从而易见存在 Σ 的可数模型 $(\mathscr{E}, C^E)$. 由于 (vi) 在 $(\mathscr{E}, C^E)$ 中成立, 且 S 是关系符号集, 从而 $U^E \neq \emptyset$, $V^E \neq \emptyset$, 且 U^E, V^E 分别构成 $\mathscr{E}$ 的子模型的论域. 因此, $\mathscr{A} \models [U^E]^{\mathscr{E}\restriction S}$, $\mathscr{B} \models [V^E]^{\mathscr{E}\restriction S}$ 均是 S- 结构, 且显然是可数的.

又由 (xi) 有 $\mathscr{E} \models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi^U$, $\mathscr{E} \not\models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi^V$, 从而由 $\mathrm{Rel}(\mathscr{L})$, 有

$$\mathscr{A}' \models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi \ \text{ 且 } \ \mathscr{B}' \not\models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi. \tag{10}$$

由 (vi)–(vi) 知, 对任一 $p \in P^E$, 都相应地存在从 $\mathscr{A} \restriction S_0$ 到 $\mathscr{B} \restriction S_0$ 的一个部分同构, 不妨记之为 P.

又由 $(\mathscr{E}, C^E) \models_{\mathscr{L}} \Sigma$ 可知, $\langle f^n(c)\rangle_{n\in N}$ 构成一无穷递降序列, 即有 $\cdots <^E_{\lambda_1} f^2(c) <^E_{\lambda_1} f(c) <^E_{\lambda_1} c$.

令 $I = \{P^E : \text{存在 } n \in N, \text{ 使得 } I^E(f^n(c)p)\}$, 则由 (ii) 和 (viii) 知 I 非空, 且由 (vi)–(vi) 知道 I 有 λ-Forth 特征和 λ-Back, 从而有 $I : \mathscr{A}' \restriction S_0 \cong^{\lambda}_{p} \mathscr{B} \restriction S_0$. 于是由 $\mathscr{A}', \mathscr{B}'$ 可数, 引理 1.2 以及 (9) 式可知, $\mathscr{A}' \models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi$当且仅当 $\mathscr{B}' \models^{\lambda}_{\mathscr{L}} \Psi$, 这与 (10) 式矛盾.

矛盾表明, (6) 式成立.

参 考 文 献

[1] Tong X., Bie R. F., Some properties of first order lattice logic with the lattice being finite, complemented and having strong character formula, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2007, **50**(6): 1243–1248.

[2] Wang S. Q., A proof of compactness theorem in lattice-valued model theory, *Journal of Beijing Normal University* (*Natural Science*), 1980, 25–30 (in Chinese).

[3] Wang S. Q., The atomic models and countably saturated models of lattice-valued, *Advances in Mathematics*, 1981, **10**: 144–146 (in Chinese).

[4] Wang S. Q., Lu J. B., The Ultraproduct elementary theorem of lattice-valued models, *Chines Science Bulletin*, 1981, 71–74 (in Chinese).

[5] Wang S. Q., A proof of an omitting types theorem in lattice-valued model theory, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1982, **125**: 202–207.

[6] Shen F. X., The elementary extension and elementary chain of lattice-valued models, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1982, **21**: 264–266.

[7] Barwise J., Feferman S., Model-theoretic logics, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1985.