

# 一种独立分量分析的迭代算法和实验结果

周卫东<sup>1</sup>, 贾 磊<sup>2</sup>, 李英远<sup>1</sup>

(山东大学 1. 信息科学与工程学院; 2. 控制科学与工程学院, 山东 济南 250100)

**摘要:** 介绍盲信源分离中一种独立分量分析方法, 基于信息论原理, 给出了一个衡量输出分量统计独立的目标函数。最优化该目标函数, 得出一种用于独立分量分析的迭代算法。相对于其他大多数独立分量分析方法来说, 该算法的优点在于迭代过程中不需要计算信号的高阶统计量, 收敛速度快。通过脑电信号和其他信号的计算机仿真和实验结果表明了算法的有效性。

**关键词:** 盲信源分离; 独立分量分析; 人工神经网络; 负熵

中图分类号: Q811.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-6737(2002)01-0057-04

独立分量分析是在盲信号处理, 特别是盲信源分离发展起来的, 其研究热潮正方兴未艾<sup>[1-10]</sup>, 引起了生物医学工程界的关注。盲信源分离 (blind source separation, BSS) 是指在信号的理论模型和源信号无法精确获知的情况下, 如何从混迭信号 (观测信号) 中分离出各源信号的过程。独立分量分析 (independent component analysis, ICA) 和无关分量分析 (uncorrelated component analysis, UCA) 是近年来由盲信源分离技术发展来的多道信号盲信源分离方法。独立分量分析的基本含义是将多道观测信号按照统计独立的原则通过优化算法分解为若干独立成分, 其前提条件是各源信号为彼此统计独立的非高斯信号。由于测量到的生理信号往往是若干独立成分的加权迭加, 因此 ICA 是值得研究的信号分解方法。

实际上, 独立分量分析是一种优化问题, 即如何使得分离出的各独立分量逼近各源信号。因此 ICA 包括两个主要方面: 优化判据 (目标或代价函数) 和寻优算法。Comon 于 1994 年比较系统地阐述了 ICA 的概念并基于累积量 (高阶统计量) 直接构造了代价函数<sup>[1]</sup>。Bell 和 Sejnowski 于 1995 年从信息论的角度阐述了盲信源分离问题, 提出了随机梯度下降的学习算法, 即最大熵 ICA 算法 (Infomax - ICA)<sup>[2]</sup>。此后, T.W.Lee 等<sup>[3,4]</sup>于 1997 年扩展了 Bell 和 Sejnowski 的工作, 发展成为扩展 ICA 算法, 该算法同时适用于超高斯和亚高斯信号的情况。其次还有 Hyvarinen<sup>[5,6]</sup>提出的定点 ICA 算法。目前应用比较多的主要是这一类基于神经网络自适应学习的 ICA 算法。

## 1 ICA 模型

ICA 要解决的问题可以用图 1 来表示。信号的混合模型为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad (1)$$

其含义为一组独立的源信号  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_m(t)]^T$  经过线性系统  $\mathbf{A}$  混合在一起, 得到观测信号  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ 。其中源信号  $\mathbf{s}(t)$  和混合系统  $\mathbf{A}$  都是未知的, 只有混合后的  $\mathbf{x}(t)$  可以观测到。信号分离的目的就是在  $\mathbf{s}(t)$  和  $\mathbf{A}$  均未知的情况下, 通过一个线性神经网络, 利用一定的学习算法自适应地调整网络的权  $\mathbf{W}$  (解混矩阵), 使网络输出  $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$  再现  $\mathbf{s}$ , 并要求  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$  的各分量彼此统计独立。

可以证明在  $n \geq m$  的条件下, 如果  $\mathbf{s}$  不含有一个以上的高斯过程, 就有可能通过解混矩阵  $\mathbf{W}$  取得  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$ , 使向量  $\mathbf{y}$  逼近于  $\mathbf{s}$ , 只是  $\mathbf{y}$  中各分量的排列次序及比例尺度与  $\mathbf{s}$  可能不同。因此, 如果找到解混矩阵  $\mathbf{W}$  使得  $\mathbf{y}$  的分量尽可能独立, 那么  $\mathbf{y}$  就是对  $\mathbf{s}$  的最佳估计。在许多生理信号的测量中, 观测

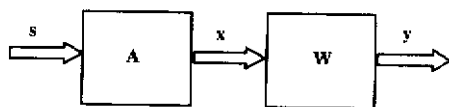


Fig.1 ICA independent component analysis model

收稿日期: 2001-07-06

基金项目: 山东省自然科学基金资助 (Y2000C25)

作者简介: 周卫东, 1964年生, 副教授, 博士,

电话: (0531)8568805, E-mail: wdzhou@sdu.edu.cn.

到的信号实际上是若干相对独立的源信号叠加而成的。因此,采用 ICA 方法从观测信号的分离出各独立成分将有助于提取具有真正意义的生理信息<sup>[7]</sup>。

和主分量分析 (Principal Component Analysis, PCA) 相比,ICA 不仅实现了信号的去相关(二阶统计独立),而且要求各高阶统计量独立,换句话说,独立分量分析的目的是寻找一个线性但不一定正交的坐标系来表示多维数据,而 PCA 构造的是正交坐标系。在很多应用中,非正交的坐标系更符合实际。

希望通过直接方法判别信号是否相互独立往往比较困难,因为多变量随机过程的相互独立涉及到各分量之间所有阶次的统计量如高阶累积量,而要估计 3 阶以上的统计量计算量较大。近几年来,有关 ICA 的研究大多采用神经网络自适应学习处理方法,并在每个输出分量之后逐分量地加上一个非线性环节来取代高阶累积量的计算<sup>[3,5,6]</sup>。

## 2 ICA 迭代算法的实现

利用源信号统计独立的条件,可以从混合后的观测信号中分离出源信号。当输入的源信号统计独立时,分离得到的  $y(t)$  的各分量之间也应相互独立。下面利用信息论中的互信息和负熵的概念,建立判断  $y_i$  互相独立的判据。

设随机向量  $y(t)$  的概率密度为  $p(y)$ , 其各分量  $y_i(t)$  的概率密度为  $p(y_i)$ , 信号  $y(t)$  的熵 (entropy) 为:

$$H(y) = - \int p(y) \log p(y) dy \tag{2}$$

$y(t)$  和各分量之间的互信息为:

$$I(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m H(y_i) - H(y) = \int p(y) \log \frac{p(y)}{\prod_{i=1}^m p(y_i)} dy \tag{3}$$

如果  $y(t)$  的各分量之间互相独立,即

$$p(y) = \prod_{i=1}^m p(y_i) \tag{4}$$

则  $y(t)$  和各分量之间的互信息为零,即  $I(y_1, \dots, y_m) = 0$ 。

定义  $y_i$  的负熵:

$$J(y_i) = H(y_{gauss}) - H(y_i) \tag{5}$$

由负熵的定义显然  $J(y_i) \geq 0$ , 当  $y_i$  具有高斯分布时,  $y_i$  的负熵为零。当  $y(t)$  的各分量  $y_i$  互不相关时,互信息可表示为<sup>[5]</sup>:

$$I(y_1, \dots, y_m) = J(y) - \sum_{i=1}^m J(y_i) \tag{6}$$

如果  $y(t)$  的各分量  $y_i$  互相独立,则它们的互信息为零,  $y_i$  的负熵取得极大值,计算负熵涉及到各分量的高阶统计量,而要估计 3 阶以上统计量的计算量较大,为此对负熵进行近似计算<sup>[5]</sup>:

$$J(y_i) = k [E\{G(y_i)\} - E\{G(y_{gauss})\}]^2 \tag{7}$$

其中  $y_{gauss}$  是与  $y_i$  具有相同方差的高斯随机变量。近似负熵的特点是在每个输出分量之后逐分量地加上一个非线性环节  $G(y_i)$  来取代高阶累积量的计算。可以证明<sup>[5]</sup>,当  $G(y_i)$  取为非二次型函数时,通过自适应学习可使  $y(t)$  逼近于  $s(t)$ 。

设  $w$  为分离矩阵  $W$  的一列向量,  $x$  是已经白化处理的数据,具有零均值和单位协方差,将  $y_i = w^T x$  代入上式(7),得

$$J(w^T x) = k [E\{G(w^T x)\} - E\{G(y_{gauss})\}]^2 \tag{8}$$

得到 ICA 的负熵判据:寻找  $w^*$ , 使  $y_i = w^{*T} x$  的负熵取得极大值,就获得了一个独立分量  $s_i(t) = y_i(t)$ 。

由式(8)知,  $w^T x$  负熵的极大值相当于  $E\{G(w^T x)\}$  的极大值。在约束  $E\{(w^T x)^2\} = \|w\|^2 = 1$  下,构造如下目标函数

$$F(w) = E\{G(w^T x)\} + \lambda (\|w\|^2 - 1)^2 \tag{9}$$

现求  $w$  使得  $F(w)$  取极大值,因此有:

$$f(w) = \frac{\partial F(w)}{\partial w} = E\{xG'(w^T x)\} + 2\lambda (\|w\|^2 - 1)w = E\{xg(w^T x)\} - \beta w = 0 \tag{10}$$

使用牛顿迭代法解方程(10)的解  $w$ , 得迭代公式

$$w(k+1) = w(k) - f(w(k))/f'(w(k)) \tag{11}$$

其中:

$$f'(w(k)) = E\{xx^T g'(w^T x)\} - \beta I \tag{12}$$

$$\beta = E\{w^T xg(w^T x)\} \tag{13}$$

为提高算法的稳定性,在迭代公式中加入学习步长  $\mu$ , 得迭代算法:

$$w(k+1) = w(k) - \mu f(w(k))/f'(w(k)) \tag{14}$$

根据这一迭代公式(14),就可递推求得  $w$ , 进而获得一个独立分量  $w^T x$ 。

在算法中,  $G(y_i)$  的选取采用文献[3]的取法:对于超高斯信号取  $G(y_i) = y_i + \tanh(y_i)$ , 对于亚高斯信号取  $G(y_i) = y_i - \tanh(y_i)$ , 统一表示为  $G(y_i) = y_i + k_i \tanh(y_i)$ 。  $k_i$  通过计算下式得到<sup>[3]</sup>:

$$k_i = \text{sign}(E\{\text{sech}^2(y_i)\}E\{y_i^2\} - E\{\tanh(y_i)y_i\}) \tag{15}$$

## 3 仿真结果

为检验 ICA 算法是否能够实现线性混合信号

的盲分解,我们作了如图 2-图 4 所示的仿真实验。图 2 是一组源信号,从上到下分别为人体脑电信号(EEG)、尖脉冲信号、锯齿信号、和随机噪声,它们对系统来说是未知的。这一组信号经混合(用源信号的数据阵左乘一个对系统来说同样是未知的  $4 \times 4$  的混合矩阵 A)得到图 3 所示一组观测信号。

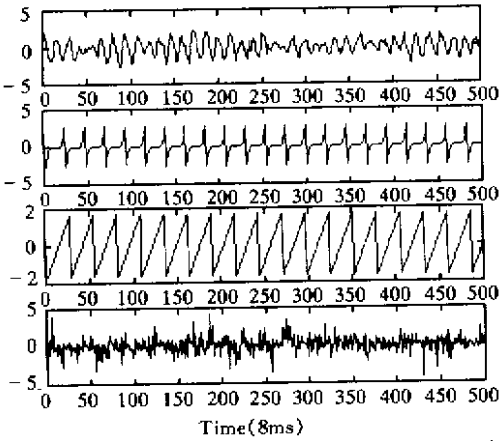


Fig.2 The four original signals(Top: EEG)

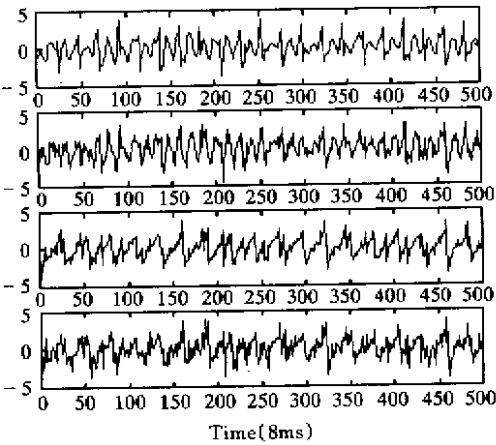


Fig.3 The Mixed signal

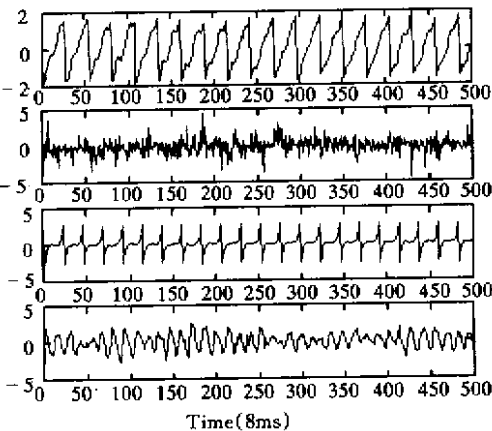


Fig.4 Separation of Sources with ICA (Bottom: EEG)

把这一组混合后的观测信号作为我们的 ICA 算法的输入,分解后的结果如图 4 所示。可以看到,源信号的各波形被很好地分离出来。前面已经提到,ICA 的理想结果只能是得到源信号的一个逼近,其顺序和尺度可以不同。该算法的稳健性在多次实验中得到了验证,说明算法是有效的。

为了进一步验证算法有效性,对实际生物信号进行处理。实验数据取自 MIT - BIH 数据库 (slp01a),为临床同步记录的脑电和心电信号,如图 5 所示。可以发现在脑电信号中存在明显的心电干扰。为了消除心电干扰,使用上述 ICA 算法对测量信号进行独立分量分离,图 6 为分离结果。对比图 5 和图 6,可以看出经 ICA 分离出的脑电信号有效地去除了心电干扰成分。

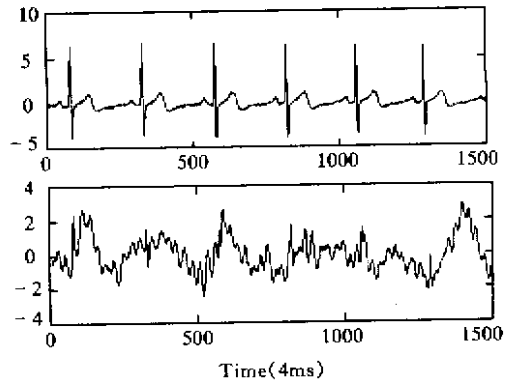


Fig.5 The clinical EEG and ECG

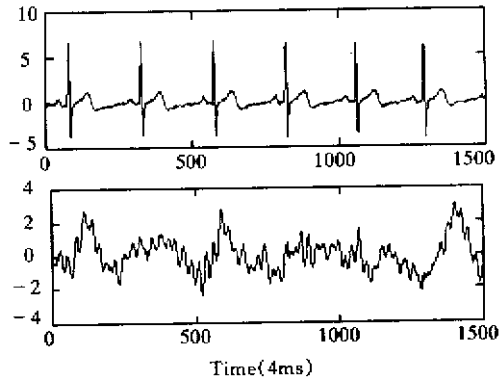


Fig.6 The Separated EEG and ECG with ICA

### 4 结 论

本文介绍了独立分量分析在盲信源分离中的应用,给出了一个衡量输出分量统计独立的目标函数。最优化该目标函数,得出一种独立分量分析迭代算法。该算法的优点在于迭代过程中不需要计算信号的高阶统计量,收敛速度快。计算机仿真和实

验结果表明了算法的有效性。

近几年来,通过 ICA 来实现盲信源分离逐渐成为盲信号处理中的一个热点问题,在语音识别、通讯、生物医学信号处理等领域尤其受到关注。然而也应看到,ICA 的理论体系还有待进一步研究和完善,在应用方面还有许多待开发的领域。

#### 参考文献:

- [1] Comon P. Independent component analysis, A new concept[J]? *Signal Processing*, 1994,36:287-314.
- [2] Bell AJ, Sejnowski TJ. An information maximization approach to blind separation and blind deconvolution[J]. *Neural Computation*, 1995,7(6):1129-1159.
- [3] Lee TW. Independent component analysis using an extended infomax algorithm for mixed Subgaussian and Supergaussian sources[J]. *Neural Computation*, 1999,11(2):409-433.
- [4] Lee TW. Blind source separation of more sources than mixtures using overcomplete representations[J]. *IEEE Signal Processing letters*, 1999,6(4):87-90.
- [5] Hyvarinen A. Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1999,10(3):626-634.
- [6] Hyvarinen A, Oja. Independent Component Analysis: Algorithms and Applications[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 2000,13(4-5):411-430.
- [7] Makeig S, Jung TP, Anthony J, Bell AJ. Blind Separation of Auditory Event-related Brain Responses into Independent Components[C]. *Proc Natl Acad Sci, USA*, 1997,94:10979-10984.
- [8] Amari SI, Cichocki A, Yang HH. A new learning algorithm for blind signal separation[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1996,MIT press, 757-763.
- [9] Cardoso JF. Blind signal separation: statistical principles[C]. *Proc IEEE*, 1998,86(10):2009-2025.
- [10] Cichocki A. Robust learning algorithm for blind separation of signals[J]. *Electronics Letters*, 1994,30(17):1386-1387.

## AN ITERATIVE ALGORITHM OF INDEPENDENT COMPONENT ANALYSIS AND THE EXPERIMENT RESULTS

ZHOU Wei-dong<sup>1</sup>, JIA Lei<sup>2</sup>, LI Ying-yuan<sup>1</sup>

(1.School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China;

2.School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China)

**Abstract:** An independent component analysis (ICA) method in blind source separation (BSS) is introduced. An objective function is given based on information theory. A fast iterative ICA algorithm is derived by optimizing the function. In contrast to most blind source separation algorithms, the method does not need to calculate the higher order statistics of signals, and converges fast. The proposed method is verified by computer-simulating with biological signals such as clinical electroencephalograph (EEG) signal and other kind of signals.

**Key Words:** Blind source separation(BSS); Independent component analysis(ICA); Artificial neural network(ANN); Negentropy