第51卷第2期 数学学报中文版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

**文章编号:** 0583-1431(2008)02-0299-12 **文献标识码: A**

# 随机利率下奇异期权的定价公式

李淑锦

杭州电子科技大学财经学院 杭州 310018
浙江大学理学院 杭州 310027
E-mail: jslsj@163.com

李胜宏

浙江大学理学院 杭州 310027

**摘　要**　在随机利率条件下, 借助于测度变换获得了复合看涨期权的一般的定价公式, 同时利用鞅理论和 Girsanov 定理, 在利率服从于扩展的 Vasicek 利率模型时, 得到了复合看涨期权精确的定价公式. 用同样的方法, 考虑了预设日期的重置看涨期权的定价问题, 在利率服从同样的利率模型时, 获得了重置看涨期权的定价公式. 数值化的结果进一步说明了当利率遵循扩展的 Vasicek 利率模型时, B-S 看涨期权的价格关于标的资产的价格是严格单调递增的, 复合看涨期权的 Geske 公式是可以推广到随机利率的情况.

**关键词**　复合期权; 重置期权; 测度变换; Girsanov 定理
**MR(2000) 主题分类**　60G35, 91B28, 90A09
**中图分类**　O211.6

**Exotic Options Pricing Formulae with Stochastic Interest Rates**

Shu Jin LI

*College of Business, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou* 310018*, P. R. China*
*College of Science, Zhejiang University, Hangzhou* 310027*, P. R. China*
*E-mail: jslsj@163.com*

Sheng Hong LI

*College of Science, Zhejiang University, Hangzhou* 310027*, P. R. China*

**Abstract**　A general pricing formula for compound call option is derived when the interest rate is stochastic by the change of measure in this paper. At the same time, an analytic pricing formula for compound call option is also given in an extended Vasicek's interest rate framework by applying the martingale theory and Girsanov's Theorem. The pricing formula for the reset call option with predetermined dates is also obtained when the interest rate follows the same process by the same approach. Numerical results explain that the price of B-S call option is strictly monotonically increasing in stock price when the interest rate follows the Vasicek's model. The generalization of the Geske-formula for compound option to stochastic interest rates is possible.

**Keywords**　compound options; reset options; change of measure; Girsanov's theorem
**MR(2000) Subject Classification**　60G35, 91B28, 90A09
**Chinese Library Classification**　O211.6

收稿日期: 2005-07-08; 修改日期: 2006-01-22; 接受日期: 2008-01-03
基金项目: 2007 年浙江省博士后科研项目择优资助一类资助项目

越来越多的奇异期权的估价和对冲问题已经成为金融领域的一个新的主题, 正吸引着许多从业人员利用奇异期权来满足他们的客户对冲风险的需要 (尤其是在货币市场上). 奇异期权, 或称为 "轨道依赖" 期权, 如复合期权、重置期权和障碍期权等, 是指那些其最终收益依赖于基础资产从期权的发行日至到期日的价格特征 (本文假定到期日是固定的), 而不仅仅依赖于标的资产到期时的价格. 既然利率风险是值得关注的一种风险, 因此考虑在利率随机的情况下复合期权和重置期权等的定价问题是十分必要的.

复合期权是一种期权的期权, 它的价值依赖于基础期权的价格, 也依赖于基础期权的标的资产的价格. 复合期权在公司金融中已经得到了广泛的应用, 事实上, 在公司金融框架中, 基础资产就是公司资产的总价值, 各种公司有价证券, 如股票、权证和可转换证券, 都可以看作是基础资产上的未定权益, 在公司有价证券上的期权就是典型的复合期权的例子, 因此能够得到复合期权的定价公式是十分有用的. 对复合期权估价就是对各种各样的复杂的实际机会的估价, 在那里早期投资是随后投资的先决条件, 具体的研究结果可见 Carr (1988), Brealey 和 Myers [1], Geske 和 Johnson [2], Trigeorgis [3].

预设日期的重置期权是这样的合约, 其敲定价格可以在预先设定的日期被重新设置. 我们假定有 $n$ 个预设日期, 分别为 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$, 其中 $T$ 是期权的到期日, $K$ 是重置期权发行时的执行价格. 到了 $t_1$ 时刻, 如果标的资产的价格 $S(t_1)$ 小于执行价格 $K$ 时, 期权的执行价格被重新设置为 $S(t_1)$, 否则的话, 仍为 $K$. 类似地, 敲定价格在时刻 $t_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$ 也被重置, 类似于 $t_1$ 时刻. 因此可知, 重置期权在到期日 $T$ 时其执行价格为 $\min\{K, S(t_1), S(t_2), \ldots, S(t_n)\}$. 在过去的几十年中重置期权已经被众多学者研究, 有关这方面的工作可见 Cheng 和 Zhang [4], Gray 和 Whaley [5], Nelken [6], Gray 和 Whaley [7] 等, 这些研究主要是集中在 B-S 框架下进行的, 也就是假定, 标的资产的价格服从于几何布朗运动, 其无风险利率和波动率都是常数, 且市场是完备的. 直到最近, 有关重置期权定价的结果还是比较少的, 尤其是当利率是随机的情况.

自 B-S 公式 1973 年面世以后 [8], Geske [9] 在 B-S 框架下获得了复合期权价格的解析公式. 在 Elettra 和 Rossella [10] 中, Elettra 和 Rossella 在标的资产的波动率和利率都依赖于时间的情况下, 通过解一个有复杂终值条件的偏微分方程, 得到了复合期权的定价公式, 推广了 Geske 公式. 这一公式是本文获得的定价公式的一种特殊情况.

事实上, 在上面提到的应用中, 对利率的假设是不够的. 实际中, 既然投资机会可能是长期的, 那么利率就应该是随机的, 因此在期权定价问题中考虑利率风险是非常必要的. 在 Frey 和 Sommer [11] 中讨论了当利率满足一个多因素 HJM 模型时来定价期货期权上的复合期权, 并且推广了这种情况下的复合期权公式. 在文中作者指出了 German 等人 [12] 文中的一个错误, 即不加说明地认为, 在利率随机的情况下, B-S 看涨期权的价格仍然是标的资产价格的单调递增函数. 事实上, 当利率服从 Vasicek 模型时, 尽管 B-S 公式不仅依赖于股票的价格, 而且依赖于零息债券的价格, 但 B-S 看涨期权的价格的确是随标的资产价格的增大而单调递增的. 这一错误是不存在的. 本文第 4 部分利用数值结果进一步说明这一事实. Frey 和 Sommer 在文中仅仅研究了在随机利率条件下期货期权上的复合期权的定价问题, 对 Geske 公式进行了推广. 本文则讨论当利率服从一个扩展的 Vasicek 模型时, 基础期权上的复合期权的定价问题, 获得了这种复合看涨期权价格的精确公式.

有关随机利率条件下期权的定价问题, 国内外也有一些学者对此做了研究, 读者可见 Amin 和 Bodurtha [13], Amin 和 Jarrow [14], 李淑锦和李胜宏 [15, 16] 等文章.

本文第 1 部分通过测度变换得到了在利率随机的情况下复合看涨期权的一般的定价公式; 当利率服从于扩展的 Vasicek 模型时, 复合看涨期权的精确的定价公式在第 2 部分中获得; 第 3 部分则考虑了在利率服从同样模型的情况下预设日期的重置看涨期权的定价问题, 得到了有一个预

设日期的重置期权的定价公式; 数值化的结果在第 4 部分, 它说明了当利率服从 Vasicek 模型时, 标准 B-S 的看涨期权的的价格是标的资产价格 $S$ 的单调递增函数, 因此对于写在执行价格为 $K_1$ 的 B-S 看涨期权上的执行价格为 $K_2$ 的复合期权, 一定存在唯一的 $S^*$, 使得 $C(T_2, S^*) = K_2$; 最后是结论.

## 1 复合期权的一般的定价公式

本文考虑一个随机的跨期经济, 不确定性由概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 来表示, 概率 $P$ 定义零测度集, $\mathscr{F}_t$ 代表时刻 $t$ 的信息流, 满足 "自然假设", 即流 $\mathscr{F}_t$ 是右连续的、单调递增的, 且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有 $\mathscr{F}$ 可测的 $P$- 零测度集.

设 $S$ 表示标的资产 - 股票 - 的价格; $C(t,S)$ 是股票上的欧式看涨期权 $t$ 时刻的价格, 其执行价格为 $K_1$, 到期日为 $T_1$, 即 B-S 看涨期权的价格; $V(t)$ 表示期权 $C(t,S)$ 上的复合看涨期权 $t$ 时刻的价格, 其执行价格为 $K_2$, 到期日为 $T_2$, 且 $T_2 < T_1$.

由鞅理论, 假定在鞅测度 $Q$ 下, 标的资产的价格 $S$ 满足随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t. \tag{1}$$

这里 $W_t$ 表示鞅测度 $Q$ 下的标准的布朗运动, $\sigma(t)$ 是波动率. 本文假定 $\sigma(t)$ 是确定的且依赖于时间 $t$, $r(t)$ 表示无风险利率, 是随机的.

由 Merton [17], B-S 看涨期权的风险中性价格 $C(t,S)$ 为

$$C(t,S) = B_t E_Q\big[B_{T_1}^{-1}\big(S(T_1) - K_1\big)^+\big|\mathscr{F}_t\big], \quad \forall\, t \le T_1. \tag{2}$$

这里 $E_Q$ 表示测度 $Q$ 下的期望值, $B_t$ 满足 $B_t = \exp\big(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\big)$. 既然 $r(t)$ 是随机的, $B(t)$ 也是随机的. 因此在本文中, $C(t,S)$ 中一定包含贴现债券的价格.

由于利率是随机的, 我们引进远期测度 $Q_{T_1}$, 即贴现债券 $B(t,T_1)$ 就作为计价单位, $Q_{T_1}$ 关于 $Q$ 的 Radon–Nikodým 导数等于

$$\frac{\mathrm{d}Q_{T_1}}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathscr{F}_{T_1}} = \frac{1}{B_{T_1}B(0,T_1)}. \tag{3}$$

引进测度 $Q_S$, 即股票价格 $S(t)$ 作为计价单位, $Q_S$ 关于 $Q$ 的 Radon–Nikodým 导数为

$$\frac{\mathrm{d}Q_S}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathscr{F}_{T_1}} = \frac{S(T_1)}{B(T_1)S(0)}. \tag{4}$$

由条件期望公式, 式 (2) 可以简化为

$$C(t,S) = S(t)Q_S(A_1\,|\,\mathscr{F}_t) - K_1 B(t,T_1)Q_{T_1}(A_1\,|\,\mathscr{F}_t), \tag{5}$$

其中 $A_1 = \{\omega \in \Omega \mid S(T_1) \ge K_1\}$. 就是看涨期权 $C$ 的实施集.

下面考虑 B-S 看涨期权 $C(t,S)$ 上的复合看涨期权. 在到期日 $T_2$, 复合看涨期权的收益为

$$V(T_2) = (C(T_2,S) - K_2)^+.$$

只要看涨期权的价格 $C(t,S)$ 关于股票价格 $S$ 是单调递增的, 那么就类似于利率确定的情形, 即存在值 $S^*$, 使得

$$C(T_2, S^*) = K_2. \tag{6}$$

公式 (6) 也说明在到期日 $T_2$, 当股票价格 $S(T_2)$ 大于 $S^*$ 时, 复合看涨期权被实施, 否则复合看涨期权的价值为零, 因此 $A_2 = \{\omega \in \Omega \mid S(T_2) \ge S^*\}$ 就是复合看涨期权 $V$ 的实施集.

由鞅理论, 知

$$V(t) = B_t E_Q\big[B_{T_2}^{-1}\big(C(T_2,S) - K_2\big)^+\big|\mathscr{F}_t\big], \quad \forall\, t \le T_2, \tag{7}$$

那么, 对所有的 $t \le T_2$,

$$\begin{aligned} V(t) &= B_t E_Q\left[B_{T_2}^{-1}\big(C(T_2,S(T_2))-K_2\big)I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t\right] \\ &= B_t E_Q\left[B_{T_2}^{-1}C(T_2,S(T_2))I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t\right]-K_2B_tE_Q[B_{T_2}^{-1}I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t], \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $I$ 是示性函数. 把 (2) 代入 (8), 注意到 $I_{A_2}$ 关于流 $\mathscr{F}_{T_2}$ 是可测的, 则有

$$\begin{aligned} B_tE_Q\left[B_{T_2}^{-1}C(T_2,S(T_2))I_{A_2}\,|\,\mathscr{F}_t\right] &= B_tE_Q\left\{E_Q\left[B_{T_1}^{-1}(S(T_1)-K_1)^+\mid \mathscr{F}_{T_2}\right]I_{A_2}\middle|\mathscr{F}_t\right\} \\ &= B_tE_Q\left\{E_Q\left[I_{A_2}B_{T_1}^{-1}(S(T_1)-K_1)^+\mid \mathscr{F}_{T_2}\right]\mid \mathscr{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

由条件期望的平滑性质知

$$\begin{aligned} B_tE_Q\left[B_{T_2}^{-1}C(T_2,S(T_2))I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t\right] &= B_tE_Q\left[I_{A_2}B_{T_1}^{-1}(S(T_1)-K_1)^+\mid \mathscr{F}_t\right] \\ &= B_tE_Q\left[B_{T_1}^{-1}S(T_1)I_{(A_1\cap A_2)}\mid \mathscr{F}_t\right]-K_1B_tE_Q[B_{T_1}^{-1}I_{(A_1\cap A_2)}\mid \mathscr{F}_t]. \end{aligned} \tag{9}$$

类似地, 引进测度 $Q_{T_2}$, 这里零息票 $B(t,T_2)$ 取作计价单位, $Q_{T_2}$ 关于 $Q$ 的 Radon–Nikodým 导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_{T_2}}{\mathrm{d}Q}\right|_{\mathscr{F}_{T_2}}=\frac{1}{B_{T_2}B(0,T_2)}. \tag{10}$$

在利率是随机的情况下, 我们得到了下面的关于复合看涨期权一般的定价公式.

**定理 1** 如果利率是随机的, 只要标的期权的价格 $C(t,S)$ 关于股票价格 $S$ 是严格单调递增的, 那么复合看涨期权在 $t$ 时刻的价格由下式确定

$$V(t)=S_tQ_S(A_1\cap A_2\mid \mathscr{F}_t)-K_1B(t,T_1)Q_{T_1}(A_1\cap A_2\mid \mathscr{F}_t)-K_2B(t,T_2)Q_{T_2}(A_2\mid \mathscr{F}_t), \tag{11}$$

其中 $Q_S(A\mid \mathscr{F}_t)$ 是事件 $A$ 在测度 $Q_S$ 下关于流 $\mathscr{F}_t$ 的条件概率, $Q_{T_1}(A\mid \mathscr{F}_t)$ 等类似定义, $A_1=\{\omega\in\Omega\mid S(T_1)\ge K_1\}$ 是 B-S 看涨期权 $C$ 的实施集, $A_2=\{\omega\in\Omega\mid S(T_2)\ge S^*\}$ 是复合看涨期权 $V$ 的实施集.

**证明** 由条件期望公式知

$$E_Q\left[\frac{\mathrm{d}Q_{T_2}}{\mathrm{d}Q}I_{A_2}\middle|\mathscr{F}_t\right]=E_{Q_{T_2}}\left[I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t\right]E_Q\left[\frac{\mathrm{d}Q_{T_2}}{\mathrm{d}Q}\middle|\mathscr{F}_t\right].$$

由于 $B_{T_2}^{-1}B(T_2,T_2)$ 是测度 $Q$ 下的鞅, 再由式 (10), 得到

$$E_Q\left[\frac{\mathrm{d}Q_{T_2}}{\mathrm{d}Q}\middle|\mathscr{F}_t\right]=\frac{B(t,T_2)}{B_tB(0,T_2)},$$

所以 $B_tE_Q\left[B_{T_2}^{-1}I_{A_2}\,|\,\mathscr{F}_t\right]=B(t,T_2)E_{Q_{T_2}}\left[I_{A_2}\mid \mathscr{F}_t\right]=B(t,T_2)Q_{T_2}(A_2\mid \mathscr{F}_t)$. 类似地

$$B_tE_Q\left[B_{T_1}^{-1}I_{A_1\cap A_2}\,|\,\mathscr{F}_t\right]=B(t,T_1)E_{Q_{T_1}}\left[I_{A_1\cap A_2}\mid \mathscr{F}_t\right]=B(t,T_1)Q_{T_1}(A_1\cap A_2\mid \mathscr{F}_t),$$

且

$$B_tE_Q\left[B_{T_1}^{-1}S(T_1)I_{A_1\cap A_2}\,|\,\mathscr{F}_t\right]=S_tE_{Q_S}\left[I_{A_1\cap A_2}\mid \mathscr{F}_t\right]=S_tQ_S(A_1\cap A_2\mid \mathscr{F}_t).$$

由公式 (8) 和 (9), 即得 (11).

定价公式 (11) 是相当一般的, 无论利率遵循什么样的过程, 也不论其波动率是否随机, 唯一的条件是标的期权价格 $C(t,S)$ 关于股票的价格 $S$ 是单调递增的.

## 2 在扩展的 Vasicek 模型下复合看涨期权的定价公式

现在来推广由 Geske [9] 给出的复合看涨期权的定价公式, 当基础资产价格的波动率是依赖于时间的, 且利率是随机的.

Vasicek 模型是最早提出的利率期限结构模型之一, 由于它的可操作性, 成为从业人员中最流行的期限结构模型之一. 这一扩散过程是由 Vasicek [18] 提出的, 是一个期望回归的 Ornstein–Uhlenbeck 过程. 即期利率 $r$ 被定义为在风险中性测度即鞅测度 $Q$ 下随机微分方程 (简写为 SDE)

$$\mathrm{d}r_t=(\theta-ar_t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z_t$$

的唯一解, 其中 $\theta$, $a$ 和 $\sigma$ 是正常数, $Z(t)$, $t\geq 0$ 是测度 $Q$ 下另一个标准的布朗运动. 众所周知, 这个微分方程的解是一个有连续样本轨道的、高斯增量的马尔可夫过程. 关于马尔可夫过程最新的研究, 读者可参见李应求等人 [19] 和马宇韬等人 [20].

在 Vasicek [18] 一文中, 通过解一个常微分方程 (简写为 ODE) 获得了贴现债券的价格. 本文把模型中的 $\theta$, $a$ 和 $\sigma$ 推广到依赖于时刻 $t$ 的正函数的情况, 但这些量本身是确定的, 所以即期利率 $r$ 满足

$$\mathrm{d}r_t=(\theta_t-a_tr_t)\mathrm{d}t+\sigma_r(t)\mathrm{d}Z_t, \tag{12}$$

且假定 $Z(t)$ 与 $W(t)$ 是相关的, 其相关系数为 $\rho$. 在这种情况下运用鞅方法也可以获得贴现债券的价格. 设 $a(u,v)=\exp\left(-\int_u^v a_s\mathrm{d}s\right)$, $\widetilde{a}(u,v)=\int_u^v a(u,s)\mathrm{d}s$, 那么对所有的 $s\geq t$,

$$r_s=a(t,s)r_t+\int_t^s\theta_va(v,s)\mathrm{d}v+\int_t^s\sigma_r(v)a(v,s)\mathrm{d}Z_v. \tag{13}$$

通过部分积分, 有

$$\int_t^T r_s\mathrm{d}s=\widetilde{a}(t,T)r_t+\int_t^T\theta_v\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}v+\int_t^T\sigma_r(v)\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}Z_v. \tag{14}$$

下面讨论贴现债券在时刻 $t$ 的价格 $B(t,T)$ , 其中 $T$ 是贴现债券的到期日. 由鞅理论, 则有

$$B(t,T)=E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right)\Big|\mathscr{F}_t\right]. \tag{15}$$

**引理 1** 当利率满足 (12) 时, $t$ 时刻到期日为 $T$ 的贴现债券的价格 $B(t,T)$ 满足

$$B(t,T)=\exp\left(-\widetilde{a}(t,T)r_t-\int_t^T\theta_v\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_r^2(v)\widetilde{a}^2(v,T)\mathrm{d}v\right), \tag{16}$$

且 $B(t,T)$ 在测度 $Q$ 下满足下面的扩散过程

$$\mathrm{d}B(t,T)=B(t,T)\left[r_t\mathrm{d}t-\widetilde{a}(t,T)\sigma_r(t)\mathrm{d}Z_t\right]. \tag{17}$$

**证明** 由公式 (14) 和 (15), 我们有

$$B(t,T)=E_Q\left[\exp\left(-r_t\widetilde{a}(t,T)-\int_t^T\theta_v\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}v-\int_t^T\sigma_r(v)\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}Z_v\right)\Big|\mathscr{F}_t\right].$$

再利用布朗运动的独立增量性质以及前面对各种参数所做的假定, 则有

$$B(t,T)=E_Q\left[\exp\left(-r_t\widetilde{a}(t,T)-\int_t^T\theta_v\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}v-\int_t^T\sigma_r(v)\widetilde{a}(v,T)\mathrm{d}Z_v\right)\right].$$

由此直接计算即得式 (16). 应用伊藤公式和 (16), 得 $\mathrm{d}B(t,T)=B(t,T)\big[r_t\mathrm{d}t-\widetilde{a}(t,T)\sigma_r(t)\mathrm{d}Z_t\big]$.

**引理 2** 当即期利率满足 (12), 执行价格为 $K_1$, 到期日为 $T_1$ 的 B-S 看涨期权的价格等于

$$C(t,S)=S(t)N\left(d(t,T_1)+\frac{1}{2}\sigma(t,T_1)\right)-K_1B(t,T_1)N\left(d(t,T_1)-\frac{1}{2}\sigma(t,T_1)\right), \tag{18}$$

这里 $N(h)$ 表示标准正态随机变量的累积分布函数, 且

$$\sigma^2(t,s)=\int_t^s\sigma_r^2(v)\widetilde{a}^2(v,s)\mathrm{d}v+2\int_t^s\rho\sigma_r(v)\sigma_v\widetilde{a}(v,s)\mathrm{d}v+\int_t^s\sigma^2(v)\mathrm{d}v, \tag{19}$$

$$d(t,T_1)=\frac{\ln S_t-\ln K_1B(t,T_1)}{\sigma(t,T_1)}. \tag{20}$$

**证明** 本文不给出这个引理的证明, 读者可以参见数理金融领域的参考文献加以证明.

下面考虑在扩展的 Vasicek 框架下定价复合看涨期权. 在这种情况下, 首先我们发现复合看涨期权的价格不仅依赖于股票价格, 还依赖零息债券的价格, 也就是说, 复合看涨期权的价格依赖于两个变量 $S_t$ 和 $B(t,T_1)$, 而不是一个. Frey, Sommer [11] 文中指出, 与随机利率是确定的情况相比, 在随机利率下, 不能确定是否存在 $S^*$, 使得 $C(T_2,S^*)=K_2$, 即标的期权的价格关于股

票的价格是否是单调递增的. 在本文的第 4 部分 - 数值化的结果中, 我们讨论了当利率服从 (12) 时, B-S 看涨期权 $C(t,S)$ 的价格是股票价格 $S$ 的单调递增函数, 这就说明了在这种情况下, 一定存在 $S^*$, 使得 $C(T_2,S^*)=K_2$. 这也就说明了当利率服从于 (12) 时, B-S 看涨期权的价格满足定理 1 的条件. 由定理 1 可知, 为了将 Geske 公式推广到随机利率的情形, 只需要计算测度 $Q_{T_1}$ 和 $Q_S$ 下事件 $A_1\cap A_2$ 关于流 $\mathscr{F}_t$ 的条件概率, 且计算事件 $A_2$ 在测度 $Q_{T_2}$ 下关于流 $\mathscr{F}_t$ 的条件概率. 利用 Girsanov 定理, 我们得到了下面的复合看涨期权的定价公式.

**定理 2** 当利率服从式 (12) 时, 复合看涨期权在时刻 $t\le T_2$ 的价格为

$$\begin{aligned}V(t)=&S_tN\left(d_1(t,T_1)+\frac{\sigma(t,T_1)}{2},\,d_2(t,T_2)+\frac{\sigma(t,T_2)}{2};\,\phi(t,T_2,T_1)\right)\\&-K_1B(t,T_1)N\left(d_1(t,T_1)-\frac{\sigma(t,T_1)}{2},\,d_2(t,T_2)-\frac{\sigma(t,T_2)}{2}+\frac{\varphi(t,T_2,T_1)}{\sigma(t,T_2)};\phi(t,T_2,T_1)\right)\\&-K_2B(t,T_2)N\left(d_2(t,T_2)-\frac{\sigma(t,T_2)}{2}\right),\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $N(h,k;\phi)$ 表示二维标准正态分布随机变量的累积分布函数, $\phi$ 是其相关系数, $N(h)$ 见引理 2, $\sigma(t,s)$ 见 (19), 且对所有的 $s>t$,

$$d_1(t,T_1)=d(t,T_1),\quad d_2(t,T_2)=\frac{\ln S_t-\ln S^*B(t,T_2)}{\sigma(t,T_2)},\tag{22}$$

$$\varphi(t,s,u)=\int_t^s\rho\sigma_r(v)\sigma_v\big(\widetilde{a}(v,s)-\widetilde{a}(v,u)\big)\mathrm{d}v+\int_t^s\sigma_r^2\widetilde{a}(v,s)\big(\widetilde{a}(v,s)-\widetilde{a}(v,u)\big)\mathrm{d}v,\tag{23}$$

$$\phi(t,s,u)=\frac{\psi(t,s,u)}{\sigma(t,s)\sigma(t,u)},\tag{24}$$

这里

$$\psi(t,s,u)=\int_t^s\sigma_r^2(v)\widetilde{a}(v,u)\widetilde{a}(v,s)\mathrm{d}v+\int_t^s\sigma^2(v)\mathrm{d}v+\int_t^s\rho\sigma_r(v)\sigma_v\big(\widetilde{a}(v,s)+\widetilde{a}(v,u)\big)\mathrm{d}v.\tag{25}$$

**证明** 首先计算 $Q_S(A_1\cap A_2\,|\,\mathscr{F}_t)$. 根据布朗运动的性质, 既然 $W(t)$ 和 $Z(t)$ 是相关的, 相关系数为 $\rho$, 那么在测度 $Q$ 下一定存在另外一个与 $Z(t)$ 独立的布朗运动 $Z_1(t)$, 使得 $\mathrm{d}W_t=\rho\mathrm{d}Z_t+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}Z_1(t)$. 既然 $S(t)$ 服从 (1), 那么

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=r(t)\mathrm{d}t+\rho\sigma_t\mathrm{d}Z_t+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_t\mathrm{d}Z_1(t).\tag{26}$$

由伊滕引理和 (4), 有

$$\frac{\mathrm{d}Q_S}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathscr{F}_{T_1}}=\exp\left(-\int_0^{T_1}\sigma_v^2\mathrm{d}v+\int_0^{T_1}\rho\sigma_v\mathrm{d}Z_v+\int_0^{T_1}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_v\mathrm{d}Z_1(v)\right).$$

多维的 Girsanov 定理说明 $\widetilde{Z}(t)=Z(t)-\int_0^t\rho\sigma_v\mathrm{d}v$, $\widetilde{Z}_1(t)=Z_1(t)-\int_0^t\sqrt{1-\rho^2}\sigma_v\mathrm{d}v$ 是测度 $Q_S$ 下的两个相互独立的布朗运动. 因此在测度 $Q_S$ 下, 股票价格和利率分别满足随机过程

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\big(r(t)+\sigma_t^2\big)\,\mathrm{d}t+\rho\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{Z}_t+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{Z}_1(t),\tag{27}$$

$$\mathrm{d}r_t=\big(\theta_t+\rho\sigma_t\sigma_r(t)-a_tr_t\big)\mathrm{d}t+\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{Z}_t.\tag{28}$$

再一次利用伊滕引理和布朗运动的独立增量性质, 直接计算即可得

$$Q_S(A_1\cap A_2\,|\,\mathscr{F}_t)=N\left(d_1(t,T_1)+\frac{\sigma(t,T_1)}{2},d_2(t,T_2)+\frac{\sigma(t,T_2)}{2};\phi(t,T_2,T_1)\right).\tag{29}$$

其次, 计算 $Q_{T_1}(A_1\cap A_2\,|\,\mathscr{F}_t)$ 和 $Q_{T_2}(A_2\,|\,\mathscr{F}_t)$. 类似地, 存在测度 $Q_{T_i}$ 下独立于 $W_t$ 的另一个布朗运动 $W_1^i(t)$, 使得

$$\mathrm{d}Z_t=\rho\mathrm{d}W_t+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_1^i(t).$$

由引理 1, 零息债券的价格满足过程

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)}=r_t\mathrm{d}t-\rho\widetilde{a}(t,T)\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t-\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{a}(t,T)\sigma_r(t)\mathrm{d}W_1^i(t). \tag{30}$$

再一次利用伊滕引理和 Girsanov 定理和式 (3), (10), 可知

$$\widetilde{W}^i(t)=W(t)+\int_0^t\rho\widetilde{a}(t,T_i)\sigma_r(v)\mathrm{d}v,\quad \widetilde{W}_1^i(t)=W_1(t)+\int_0^t\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{a}(v,T_i)\sigma_r(v)\mathrm{d}v$$

是测度 $Q_{T_i}$, $i=1,2$ 下的两个独立的布朗运动. 因此, 在测度 $Q_{T_1}$ 下

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}&=\big(r(t)-\rho\widetilde{a}(t,T_1)\sigma_t\sigma_r(t)\big)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{W}^1(t),\\ \mathrm{d}r_t&=\big(\theta_t-\widetilde{a}(t,T_1)\sigma_r^2(t)-a_tr_t\big)\mathrm{d}t+\rho\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}^1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^1(t).\end{aligned}$$

在测度 $Q_{T_2}$ 下

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}&=\big(r(t)-\rho\widetilde{a}(t,T_2)\sigma_t\sigma_r(t)\big)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{W}^2(t),\\ \mathrm{d}r_t&=\big(\theta_t-\widetilde{a}(t,T_2)\sigma_r^2(t)-a_tr_t\big)\mathrm{d}t+\rho\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}^2(t)+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^2(t).\end{aligned}$$

由布朗运动的独立增量性质, 直接计算即得

$$\begin{aligned}Q_{T_1}(A_1\cap A_2\,|\,\mathscr{F}_t)\ &=N\bigg(d_1(t,T_1)-\frac{1}{2}\sigma(t,T_1),\\ &\qquad d_2(t,T_2)-\frac{\sigma(t,T_2)}{2}+\frac{\varphi(t,T_2,T_1)}{\sigma(t,T_2)};\,\phi(t,T_2,T_1)\bigg)\end{aligned} \tag{31}$$

和

$$Q_{T_2}(A_2\,|\,\mathscr{F}_t)=N\left(d_2(t,T_2)-\frac{1}{2}\sigma(t,T_2)\right). \tag{32}$$

这样将公式 (29), (31) 和 (32) 代入定理 1 中的式 (11) 即可得式 (21).

注意：当利率仅依赖于时间 $t$ 但是非随机时, 式 (21) 即简化为 Elettra and Rossella [10] 中的式 (11).

## 3 重置期权的定价公式

现在考虑当利率服从扩展的 Vasicek 模型时预设日期的重置看涨期权的定价问题, 其标的资产为 $S$. 为了说明问题简单, 本部分仅讨论有一个预设日期 $t_1$, 执行价格为 $K$ 且到期日为 $T$ 的重置看涨期权. 这就意味着, 如果在预设日期 $t_1$, 有 $S(t_1)<K$, 期权的执行价格被重置为 $S(t_1)$, 反之期权的执行价格仍是 $K$. 因此在到期时刻 $T$, 重置看涨期权的收益为

$$RC(T)=(S_T-K)^+\,I_{(S(t_1)\geq K)}+(S_T-S_{t_1})^+I_{(S(t_1)<K)}, \tag{33}$$

其中 $x^+=\max(x,0)$ 且 $I$ 仍表示示性函数.

既然当 $t>t_1$ 时, $I_{(S_{t_1}\geq K)}$ 和 $I_{(S_{t_1}<K)}$ 关于流 $\mathscr{F}_{t_1}$ 是可测的, 而 $\mathscr{F}_{t_1}\subseteq\mathscr{F}_t$, 所以当 $t>t_1$ 时, 重置看涨期权的价格等于

$$\begin{aligned}RC(t)&=B_tE_Q\big[B_T^{-1}\,(S_T-K)^+\,I_{(S(t_1)\geq K)}\,|\,\mathscr{F}_t\big]+B_tE_Q\left[B_T^{-1}(S_T-S_{t_1})^+I_{(S(t_1)<K)}\,|\,\mathscr{F}_t\right]\\ &=I_{(S_{t_1}\geq K)}BS(t,S,K,T)+I_{(S_{t_1}<K)}BS(t,S,S_{t_1},T),\end{aligned}$$

其中 $BS(t,S,K,T)$ 就是 $S(t)$ 上的执行价格为 $K$, 到期日为 $T$ 的欧式 B-S 看涨期权的价格, 由式 (18) 确定. 因此下面只需要考虑当 $t\leq t_1$ 时重置看涨期权的价格.

由鞅理论, 重置看涨期权 $t$ 时刻的价格为

$$RC(t)=B_tE_Q\left[B_T^{-1}RC(T)\,|\,\mathscr{F}_t\right]. \tag{34}$$

由式 (33) 和 (34), 对所有的 $t \le t_1$,

$$\begin{aligned}RC(t) = & B_t E_Q\left[B_T^{-1} S_T I_A \,|\, \mathcal{F}_t\right] - K B_t E_Q\left[B_T^{-1} I_A \,|\, \mathscr{F}_t\right] \\ & + B_t E_Q\left[B_T^{-1} S_T I_D \,|\, \mathscr{F}_t\right] - B_t E_Q\left[B_T^{-1} S_{t_1} I_D \,|\, \mathscr{F}_t\right],\end{aligned}$$

其中 $A = \{\omega \in \Omega \,|\, S_T \ge K,\, S_{t_1} \ge K\}$, $D = \{\omega \in \Omega \,|\, S_T \ge S_{t_1},\, S_{t_1} < K\}$. 借助于测度变换下的条件期望公式以及 (3), (4), 上式可以简写为

$$RC(t) = S(t) E_{Q_S}[I_A \,|\, \mathscr{F}_t] - K B(t,T) E_{Q_T}[I_A \,|\, \mathscr{F}_t] + S(t) E_{Q_S}[I_D \,|\, \mathscr{F}_t] - B_t E_Q[B_T^{-1} S(t_1) I_D \,|\, \mathscr{F}_t].$$

同时第四项等于

$$\begin{aligned}B_t E_Q[B_T^{-1} S(t_1) I_D \,|\, \mathscr{F}_t] &= B_t E_Q\left\{S(t_1) E_Q[B_T^{-1} I_D \,|\, \mathscr{F}_{t_1}] \,|\, \mathscr{F}_t\right\} \\ &= B_t E_Q\left\{B_{t_1}^{-1} S(t_1) B(t_1,T) E_{Q_T}[I_D \,|\, \mathscr{F}_{t_1}] \,|\, \mathscr{F}_t\right\} \\ &= B(t,T) E_{Q_T}\left\{S(t_1) E_{Q_T}[I_D \,|\, \mathscr{F}_{t_1}] \,|\, \mathscr{F}_t\right\} = B(t,T) E_{Q_T}[S(t_1) I_D \,|\, \mathscr{F}_t].\end{aligned}$$

因此获得了下面一般的定价公式

$$RC(t) = S(t) Q_S(A \,|\, \mathscr{F}_t) - K B(t,T) Q_T(A \,|\, \mathscr{F}_t) + S(t) Q_S(D \,|\, \mathscr{F}_t) - B(t,T) E_{Q_T}[S(t_1) I_D \,|\, \mathscr{F}_t]. \tag{35}$$

更进一步, 在利率服从 Vasicek 模型时, 本文得到了有一个重置日期 $t_1$ 的重置看涨期权的定价公式 (36).

**定理 3** 当利率服从 (12), 有一个预设日期 $t_1$ 的重置看涨期权在时刻 $t \le t_1$ 时的价格为

$$\begin{aligned}RC(t) = & S(t) N\left(d_{11}(t,T) + \frac{\sigma(t,T)}{2},\ d_{11}(t,t_1) + \frac{\sigma(t,t_1)}{2};\ \phi(t,t_1,T)\right) \\ & - K B(t,T) N\left(d_{11}(t,T) - \frac{1}{2}\sigma(t,T),\ d_{21}(t,t_1) - \frac{1}{2}\sigma(t,t_1);\ \phi(t,t_1,T)\right) \\ & + S(t) N\left(-d_{11}(t,t_1) - \frac{1}{2}\sigma(t,t_1)\right) N\left(d_{31}(t_1,T)\right) \\ & - \frac{S_t B(t,T)}{B(t,t_1)} \exp(\varphi(t,t_1)) N\left(-d_{21}(t,t_1) - \frac{1}{2}\sigma(t,t_1)\right) N\left(d_{31}(t_1,T)\right),\end{aligned} \tag{36}$$

这里 $N(h,k;\phi)$ 和 $N(h)$ 类似于定理 2,

$$d_{11}(t,s) = \frac{\ln S_t - \ln K B(t,s)}{\sigma(t,s)}; \tag{37}$$

$$d_{21}(t,t_1) = \frac{\ln S_t - \ln K B(t,t_1) + \varphi(t,t_1,T)}{\sigma(t,t_1)}; \tag{38}$$

$$d_{31}(t,s) = -\frac{\ln B(t,s)}{\sigma(t,s)} + \frac{1}{2}\sigma(t,s), \tag{39}$$

且 $\sigma(t,s)$ 见 (19), $\varphi(t,t_1,T)$ 见 (23), $\phi(t,t_1,T)$ 见 (24).

**证明** 类似于定理 2, 首先应该计算 $Q_S(A \,|\, \mathscr{F}_t)$ 和 $Q_S(D \,|\, \mathscr{F}_t)$. 既然在测度 $Q_S$ 下, $S(t)$ 满足 (27), 且 $r(t)$ 满足 (28), 那么利用布朗运动的独立增量性质直接计算得

$$Q_S(A \,|\, \mathscr{F}_t) = N\left(d_{11}(t,T) + \frac{\sigma(t,T)}{2},\ d_{11}(t,t_1) + \frac{\sigma(t,t_1)}{2}; \phi(t,t_1,T)\right). \tag{40}$$

由于事件 $\{S(T) \ge S(t_1)\}$ 与事件 $\{S(t_1) < K\}$ 在测度 $Q_S$ 下关于流 $\mathscr{F}_t$ 是独立的, 那么

$$\begin{aligned}Q_S(D \,|\, \mathscr{F}_t) &= Q_S(S(T) \ge S(t_1) \,|\, \mathscr{F}_t) Q_S(S(t_1) < K \,|\, \mathscr{F}_t) \\ &= N\left(-d_{11}(t,t_1) - \frac{1}{2}\sigma(t,t_1)\right) N\left(-\frac{\ln B(t_1,T)}{\sigma(t_1,T)} + \frac{1}{2}\sigma(t_1,T)\right).\end{aligned} \tag{41}$$

下面计算 $Q_T(A \,|\, \mathscr{F}_t)$. 在测度 $Q_T$ 下, 由于 $S(t)$ 遵循 $\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \big(r(t) - \rho\widetilde{a}(t,T)\sigma_t\sigma_r(t)\big)\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}\widetilde{W}(t)$, 且 $r(t)$ 满足 $\mathrm{d}r_t = \big(\theta_t - \widetilde{a}(t,T_1)\sigma_r^2(t) - a_t r_t\big)\mathrm{d}t + \rho\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t) + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t)$,

其中 $\widetilde{W}(t)$ 和 $\widetilde{W}_1(t)$ 是测度 $Q_T$ 下的两个相互独立的布朗运动, 由此可得

$$Q_T(A\,|\,\mathscr{F}_t)=N\bigg(d_{11}(t,T)-\frac{1}{2}\sigma(t,T),d_{21}(t,t_1)-\frac{1}{2}\sigma(t,t_1);\phi(t,t_1,T)\bigg). \tag{42}$$

最后考虑 $E_{Q_T}[S(t_1)I_D\,|\,\mathscr{F}_t]$. 既然 $\{S(T)\geq S(t_1)\}$ 独立于事件 $\{S(t_1)<K\}$, 那么

$$E_{Q_T}[S(t_1)I_D\,|\,\mathscr{F}_t]=E_{Q_T}[S(t_1)I_{(S(t_1)<K)}\,|\,\mathscr{F}_t]Q_T(S(T)\geq S(t_1)\,|\,\mathscr{F}_t].$$

由于

$$\begin{aligned}S(t_1)=\frac{S_t}{B(t,t_1)}\exp\bigg(&-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,t_1)+\varphi(t,t_1,T)+\int_t^{t_1}\rho\sigma_r(v)\widetilde{a}(v,t_1)\mathrm{d}\widetilde{W}(v)\\&+\int_t^{t_1}\sigma_v\mathrm{d}\widetilde{W}(v)+\int_t^{t_1}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(v)\widetilde{a}(v,t_1)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(v)\bigg),\end{aligned}$$

直接计算得

$$E_{Q_T}[S(t_1)I_D\,|\,\mathscr{F}_t]=\frac{S_t}{B(t,t_1)}\exp(\varphi(t,t_1,T))N\bigg(-d_{21}(t,t_1)-\frac{1}{2}\sigma(t,t_1)\bigg)N\left(d_{31}(t_1,T)\right). \tag{43}$$

将式 (41)–(43) 代入 (35) 中即得定价公式 (36).

## 4 数值化的结果

在这一部分, 将利用数值化的方法来说明文中 B-S 看涨期权的价格与标的资产价格 $S$ 之间的关系. 为了说明方便, 本部分假定式 (1) 和 (12) 中的参数 $\sigma,\theta,a,\sigma_r$ 都为常数, 取值见表 1.

表 1 参数

| $\theta$ | $\sigma_r$ | a | $\rho$ | $\sigma$ | $K$ | $T$ | $r_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 0.02 | 0.8 | 0.25 | 0.2 | 100 | 1 | 0.03 |

在图 1 中, 本文绘制了当利率服从 (12) 时, 执行价格为 100, 到期日为 $T=1$ 年的 B-S 看涨期权的价格关于股票价格变化的图形. 从图中可以看出, 在此情况下, B-S 看涨期权的价格是股票价格 $S$ 的严格单调递增函数.

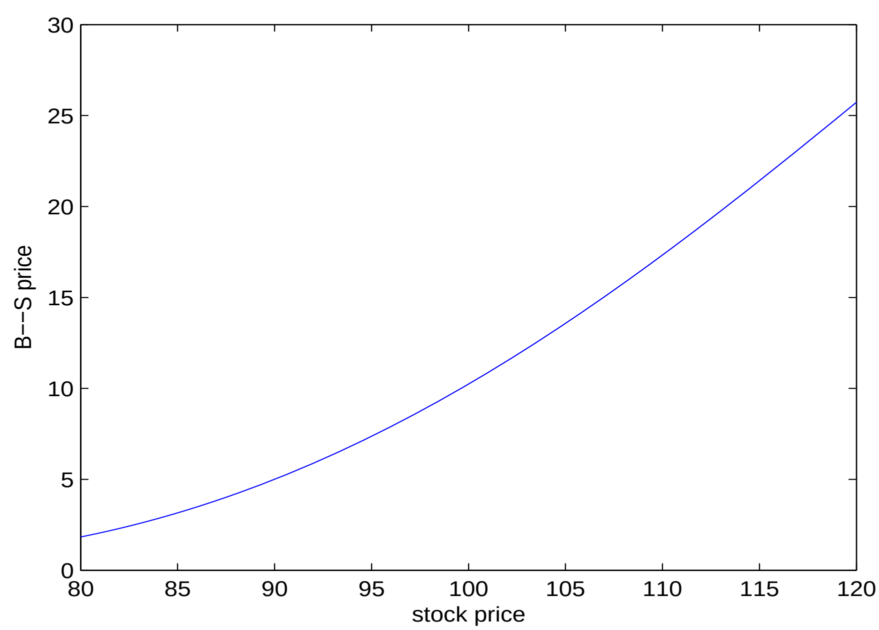


图 1: 当利率服从 (12) 时 B-S 看涨期权的价格

为了进一步说明 $S^*$ 的存在性, 本文制作了表 2. 考虑复合看涨期权, 其到期日为 $T_2 = 0.5$ 年, 标的 B-S 看涨期权的到期日为 $T_1 = 1$ 年. 从表中可以看出, 当复合看涨期权的执行价格 $K_2 = 12$ 保持不变, 随着标的看涨期权的执行价格 $K_1$ 递增时, $S^*$ 也是递增的. 这当然是正确的, 因为 B-S 看涨期权的价格随 $K_1$ 的增大而减小. 为了进行比较, 表 2 中还分别给出了平价、实值和虚值的重置看涨期权和 B-S 看涨期权当利率服从 (12) 时的价格, 参数的选取仍见表 1. 由此发现重置看涨期权的价格比相应的 B-S 看涨期权的价格要高, 这也是正确的, 因为重置看涨期权的收益要大于相应的 B-S 看涨期权的收益. 无论执行价格如何, 当利率和股票的相关程度增大时, 重置看涨期权的价格也在增大, 只是增大的幅度相对比较小, 且对虚值期权的影响程度较大, 比较而言, 对虚值期权的影响是对实值期权影响的两倍. 同时, 当执行价格增大时, 重置看涨期权的价格也在减小, 这一点类似于 B-S 看涨期权.

表 2 B-S 看涨期权和重置看涨期权的价格和 $S^*$ 值

| 执行价格 | $\rho$ | R-C price | B-S price | $K_2$ | $S^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\rho = -0.5$ | | | | |
| 90 | | 16.8930 | 16.2270 | 12 | 98.72 |
| 100 | | 10.2940 | 10.0213 | 12 | 108.0 |
| 110 | | 5.9281 | 5.6965 | 12 | 117.2 |
| | $\rho = -0.25$ | | | | |
| 90 | | 16.9330 | 16.2815 | 12 | 98.69 |
| 100 | | 10.3460 | 10.0958 | 12 | 107.96 |
| 110 | | 5.9976 | 5.7738 | 12 | 117.17 |
| | $\rho = 0$ | | | | |
| 90 | | 16.9720 | 16.3358 | 12 | 98.65 |
| 100 | | 10.3980 | 10.1695 | 5.5 | 98.0 |
| 110 | | 6.0265 | 5.8505 | 2 | 97.4 |
| | $\rho = 0.25$ | | | | |
| 90 | | 17.0100 | 16.3899 | 12 | 98.64 |
| 100 | | 10.4770 | 10.2426 | 12 | 107.9 |
| 110 | | 6.0718 | 5.9264 | 12 | 117.1 |
| | $\rho = 0.5$ | | | | |
| 90 | | 17.0490 | 16.4437 | 12 | 98.61 |
| 100 | | 10.4970 | 10.3150 | 12 | 107.87 |
| 110 | | 6.1202 | 6.0017 | 12 | 117.06 |

参数 $a = 0.8$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $r_0 = 0.03$, $S_0 = 100$, $\sigma_r = 0.02$, $\theta = 0.06$ 和 $t_1 = 0.5$.
R-C price 表示的是重置看涨期权的价格 (36).
B-S price 表示的是当利率服从 (12) 时 B-S 看涨期权的价格 (18).
$K_2$ 是复合看涨期权的执行价格.

为了相互比较, 在图 2 中绘制了当利率服从于 (12) 时重置看涨期权和 B-S 看涨期权的价格. 再次看到了重置看涨期权的价格高于相应的 B-S 期权, 然而, 对于平价期权, 重置期权的价格几乎等于 B-S 期权的价格.

## 5 结论

本文在随机利率条件下, 利用测度变换和 Girsanov 定理, 得到了两种奇异期权 - 复合期权和重置期权 - 的一些新的定价公式.

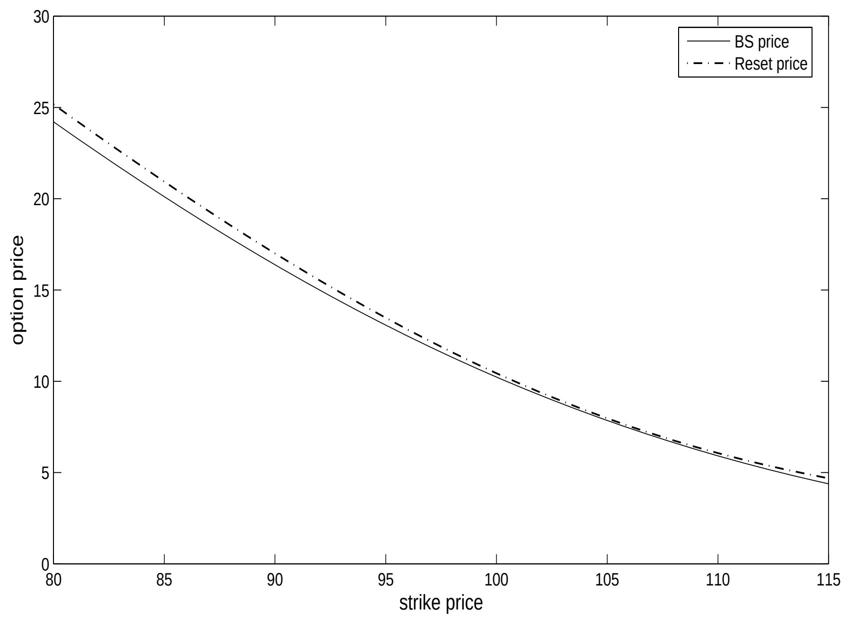


图 2: 看涨期权价格与执行价格的关系

复合期权是期权的期权. Geske [9] 研究了复合看涨期权的定价问题. 在 B-S 框架下, 即完备市场中, 股票价格服从几何布朗运动, 且股票价格的波动率是常数, 无风险利率也是常数, 给出了复合看涨期权精确的定价公式. 直到最近, Elettra and Rossella [10] 推广了 Geske 公式, 给出了当股票价格的波动率和无风险利率均是时间依赖的情况下的定价公式.

然而上面给出的关于利率的假设是不够的, 实际中既然投资机会可能是长久的, 利率就应该是随机的. 因此考虑在利率随机条件下复合期权的定价问题是非常必要的.

本文利用测度变换, 在随机利率条件下, 首先得到了复合看涨期权的一般的定价公式; 接着, 在假定利率服从扩展的 Vasicek 模型的条件下, 利用 Girsanov 定理, 获得了复合看涨期权和有一个预设日期的重置看涨期权的精确定价公式. 从文中可以看出, 在定价奇异期权时, 测度变换是非常必要的, 且 Girsanov 定理是一种非常重要的工具, 选择合适的计价单位会简化期权定价问题的计算且能够获得精确的定价公式.

**致谢** 感谢 2007 年度浙江省博士后科研项目择优资助给予的一等资助, 也非常感谢审稿人指出了参考文献 [11] 和提出一些有价值的修改建议, 使得本文有了长足的改进.

## 参 考 文 献

[1] Brealey R., Myerss S. C., In: Principles of corporate finance, New York: McGraw-Hill, 1991.
[2] Geske R., Johnson H. E., The valuation of corporate liabilities as compound options: a correction, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1984, **19**(2): 231–232.
[3] Trigeogis L., In: Real options, Managerial Flexibility and strategy in resource allocation, MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
[4] Cheng W., Zhang S., The analytics of reset options. *The Journal of Derivatives*, 2000, Fall: 59–71.
[5] Gray S., Whaley R., Reset Put options: valuation, Risk charateristics, and an application, *Austrilian Journal of Management*, 1999, **24**: 1–20.
[6] Nelken I., Reassessing the reset, *Risk*, 1998, October: 36–39.

[7] Gray S. F., Whaley R. E., Valuing bear market reset warrants with a periodic rest, *Journal of Derivatives*, 1997, **5**(1): 99–106.

[8] Black F., Scholes M., The valuation of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 1973, **8**: 637–659.

[9] Geske R., The valuation of compound options, *Journal of Financial Economics*, 1979, **7**: 63–81.

[10] Elettra A., Rossella A., A generalization of the Geske formula for compound options, *Mathematical Social Sciences*, 2003, **45**: 75–82.

[11] Frey R., Sommer D., The generalization of the Geske-formula for compound options to stochastic interest rates is not trivial—a note, *J. Appl. Prob.*, 1998, **35**: 501–509.

[12] Geman H., Karoui N. EL., Rochet J. C., Change of numéraire of probability measure and option pricing, *Journal Application Probability*, 1995, **32**: 443–458.

[13] Amin K. I., Bodurtha J. Jr., Discrete-time valuation of American options with stochastic interest rates, *Review of Financial Studies*, 1995, **8**: 193–234.

[14] Amin K. I., Jarrow R., Pricing foreign currency options under stochastic interest rates, *Journal of International Money and Finance*, 1991, **10**: 310–329.

[15] Li S. J., Li S. H., Pricing American interest options on zero-coupon bond numerically, *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**: 834–850.

[16] Li S. J., Li S. H., Foreign currency options pricing with proportional transaction costs, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2006, **21**(4): 383–396.

[17] Merton R. C., Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics*, 1973, **4**: 141–183.

[18] Vasicek O., An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 1977, **5**: 177–188.

[19] Li Y. Q., Wang S., Hu Y. L., Relationships among markov Chains in random environments and jiont Markov Chains, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(6): 1373–1380.

[20] Ma Y. T., Song Q. X., Moderate deriation for Lipschitzian additive functionals of Markov Processes, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2007, **50**(1): 33–42.