REMARQUES SUR LES QUADRIQUES ASSOCIÉES AUX POINTS D'UNE SURFACE

PAR LUCIEN GODEAUX

On sait que Lie a attaché à tout point d'une surface (x) une quadrique osculatrice appelée quadrique de Lie(1). Nous avons montré que cette quadrique est la première d'une suite de quadriques Φ, Φ_1, . . . attachée intrinsèquement à tout point x de la surface (x), deux quadriques consécutives de cette suite se touchant en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques en question(2).

Dans une série de mémoires intéressants sur les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires, M. Buchin Su a introduit une quadrique, attachée au point x de la surface (x), qu'il appelle quadrique associée(3). Dans cette courte note, nous nous proposons de montrer que la quadrique associée de M. Buchin Su n'est autre que la seconde quadrique Φ_1 de notre suite, quadrique dont on possède ainsi une nouvelle définition. Cela nous permet de montrer l'identité d'une condition caractéristique des surfaces minima-projec-

---

(1) Voir Demoulin, Sur la théorie des lignes asymptotiques, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 413-415; Sur quelques propriétés des surfaces courbes, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 565-568; Sur la quadrique de Lie, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 493-496.

(2) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, (V) **13** (1927), 812-826; **14** (1928), 31-41; *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Paris, Hermann (1934).

(3) On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes, *Tôhoku Math. Journal*, **40** (1935), 408-420; 433-448; **41** (1935), 1-19; 203-215; *Science Reports of the Tôhoku Imp. University*, (I) **24** (1936), 601-633; 633-642; On certain pair of surfaces. *University of Chekiang, Science Reports*, **2** (1936), 39-51.

tives, indiquée par M. Buchin Su, avec une condition que nous avions donnée antérieurement.

1. Soit (x) une surface non réglée de l'espace ordinaire, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système complètement intégrable(¹)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

a, b étant des fonctions de u, v non identiquement nulles.

A un point x non parabolique de la surface (x), attachons le tétraèdre de Cartan ayant pour sommets les points

$$x, \quad m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$$

et les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 sont appelées coordonnées locales de ce point.

La quadrique de Lie Φ, attachée au point x, a pour équation locale

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Les points caractéristiques de Φ sont le point x et les sommets du quadrilatère de Demoulin. Posons

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2)$$

et désignons par ξ, η des racines des équations

(¹) Nous posons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Les arètes du quadrilatère de Demoulin ont pour équations

$$\left.\begin{aligned} z_1 + \xi z_2 = 0, \quad z_3 - \xi z_4 = 0, \\ z_1 - \xi z_2 = 0, \quad z_3 + \xi z_4 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 + \eta z_3 = 0, \quad z_2 - \eta z_4 = 0, \\ z_1 - \eta z_3 = 0, \quad z_2 + \eta z_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Une quadrique circonscrite au quadrilatère de Demoulin a pour équation locale

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2 + \lambda (z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0. \tag{3}$$

2. Les tangentes aux asymptotiques u, v [5] de la surface (x) sont respectivement les droites xm, xn. Lorsque u varie seul, la droite xm engendre la développable asymptotique S_u et lorsque v varie seul, la réglée gauche asymptotique R_u. Lorsque v varie seul, la droite xn engendre la développable asymptotique S_v et lorsque u varie seul, la réglée gauche asymptotique R_v.

M. Demoulin (loc. cit.) a démontré que les tangentes flecnodales de la réglée R_u sont les droites (1) et celles de la réglée R_v, les droites (2).

Les points flecnodaux situés sur la droites xm sont les points

$$t_{u1} = \xi x - m, \qquad t_{u2} = \xi x + m$$

et les points flecnodaux situés sur la droite xn, les points

$$t_{v1} = \eta x - n, \qquad t_{v2} = \eta x + n.$$

Lorsque v varie seul, le point t_{u1} décrit une ligne flecnodale de la surface R_u; la tangente à cette courbe au point t_{u1} passe par le point

$$(2 \xi^{01} + 2 k_1) x - \xi n - y,$$

où l'on a posé

$$k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

---

(5) **Nous appelons ligne u la ligne sur laquelle u varie seul.**

Le plan tangent à la quadrique (1) au point t_{u1} a pour équation

$$\xi(2z_1 + \lambda z_4) - 2\alpha z_2 - \lambda z_3 = 0. \tag{4}$$

En exprimant que ce plan contient le point dont il vient d'être question, on trouve que la quadrique du faisceau (3) tangente en t_{u1} à la courbe décrite par ce point lorsque v varie, est la quadrique de Lie. La symétrie de l'équation de cette quadrique permet de conclure que c'est la quadrique du faisceau (3) tangente aux lignes flecnodales des réglées R_u, R_v.

3. Lorsque u varie seul, le point t_{u1} décrit, sur la développable S_u, une courbe ~~dont~~ la tangente en t_{u1} passe par le point

$$[2\xi^{10} + \xi(\log a)^{10}]x + (\log a)^{10}m + 4bn.$$

La condition pour que ce point appartienne au plan (4) est

$$2b\lambda - \alpha(\log a^2\alpha)^{10} = 0.$$

Par conséquent la quadrique du faisceau (3) tangente en t_{u1} à la courbe décrite par ce point lorsque u varie seul a pour équation

$$2b(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - \alpha(\log a^2\alpha)^{10}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0. \tag{5}$$

Cette quadrique est également tangente au point t_{u2} à la courbe décrite par ce point lorsque u varie.

Nous avons d'autre part établi la relation

$$a\alpha(\log a^2\alpha)^{10} = b\beta(\log b^2\beta)^{01}.$$

L'équation de la quadrique (5) peut donc également s'écrire

$$2a(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - \beta(\log b^2\beta)^{01}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

La quadrique (5) est donc également tangente aux points t_{v1}, t_{v2} aux courbes décrites par ces points lorsque v varie.

La quadrique (5) est d'une part la *quadrique associée* de M. Buchin Su, d'autre part la seconde quadrique Φ_1 de la suite que nous avons attachée au point x de la surface (x). Parmi les huit points caractéristiques de la quadrique Φ_1, se trouvent les quatre sommets du quadrilatère de Demoulin.

4. La polaire conjuguée de la quadrique (5) par rapport à la quadrique de Lie a pour équation

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \lambda(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (5) soit autopolaire par rapport à la quadrique de Lie Φ est que l'on ait l'une des deux relations équivalentes(6)

$$(\log a^2 \alpha)^{10} = 0, \quad (\log b^2 \beta)^{01} = 0.$$

Sous cette condition, nous avons montré qu'il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie, c'est-à-dire que la surface (x) est minima projective(7).

Liége, Université, le 13 mai 1936

(Reçu le 12, Juin, 1936)

(6) Voir notre note Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, (V) **15** (1929), 37-53.

(7) Sur les directrices de Wilczynski et les quadriques de Lie d'une surface, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, **15** (1929), 126-133.