2.5D-FDTD 数值算法的建立和模拟

邓 薇, 王绪本, 李文超, 毛立峰 (成都理工大学,成都 610059)

摘 要 本文提出并建立了 2.5D-FDTD 数值分析方法;通过与解析解及常规 FDTD 算法的比较,验证了该算法的正确性,显示了该算法的优越性;通过加入三维矩形口径面超宽带天线,实现了对地下埋藏目标体的识别,进一步说明 了该方法的可行性和实用性.

关键词 2.5 维,时域有限差分,矩形口径,超宽带天线

中图分类号 P391 文献标识码 A 文章编号 1004-2903(2008)02-0082-07

The establishing and simulation of 2. 5D-FDTD numerical algorithm

DENG Wei, WANG Xu-ben, LI Wen-chao, Mao Li-feng

(Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract This paper proposes and establishes the 2.5 dimension finite difference time domain(2.5D-FDTD) numerical analysis method. The comparision with analytical solution and conventional FDTD algorithm, confirms the correctness of the 2.5D-FDTD algorithm and shows the superiority. Simulation which applies the three-dimensional rectangular aperture Ultra wideband(UWB) transmitting antenna, realizes the identification of the buried object, and further proves the feasibility and usability of the 2.5D-FDTD algorithm.

Keywords 2.5D,FDTD, rectangular aperture, UWB antenna

0 引 言

随着 FDTD 这种方法在电磁仿真领域的广泛 使用,各种二维、三维地质构造、光子晶体、波导的模 拟仿真相继出现.二维 FDTD 算法虽然简单,但在 某些方面不能完整,准确地反映地质构造或埋藏目 标体的特征信息;三维 FDTD 算法能弥补二维 FDTD 算法的不足,但对计算机的内存要求很大,而 且很耗用计算时间,使得其实用化受到约束.实际生 活中有很多的情况采用完全的三维数值模拟是没有 必要的,因为存在对某一维的研究是没有意义的或 是在某一维上研究对象的性质是近似不变的.比如: 沿走向的电导率等电性质变化很小的地电构造;地 下管道、电缆线、地下水沟等目标的尺寸相比发射天 线可以认作是无限长的,而发射源是三维的.以上情 况,我们只需考虑"2.5维"就能解决问题.所谓的 2.5维就是三维源,二维结构.

对于 2.5 维问题的研究,国外 Coggon-Rijo 研 究了的二维地电条件下点源场的有限元算法,Dey 和 Morrison 研究了二维地电构造上点电流源场的 有限差分算法,国内底青云等人采用 2.5 维有限元 法实现了 CSAMT 数值模拟,但至今还没有见到系 统的 2.5D-FDTD 算法的建立和模拟.本文系统地 讲述了 2.5D-FDTD 算法,首先建立了 2.5D-FDTD 算法,接着论证了它的正确性,第三节进行了 2.5D-FDTD 数值算法的模拟,最后指出该算法的优越性.

1 2.5D-FDTD 算法的建立

1.1 2.5D-FDTD 迭代公式的推导

Maxwell 旋度方程:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial D}{\partial t} + \boldsymbol{J} , \qquad (1)$$

收稿日期 2007-03-10; 修回日期 2007-06-20.

基金项目 国家自然科学基金项目(40374027)资助.

作者简介 邓薇,女,1983年生,汉族,成都理工大学信息工程学院硕士研究生,研究方向:超宽带电磁场 FDTD 数值模拟.联系地址:成都 理工大学地球探测与信息技术重点实验室.(E-mail:dld-88@163.com)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - J_m , \qquad (2)$$

其中 E 为电场强度,单位为伏特/米(V/m),D 为电 通量密度,单位为库仑/米 2 (C/m²),H 为磁场强 度,单位为安培/米(A/m),B 为磁通量密度,单位为 韦伯/米²(Wb/m²),J 为电流密度,单位为安培/米² (A/m²), J_m 为磁流密度,单位为伏特/米²(V/m²). 各向同性介质中的本构关系为

D = ε**E**, **B** = μ**H**, **J** = σ**E**, **J**_m = σ_m**H**, (3) 其中 ε 表示介质介电系数,单位为法拉/米(F/m);μ 为磁导系数,单位为亨利/米(H/m);σ 为电导率,单 位为西门子/米(S/m);σ_m 为磁导率,单位为欧姆/ 米(Ω・m).σ 和σ_m 分别为介质的电损耗和磁损耗. 本文模拟的为非磁损耗介质所以 σ_m = 0. 真空中 σ=0,ε₀ = 8.85×10⁻¹² (F/m), μ₀ = 4×π×10⁻⁷ (H/m).

为了简述推导,这里仅给出 E_y , H_x 的2.5 D FDTD迭代公式的推导过程,其他场分量的推导方 法一样.首先将(1)、(2)式变换到直角坐标系中,其 中含 E_y , H_x 分量的公式为

$$\varepsilon \, \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \,, \tag{4}$$

$$-\mu \frac{\partial \overline{H}_x}{\partial t} - \rho H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$
 (5)

在三维 PML 介质中,每个场分量分解为两个 子分量,通常波方程中的 6 个场分量在 PML 介质 中分解为 12 个子分量,记为

$$E_{x} = E_{xy} + E_{xz}, E_{y} = E_{yx} + E_{yz},$$

$$E_{z} = E_{zy} + E_{zx}, H_{x} = H_{xy} + H_{xz},$$

$$H_{y} = H_{yz} + H_{yx}, H_{z} = H_{zx} + H_{zy}.$$

为了统一理解,我们将真空中的场分量也写成三维 PML介质中的形式,于是(4)、(5)式变为以下公式

$$\varepsilon \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} , \qquad (6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial (H_{xy} + H_{yz})}{\partial z} , \qquad (7)$$

$$\mu \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_{my} H_{xy} = -\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} , \qquad (8)$$

$$\mu \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_{mz} H_{xz} = \frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial z}.$$
 (9)

通 过 三 维 FDTD 模 型 验 证 得 到: $E_y(x,y,z,t)$, $E_x(x,y,z,t)$, $E_z(x,y,z,t)$, $H_x(x,y,z,t)$, $H_y(x,y,z,t)$, $H_z(x,y,z,t)$ 分别 为关于 y 方向的偶、奇、偶、奇、偶对称. 于是, 对 公式(5)中的每一个等式两边进行傅立叶变换, 傅立 叶变换因子为: $e^{-i\lambda_y y}$,其中 λ_y 为y方向的波数,利用欧拉公式

$$e^{-j\lambda_{y}y} = \cos(\lambda_{y}y) - j\sin(\lambda_{y}y) . \qquad (10)$$

将傅立叶变换因子展开,可简化为相应的正弦 变换或是余弦变换形式.令

$$\widetilde{F}_{e}(x,\lambda_{y},z,t) = \sum_{0}^{\infty} F_{e}(x,y,z,t) \cos(\lambda_{y}y) \Delta y ,$$
(11)

$$\widetilde{F}_{o}(x,\lambda_{y},z,t) = \sum_{0}^{\infty} F_{o}(x,y,z,t) \sin(\lambda_{y}y) \Delta y ,$$
(12)

其中 F 表示 E 或者 H 场量,下角标 e, o 分别表示场 分量的偶、奇对称性.

将(11),(12)式代入正余弦变换结果,得到(6-9)式的波数域方程如下:

$$\varepsilon \frac{\partial \widetilde{E}_{yz}}{\partial t} + \sigma_z \widetilde{E}_{yz} = \frac{\partial (\widetilde{H}_{yx} + \widetilde{H}_{yz})}{\partial z} , \qquad (13)$$

$$\varepsilon \, \frac{\partial \, \widetilde{E}_{yx}}{\partial t} + \sigma_x \, \widetilde{E}_{yx} = - \, \frac{\partial (\widetilde{H}_{zx} + \widetilde{H}_{zy})}{\partial x} \,, \qquad (14)$$

$$\mu \frac{\partial \widetilde{H}_{xy}}{\partial t} = -\lambda_y \widetilde{E_z} , \qquad (15)$$

$$\mu \frac{\partial \widetilde{H}_{xz}}{\partial t} + \sigma_{mz} \widetilde{H}_{xz} = \frac{\partial (\widetilde{E}_{yx} + \widetilde{E}_{yz})}{\partial z}.$$
 (16)

将以上四式利用中心差分离散,得到 2.5D-FDTD的迭代公式如下

$$\widetilde{\widetilde{E}}_{yz}^{n+1}(x,\lambda_{y},z) = \frac{1 - \frac{\Delta t\sigma_{z}}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t\sigma_{z}}{2\varepsilon}} \widetilde{\widetilde{E}}_{yz}^{n}(x,\lambda_{y},z) + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{(1 + \frac{\Delta t\sigma_{z}}{2\varepsilon})\Delta z} (\widetilde{H}_{yx}(x,\lambda_{y},z) - \widetilde{H}_{yz}(x,\lambda_{y},z-1) + \widetilde{H}_{yz}(x,\lambda_{y},z) - \widetilde{H}_{yz}(x,\lambda_{y},z-1)), \qquad (17)$$

$$\widetilde{E}_{yx}^{n+1}(x,\lambda_{y},z) = \frac{1 - \frac{\Delta t \sigma_{x}}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t \sigma_{x}}{2\varepsilon}} \widetilde{E}_{yx}^{n}(x,\lambda_{y},z)$$

$$+\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{(1+\frac{\Delta t\sigma_{x}}{2\varepsilon})\Delta x}(\widetilde{H}_{zx}(x,\lambda_{y},z)$$
$$-\widetilde{H}_{zx}(x-1,\lambda_{y},z)+\widetilde{H}_{zy}(x,\lambda_{y},z)$$
$$-\widetilde{H}_{zy}(x-1,\lambda_{y},z)), \qquad (18)$$
$$\widetilde{H}_{xy}^{n+0.5}(x,\lambda_{y},z)=\widetilde{H}_{xy}^{n}(x,\lambda_{y},z)$$

$$-\frac{\lambda_{y}\Delta t}{\mu}\widetilde{E_{z}}^{n}(x,\lambda_{y},z) , \qquad (19)$$

$$\widetilde{H}_{xz}^{n+0.5}(x,\lambda_{y},z) = \frac{1 - \frac{\Delta t\sigma_{mz}}{2\mu}}{1 + \frac{\Delta t\sigma_{mz}}{2\mu}} \widetilde{H}_{xz}^{n}(x,\lambda_{y},z)$$

$$+\frac{\frac{\Delta t}{\mu}}{\Delta z(1+\frac{\Delta t\sigma_{mz}}{2\mu})}(\widetilde{E}_{yx}(x,\lambda_{y},z))$$
$$-\widetilde{E}_{yx}(x,\lambda_{y},z-1)+\widetilde{E}_{yz}(x,\lambda_{y},z)$$
$$-\widetilde{E}_{yz}(x,\lambda_{y},z-1)). \qquad (20)$$

1.2 2.5D-FDTD 源的加入方式

3D-FDTD 模型中,将 y 方向的电流源置于 (*x*_x, *y*_x, *z*_x)节点上,即

$$J_{y}(x,y,z,t) = \mathbf{I}(t)\delta(x-x_{s})\delta(y-y_{s})$$
$$\times \delta(z-z_{s}). \qquad (21)$$

将 J_y(x,y,z,t) 加在(4)式得左边.

2.5D-FDTD 模型中,将y方向的电流源置于
 (x_s, z_s)节点上,

$$\widetilde{J}_{y}(x,\lambda_{y},z,t) = \mathbf{I}(t)\delta(x-x_{s})\delta(z-z_{s})$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-y_{s}) \cos(\lambda_{y}y) dy, \qquad (22)$$

即

 $F_{a}(x$

$$\tilde{I}_{y}(x,\lambda_{y},z,t) = \mathbf{I}(t)\delta(x-x_{s}) \\ \times \delta(z-z_{s})\cos(\lambda_{y}y_{s}) . \quad (23)$$

将 $\tilde{J}_{y}(x_{s},\lambda_{y},z_{s},t)$ 加在(17),(18)式的右边即 实现了源的加入.

1.3 2.5D-FDTD 算法中二维电磁场值到三维电磁 场值的转化

由(17~20)式计算得到的沿 y 方向的一系列离 散波数的场 $\tilde{F}(x,\lambda_y,z,t)$ 后(F 表示 E 或者 H 场 量),进行反傅氏变换就可以得到三维空间域的场 值.

$$F(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}(x,\lambda_y,z,t) e^{i\lambda_y y} \Delta \lambda_y ,$$
(24)

根据 $\widetilde{F}(x,\lambda_y,z,t)$ 的奇偶对称性,(24)式可以 化为:

$$F_{e}(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda_{y}=0}^{N} \widetilde{F}_{e}(x,\lambda_{y},z,t) \\ \times \cos(\lambda_{y}y) \Delta \lambda_{y} , \qquad (25)$$

 $\times \sin(\lambda_{y} y) \Delta \lambda_{y} . \tag{26}$

通常我们只计算和供电点在同一断面,即主剖面内节点的电场值,此时y = 0,在此情况下,(25)、(26)式简化为:

$$F_{e}(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda_{y}=0}^{N} \widetilde{F}_{e}(x,\lambda_{y},z,t) \Delta \lambda_{y} , (27)$$

$$F_o(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda_y=0} \widetilde{F}_o(x,\lambda_y,z,t) \Delta \lambda_y , (28)$$

其中角标为 e 时表示偶函数,角标为 o 时表示为奇 函数,N 表示截断波数值.

2 2.5D-FDTD 数值算法正确性的验证

为了验证 2.5D-FDTD 的正确性,本文建立了 计算区域为 $34 \times 34 \times 34$ 个元胞的三维空间域模型, 和在 y 方向无限长的 34×34 的二维区域模型,采用 PML 吸收边界,元胞尺寸为 5 cm×5 cm×5 cm,即 $\Delta=5$ cm,按 $\Delta=2c\Delta t$ 算得 $\Delta t=83.333$ ps. 在(0,0, 0),(0,0)点加入电偶极子源,观测点分别取在(0,0, 10)点和(0,10)点.2.5D-FDTD 算法中公式(27)、 (28)中的 N=16. 电磁场中某点的解析解由公式 (29)给出^[5]:

$$E(r,t) = \frac{\mu}{4\pi r} \left\{ e_r \left[\frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{r^2} \right] 2\cos\theta + e_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{r^2} \right] \sin\theta \right\} \times p(t - \frac{r}{c}) .$$
(29)

电流和电偶极矩的关系为:

$$\mathbf{I}(t) = \frac{\partial p}{\partial t} l , \qquad (30)$$

其中 r 表示电偶极子到观测点的位置失量, c 为光速, p 为电偶极矩, θ 为位置失量与电偶极矩的夹角, l 为电偶极子两个电荷间距离.

计算中电流源采用超宽带信号:微分高斯脉冲, 其时域表达式如下:

$$\mathbf{I}(t) = C_0 \, \frac{(t - 3T) \cdot \mathrm{e}^{(-\frac{(t - 3T)^2}{T^2})}}{T^2} \,, \qquad (31)$$

其中 T=2 ns, $C_0 = -2 \times 10^{-10}$.中心频率为 $f_M:0$. 12 GHz.低频为:0.054 GHz,高频为: $f_H=0$.186 GHz.带宽为:0.132 GHz,百分带宽为:110%.其相应的时间域和频谱域波形如图 1 所示.

图 2 给出了观测点处 2.5D-FDTD,3D-FDTD, 以及解析解 y 方向电场强度幅值的比较.

$$(y,z,t) = rac{1}{\pi} \sum_{\lambda_y=0}^{N} \widetilde{F}_o(x,\lambda_y,z,t)$$







Fig. 2 The amplitude of dipole radiation electric intensity at observation point

为了进一步说明 2.5 维方法的正确性,公式 (32)给出了 2.5D-FDTD 与解析解的时域误差公式,图 3 给出了观测点处 2.5D-FDTD(N=16)与解 析解的时域误差.

$$E_{r}f(t) = 20\log_{10} \frac{\left|\widetilde{E}_{2.5}(t) - E_{ref}(t)\right|}{\left|E_{refmax}(t)\right|}, \quad (32)$$

在数值模拟的过程中,波数值的选取发挥了至 关重要的作用,它影响了模拟结果的精确程度.为了 说明电场强度随截断波数值的变化情况,这里给出 了选取不同 N 时,观测点电场强度变化的时域波 形,如图 4,可以看出,在 N < 16 时,随着 N 的增大, 数值模拟解更趋近于解析解,在 N = 16 时,2.5D-FDTD 数值解与解析解吻合的最好,对数误差值在 $-10 \sim -60$ dB 之间; N > 16,电场强度的误差值 增大.实验证明 N = 16 时 2.5D-FDTD 数值解同解 析解最逼近.







3 2.5D-FDTD 数值算法的模拟

本论文在验证 2.5D-FDTD 方法正确性的基础 上,将模型改变为空气-土壤分层,土壤相对介电常 数为: $\epsilon_r = 9$,电导率为: $\sigma = 0.001$ s/m,下半空间 含异常体的三维 FDTD 模型和 2.5 维 FDTD 模型. 异常体的相对介电常数为: $\epsilon_r = 25$,电导率为: $\sigma = 5$ s/m,它在三空间域的位置是 $x \in (-4,4)$, $y \in (-4,4), z \in (-10, -4)$, 在 2.5 维模型中的 位置为: $x \in (-4,4), z \in (-10, -4)$,模型示意图 如图 5、图 6.



图 5 3D-FDTD 计算模型 Fig. 5 3D-FDTD calculation model



图 6 2.5D-FDTD 计算模型 Fig. 6 2.5D-FDTD calculation model

在三维模型中激励源的加入是长为4个元胞,宽 为4个元胞的超宽带天线矩形口径面辐射器,超宽 带天线矩形口径面辐射器如图7所示;2.5维模型 中超宽带天线矩形口径面辐射器等效为如图8所示 的形式.图中红点是辐射源所在位置.

图 9、图 10 分别为图 5 和图 6 所示 FDTD 计算 模型的 Ey 在 y=0(主剖面),T=200 * 83.333E-12 时刻的波场快照.





图 8 2.5D 超宽带天线矩形口径面辐射器 Fig. 8 2.5D UWB antenna rectangular aperture radiator





Fig. 10 2.5D wave snapshot of E_y at T=200 step

可以看出,3D-FDTD 模型的数值模拟结果和 2.5D-FDTD 模型的数值模拟结果是吻合的;2.5D-FDTD 计算方法可以模拟具有三维发射源,二维地 质构造特征的模型.从图中我们可以比较清晰的看 出异常体的位置、形状,空气一土壤的分界面,图中 的深灰度值为遇到异常体产生的"二次波源"的电场 强度值.这说明了 2.5D-FDTD 替代 3D-FDTD 算 法的可行性和实用性.

4 2.5D-FDTD 数值算法的优点

前面论证了 2.5D FDTD 这种方法的正确性和 可行性,那这种方法相比其他的数值模拟方法到底 有什么优点?

本文通过方法本身的特点以及建立的模型所需 的计算机内存量和模拟的耗时来说明问题.

4.1 2.5D-FDTD 与 3D-FDTD 计算内存估计比较

设电磁波各场分量以单精度变量计算,每个变 量占内存 4 字节(Bvte). 对 3D-FDTD 和 2.5D-FDTD 计算所需内存量的估计如下:三维 FDTD 区 域元胞总数为 34×34×34, 2.5 维 FDTD 区域的元 胞总数为 34×34. 本文采用的 PML 吸收边界条件, 在吸收边界内各场分量分解为两个子分量,同时将 PML 吸收边界分为 8 个不同区域分别处理,最后 3D-FDTD 所需内存为:6×34×34×34×4+12× $(34 \times 34 - 24 \times 24) \times 4$,即:971136Byte:2.5D-FDTD 所需内存为:6×34×34×4+12×(34×34-24×24)×4,即:55584 Byte. 这里忽略一些辅助变 量,系数变量和计算中间变量所需的内存量.明显, 3D-FDTD 所占内存量比 2.5D-FDTD 大 915552 Byte,而且随着建立模型的尺寸加大、元胞总数的增 加,2.5D-FDTD 相对 3D-FDTD 会大大节省内存的 占有量.

4.2 2.5D-FDTD 与 3D-FDTD 计算时间比较

2.5D-FDTD 和 3D-FDTD 模型的时间步都为: $\Delta t = 83.333e - 12$,对于本文中建立的两种模型而 言,其总耗时分别为:1 分零 3 秒,两分 20 秒.可见 对于处理同种问题,2.5D-FDTD 的运算时间比 3D-FDTD 节省一半多的时间,而且随着计算区域的加 大,两者运算时间的差距会越来越大.

4.3 2.5-FDTD 方法本身的特点

FDTD 这种方法是目前广泛应用于电磁仿真的 一种简单有效的数值模拟方法.它能解决某些无法 获得解析解的复杂几何结构的电磁问题,在一定的 体积和一段时间上对连续电磁场的数据取样,能更 直观的反映电磁波在各种地质构造中的传播特点以 及波同不同形状的异常体之间的相互作用的物理讨 程,所以这种 FDTD 方法具有有限元法,解析法,有 限差分等方法所不具备的优越性,同时,在实际生活 中,我们常常会遇到很多三维发射源,二维地质构造 的情形,即是说:在地质走向的方向上没有发生或是 发生很小的电性质的差异,也有的,研究的埋地目标 的长度相对于发射源的尺寸而言是无限长的,或是 某一维的研究是没有意义的.在诸如此类的情况下, 采用 2D-FDTD 建模不能完整的反映地质信息,用 3D-FDTD 能全面多方位的反映问题,但是以牺牲计 算机内存和运算时间为代价的,特别是研究有些电 大尺寸的物体,对计算机内存的需求量是可观的,有 的小型计算机无法运算出结果来,其时间的消耗量 也很大.2.5D-FDTD 结合了 2.5D 和 FDTD 方法的 优点,能简单有效的反映问题,获得研究对象的主要 信息,又能节省计算内存量和运算时间.2.5D-FDTD 在今后不仅仅局限于对具有三维源,二维"地 质构造"的地层研究,还可以应用于有类似情形的不 同尺寸大小的光子晶体、光波导等的研究.我们还可 以优化吸收边界条件来进一步减少内存的占有量, 模型的运算时间,提高计算结果的精确度,更有效方 便的对各种大小、形状的物体进行研究.

5 结 论

本文介绍了 2.5 维问题的存在及发展过程,接着用 FDTD 这种简单有效的数值模拟方法作为工 具,建立 2.5 维和 3 维 FDTD 模型,论证了 2.5 维 FDTD 这种方法的正确性.并引入了三维矩形口径 超宽带天线,用 2.5D-FDTD 数值算法对三维地质 构造主剖面的电场强度成像,实现了对地下埋藏目 标的识别,再次证实了该方法的可行性和实用性.与 传统 FDTD 方法,其它数值模拟方法的比较,体现 了 2.5D-FDTD 节省计算内存占有量、运行时间短、 模型易于修改、能够解决特殊问题的优点,为今后作 更深层次的研究打下了基础.

致 谢 在成文过程中作者与景涛研究员进行过多 次有益的讨论,在此表示感谢.

参考文献(References):

- Leppin M. Electromagnetic modeling of 3-D sources over 2-D inhomogeneties in the time domain[J]. Geophysics, 1992, 57: 994~1003.
- [2] Unsworth MJ, Traves BJ, Chave A D. Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth[J]. Geophysics, 1993,58: 198~214.
- [3] Everett M E , Edwards R N. Transient marine electromagnetics : the 2. 5-D forward problem [J]. Geophys. J. Int., 1993, 113: 545~561.
- [4] Zhao G, Liu Q H. "The 2. 5-D multidomain pseudospectral time-domain algorithm," IEEE Trans[J]. Antennas Propagat., 2003,51(3):619~627.
- [5] Liu Q H. "The PSTD algorithm: A time-domain method requiring only two cells per wavelength" [J]. Microwave Opt Technol Lett, 1997, 15(18):158~165.
- [6] Zhao G, Liu Q H. The 2. 5-D multidomain pseudospectral time-domain algorithm, Antennas and Propagation[J]. IEEE Transactions on, 2003, 51(3):619~ 627.
- [7] Tang Z B, Liu Q H. The 2. 5D pseudospectral time-domain (PSTD) algorithm with PMLabsorbing boundary condition, Antennas and Propagation Society International Symposium
 [J]. IEEE, 1998,3(1):1496~1499.
- [8] 葛德彪,闫玉波.电磁波时域有限差分方法(第二版)[M].西 安:西安电子科技大学出版社,2005.
- [9] 罗延钟,张桂青.电子计算机在电发勘探中的应用[M].武汉: 武汉地质学院出版社,1987.
- [10] 罗延钟,孟永良.关于用有限单元法对二维构造作电阻率法 模拟的几个问题[J].地球物理学报,1986,29:613~621.
- [11] 熊彬.关于瞬变电磁法 2.5 维正演中的几个问题[J]. 物探化 探计算技术,2005,28(2):124~128.
- [12] 底青云, Martyn Unsworth, 等. 有限元法 2.5 维 CSAMT 数 值模拟[J]. 地球物理学进展, 2004, 19 (2): 317~324.
- [13] 周熙襄,钟本善,严忠琼,江玉乐.点源二维有元技术应用的 若干问题[J].物探化探计算技术,1985,7(3):226~233.
- [14] 吕玉增, 阮百尧. 复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限 元数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(4): 1302~1308.
- [15] 冯德山,戴前伟,何继善,何刚. 探地雷达 GPR 正演模拟的时域有限差分实现(英文)[J]. 地球物理学进展,2006,21(3): 630~636.
- [16] 刘地渊,徐凯军,赵广茂,李桐林.任意形状线电流源三维地电场研究[J]. 地球物理学进展,2006,21(2):395~399.
- [17] 陈颙,张尉,陈汉林,齐诚,陈棋福.地震雷达[J]. 地球物理学 进展,2006,21(1):1~5.