

# 内核地球自转动力学理论的研究进展(VI) ——章动转换函数和内核的动力学效应

张捍卫<sup>1,2</sup>, 许厚泽<sup>3</sup>, 王爱生<sup>3</sup>

(1. 中国科学院国家天文台/云南天文台, 昆明 650011; 2. 徐州师范大学物理系, 徐州 221116;  
3. 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077)

**摘要** 本文是序列文章的第六篇, 其主要内容包括: 讨论了两种章动转换函数表达式以及它们系数之间的关系, 指出了前人给出系数值的缺陷, 以及某些公式表述的错误; 基于内核地球模型的有关参数, 利用 Mathematica 数学分析软件计算了 PREM 和 1066A 地球模型在 FULL 理论、MTIC 和 FIC 近似下的章动本征模频率和章动转换函数的有关系数; 计算了内核动力学对受迫章动的影响, 结果表明其影响已在目前 VLBI 可检测的量级内. 本文对地球章动转换函数进行了较完整的论述, 期望对进一步研究地球自转动力学起重要作用.

**关键词** 地球自转, 受迫章动, 简正模展开式, 内核动力学

中图分类号 P631 文献标识码 A 文章编号 1004-2903(2007)02-0422-05

## The researchful progress in dynamical theory of Inner core Earth rotation (VI)——The transfer function for nutations and dynamical effect of inner core

ZHANG Han-wei<sup>1,2</sup>, XU Hou-ze<sup>3</sup>, WANG Ai-sheng<sup>3</sup>

(1. National Astronomical Observatories / Yunman Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming 650011, China;  
2. Department physics, Xuzhou normal university, Xuzhou 221116, China;  
3. Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China)

**Abstract** This paper is the sixth section of the serial articles, it's primary contents included: Two different normal mode expansions and the relations between the various coefficients in the expansions are discussed. The deficiencies of the numerical coefficients estimated by a few authors, along with, some errors in description of formulae are pointed out. Based on related parameters of the inner Earth model, normal mode eigenfrequencies and coefficients in transfer function for nutations are calculated, using Mathematica analytical software within the level of FULL theory, FIC and MTIC approximation for the Earth model of PREM and 1066A. the influence of inner core dynamics on nutations are computed, the results indicated that its effect can be perceived from VLBI observations. This paper carry through more full dissertation to transfer function for nutations, is very importance to more studying dynamical theory of the Earth rotation.

**Keywords** Earth rotation, forced nutation, normal mode expansion, influence of inner core dynamics

### 0 引言

VLBI 技术的数据分析表明, IAU1980 章动理论值和观测值之间存在数个毫角秒的差异, 且这种

差异不能通过测量误差来解释. 因此天文学家和大地球测量学家为实现更精确的章动序列做出了不懈的努力, 文献[1~3]和文献[4~5]分别从观测和地球物理两方面进行了探索, 提出了经过改善的章动系

收稿日期 2006-10-10; 修回日期 2006-12-20.

基金项目 江苏省高校自然科学基金项目(06KJB420111)资助.

作者简介 张捍卫, 1967 年 10 月生, 男, 汉族, 辽宁昌图人, 博士后, 教授, 主要从事空间大地测量学和动力大地测量学的理论研究. (E-mail: zhanwei800@163.com)

数,但他们的结果并不完整,也不能自相一致.章动序列的计算依赖于受迫章动的简正模表达式(章动转换函数),简正模表达式涉及到一些系数,包括简正模的本征频率和某些常数.文献[6]研究了地球内核动力学对章动的影响,给出了内核地球模型的章动转换函数.文献[7]详细论述了地球受迫章动不同简正模之间的理论关系,指出了以往某些作者给出的系数值的缺陷.文献[8]研究了由黏性内核、液体外核、滞弹性地幔和固体地壳组成的地球模型的章动转换函数,并考虑了地幔对流、海洋和大气的影 响,最后给出了非流体静力学平衡地球模型的新的章动转换函数.

本文讨论了目前常用的两种章动转换函数表达式以及它们系数之间的关系,利用 Mathematica 数学分析软件重新计算了内核地球模型的章动本征模频率和章动转换函数的有系数,以及内核对受迫章动的影响.

## 1 章动转换函数(简正模)的表达式

在此约定章动频率是在地球参考系中计量,而所谓的顺向章动和逆向章动则表示章动相对惯性空间参考系的运动方向.定义地球平均自转的频率是  $\Omega_0$ ,下面约定章动频率都以  $\Omega_0$  为单位,即摄动频率为  $\omega = -\sigma\Omega_0$ 、本征频率为  $\omega_j = -\sigma_j\Omega_0$ .文献[9]给出的非刚体地球圆章动振幅的表达式是(在此扩展到内核地球模型的情形):

$$\eta(\sigma) = \left[ A_0 + (\sigma_0 - \sigma) \left( \frac{A_T}{1 + \sigma} + \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\sigma - \sigma_j} \right) \right] \left( \frac{iH_2^1(\sigma)}{a} \right), \quad (1)$$

这里  $\sigma_0 = -0.927$  是  $O_1$  分潮波频率,  $H_2^1(\sigma)$  是以米为单位的引潮力位 Doodson 展开的潮波振幅,  $a$  是地球平均球体半径,  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  和  $\sigma_4$  分别是非刚体地球的 Chandler 摆动频率(CW)、近周日自由摆动频率(NDFW)或逆向自由核章动频率(RFCN)、考虑内核后出现的顺向自由核章动频率(PFCN)和内核摆动频率(ICW),  $A_0$ 、 $A_j$  和  $A_T$  是与摄动频率无关的常数,并满足如下的理论关系:

$$\sum A_j + A_T = A_0, \quad (2)$$

其中  $A_T$  的计算公式是

$$A_T = -\frac{k}{(1 + \sigma_0)},$$

$$k = \frac{e}{1 + e} K,$$

$$K = \frac{g}{a} \left( \frac{15}{8\pi} \right)^{0.5} \frac{1}{\Omega_0^2},$$

$$e = \frac{C - A}{A}, \quad (3)$$

这里  $g$  是地球表面平均重力加速度,  $C$ 、 $A$  是平衡地球绕极轴和赤道轴的转动惯量,  $e$  就是整体地球的动力学椭率,文献[9]的取值为:

$$e = 0.003284706,$$

$$a = 6371 \text{ km},$$

$$g = 9.8203 \text{ ms}^{-2},$$

$$\Omega_0 = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4)$$

将(4)代入到(3)式,可得:

$$K = 223.9421,$$

$$k = 0.733176,$$

$$A_T = -10.044. \quad (5)$$

IAU1980 章动理论中计算地球受迫章动的简正模(章动转换函数)表达式是<sup>[9]</sup>:

$$\frac{\eta(\sigma)}{\eta_R(\sigma)} - 1 = \left[ B_0 + (\sigma_0 - \sigma) \cdot \left( \sum_{j=1}^4 \frac{B_j}{\sigma - \sigma_j} + \frac{B'}{e - \sigma} \right) \right] (1 + \sigma)(e - \sigma). \quad (6)$$

这里  $\eta_R(\sigma)$  是刚体地球的圆章动振幅,  $B_0$ 、 $B_j$  和  $B'$  的计算公式是:

$$B_0 = -\left[ \frac{A_0}{k} + \frac{1}{1 + \sigma_0} + \frac{1}{e - \sigma_0} \right] \left( \frac{1}{1 + e} \right),$$

$$B_j = -\frac{A_j}{k(1 + e)} = -\frac{A_j}{K e}, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$B' = \frac{1}{(e - \sigma_0)(1 + e)}. \quad (7)$$

根据(2)、(3)和(7)式,可得

$$\sum B_j - B' = B_0. \quad (8)$$

以上公式(6)~(8)式就是通常采用的章动转换函数表达式,及其系数计算的表达式.

下面进一步把章动转换函数的表达式写成另一种形式.可以把(7)式和(8)式代入到(6)式,可得:

$$\frac{\eta(\sigma)}{\eta_R(\sigma)} = 1 - \frac{1 + \sigma}{1 + e} + \sum_{j=1}^4 \frac{(\sigma_0 - \sigma_j)(1 + \sigma)(e - \sigma)}{\sigma - \sigma_j} B_j. \quad (9)$$

如果令

$$B_j = \frac{R_j}{(e - \sigma_j)(1 + \sigma_j)(\sigma_0 - \sigma_j)}, \quad (10)$$

则(9)式写为

$$\frac{\eta(\sigma)}{\eta_R(\sigma)} = 1 - \frac{1 + \sigma}{1 + e} + \sum_{j=1}^4$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(1+\sigma)(e-\sigma)}{(e-\sigma_j)(1+\sigma_j)} \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)} \\
& = 1 - \frac{1+\sigma}{1+e} + \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{(1+\sigma)(e-\sigma)}{(e-\sigma_j)(1+\sigma_j)} - 1 \right] \\
& \quad \times \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)} + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)} \\
& = 1 - \frac{1+\sigma}{1+e} + \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{-(1+\sigma)(e-\sigma)}{(e-\sigma_j)(1+\sigma_j)} \right] R_j \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)} \\
& = 1 - \frac{1+\sigma}{1+e} - \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{(1+\sigma)}{(e-\sigma_j)(1+\sigma_j)} \right] R_j \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{(1+\sigma_j)} R_j + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)}. \quad (11)
\end{aligned}$$

如果令

$$R = 1 + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{(1+\sigma_j)} R_j, \quad (12)$$

$$R' = -\frac{1}{1+e} - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{(e-\sigma_j)(1+\sigma_j)} R_j, \quad (13)$$

则(11)式写为

$$\frac{\eta(\sigma)}{\eta_R(\sigma)} = R + R'(1+\sigma) + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{(\sigma-\sigma_j)}. \quad (14)$$

显然(14)式就是序列文章 V 的(42)式,也就是文献[6]给出的简正模表达式,它只涉及到 4 个独立的常数  $R_j$ , ( $j=1,2,3,4$ ) 对于给定的地球模型,它们均可计算出来. 同样可见(12)式就是序列文章 V 的(48)式,表明对(14)式的约束条件.

## 2 两种简正模表达式系数之间的关系

文献[6]给出的简正模的表达式是(14)式,文献[9]给出的简正模表达式是(6)式,它们系数之间的关系可从上边的推导中得到,即:

$$R_j = (e-\sigma_j)(1+\sigma_j)(\sigma_0-\sigma_j)B_j, \quad (15)$$

$$R = 1 + \sum_{j=1}^4 (e-\sigma_j)(\sigma_0-\sigma_j)B_j, \quad (16)$$

$$R' = -(e-\sigma_0)B' - \sum_{j=1}^4 (\sigma_0-\sigma_j)B_j. \quad (17)$$

而  $B_0$ 、 $B_j$  和  $B'$  与  $A_0$ 、 $A_j$  和  $A_T$  的关系由(7)式给出.

## 3 内核地球章动本征模频率和转换函数系数的计算

文献[10]给出了 PREM、1066A 地球模型的有

关地球自转参数,根据文献[11]的理论可得某些参数存在以下关系:

$$A_f \chi_{12} = A_f \chi_{21},$$

$$A_f \chi_{23} = A_s \chi_{32}, \quad (18)$$

$$A_s \chi_{31} = A_f \chi_{13},$$

$$\chi_{12} \chi_{23} \chi_{31} = \chi_{21} \chi_{32} \chi_{13}. \quad (19)$$

本文基于文献[10]给出的有关地球自转参数,利用 Mathematica 数学分析软件计算了 PREM 和 1066A 地球模型在 FULL 理论、MTIC 和 FIC 近似下的章动本征模频率,以及章动转换函数(14)式的有关系数,结果列于表 1 中. 为了便于比较,在我们的计算结果下面也列出了文献[10]的计算结果. 毫无疑问,我们在计算过程中没有采取任何近似,基于 Mathematica 数学分析软件计算的结果要比文献[10]在近似下的计算结果要精确的多.

从表 1 中可以看到,在两种地球模型下 PFCN 的频率  $\sigma_3$  与顺向周年潮汐频率相差并不太远,由于其共振系数的微小性( $R_3 \sim 10^{-7}$ ),在任何潮汐频率上它对章动的影响不超过 0.01 mas; 由于 ICW 共振频率在章动序列频谱的边波带上,并且共振系数是  $R_4 \sim 10^{-8}$  量级,所以可以断定在微角秒量级上它对章动振幅无影响. 同时可也可以看到,FIC 近似要比 MTIC 近似更接近 FULL 理论;FIC 和 FULL 的 RFCN 周期只相差 1 天,共振系数的差别是  $3 \times 10^{-7}$ ,尽管如此,RFCN 共振系数的变化以及 PFCN 共振对章动的影响也是不可完全忽略的.

## 4 地球内核的章动效应

依据表 1 计算出的数据,根据(14)式计算在 FULL、MTIC 和 FIC 近似下的  $\eta/\eta_R$ ,然后再乘以已知的刚体地球章动值分别得到相应的表 2 和表 3 (它们分别采用了理论模型值和观测值). 其中第一列是圆章动周期,第二列是完整理论下相应的圆章动振幅值,第三列与第四列分别对应的是 FIC 近似和 MTIC 近似下的圆章动振幅与 FULL 的差值,也就是 FIC 和 MTIC 近似下的内核章动效应. 可以看出表 2 和表 3 的计算结果在 0.1mas 量级上是一致的,FIC 比 MTIC 更接近于完整理论. 内核在亚毫角秒量级上影响章动,最大的是在逆向 18.6 年的周期上,影响大约是 0.4mas. 因此在目前的观测精度上,必须考虑内核对章动的影响.

表 1 本征模频率和共振系数

Table 1 The normal mode frequencies and resonance coefficients

Mode		CW	RFCN	PFCN	ICW	
Frequency, cpsd						
PREM	FULL	0.00248960	-1.00218941	-0.99806210	0.00041399	
		0.0024891	-1.0021882	-0.9979029	0.0004139	
	FIC	0.00248944	-1.00218525			
		0.0024890	-1.0021824			
	MTIC	0.00248740	-1.00217732			
		0.0024869	-1.0021675			
	1066A	FULL	0.00248643	-1.00218161	-0.99805340	0.00054930
			0.0024854	-1.0021816	-0.9980531	0.0005493
FIC		0.00248620	-1.00218161			
		0.0024852	-1.0021755			
MTIC		0.00248405	-1.00217666			
		0.0024831	-1.0021695			
Oscillator Strengths(PREM)						
$R_\alpha$		FULL	-0.000580118	-0.000111314	4.19536E-07	-4.6154E-07
	-0.00058046		-0.00011105	4.8973E-07	-4.6403E-07	
	FIC	-0.000580277	-0.000111651			
		-0.00058061	-0.00011134			
	MTIC	-0.000581366	-0.000109365			
		-0.00058170	-0.00010917			
			R	R'		
	$R, R'$	FULL	1.050480	-0.283497		
1.05041			-0.2836			
FIC		1.050514	-0.283497			
		1.05044	-0.2836			
MTIC		1.049649	-0.283265			
		1.04958	-0.28337			
Oscillator Strengths(1066A)						
$R_\alpha$		FULL	-0.000583514	-0.000110265	4.58202E-07	-9.14382E-08
	-0.00058375		-0.00011021	4.5825E-07	-9.2027E-08	
	FIC	-0.000583757	-0.000110631			
		-0.00058399	-0.00011052			
	MTIC	-0.000584893	-0.0001083			
		-0.00058513	-0.00010824			
			R	R'		
	$R, R'$	FULL	1.050196	-0.284932		
1.05017			-0.2851			
FIC		1.050244	-0.284933			
		1.05022	-0.2851			
MTIC		1.049335	-0.284687			
		1.04931	-0.28485			

表2 内核的章动效应( $e$ , 单位 mas)Table 2 The influence of inner core on nutation ( $e$ , unit: mas)

周期(天)	FULL	FIC-FULL	MTIC-FULL
-182.62	-24.53	0.00	0.03
-365.26	-31.24	0.04	0.28
-3399.19	85.98	-0.01	0.00
-6798.38	-8024.20	0.36	0.20
-6798.38	-1182.01	-0.05	0.03
3399.19	3.82	0.00	0.00
365.26	25.71	-0.02	-0.03
182.62	-549.38	0.09	0.30

表3 内核的章动效应( $e'$ , 单位 mas)Table 3 The influence of inner core on nutation ( $e'$ , unit: mas)

周期(天)	FULL	FIC-FULL	MTIC-FULL
-182.62	-24.54	0.00	0.03
-365.26	-31.25	0.04	0.28
-3399.19	85.98	-0.01	0.00
-6798.38	-8024.25	0.36	0.20
6798.38	-1182.01	-0.05	0.03
3399.19	3.82	0.00	0.00
365.26	25.71	-0.02	-0.03
182.62	-549.27	0.09	0.30

## 5 讨论和结论

本文为系列文章<sup>[14~19]</sup>的最后一篇,主要探讨了地球章动转换函数.由文献[9]给出的简正模展开式中的系数值来看,它不满足约束条件(8)式,并且 $B'$ 值与地球动力学椭率的采用值计算的结果不符合.文献[7]在公式表述上有几处不足之处,在本文中进行了改正.本文证明了两种简正模表达式的一致性,并给出了其系数值之间的关系,即(15)~(17)式.

基于文献[10]给出的有关参数,利用 Mathematica 数学软件重新计算了 PREM 和 1066A 地球模型在 FULL 理论、MTIC 和 FIC 近似下的章动本征模频率和简正模展开式中的有关系数.计算了内核动力学对受迫章动的影响,结果表明其影响已在目前 VLBI 可检测的量级内.

文献[12]和[13]详细综述了地球较差旋转和地球内核各向异性的成因,未来内核自转动力学和章动转换函数的探讨,应当考虑到各向异性的影响.

## 参 考 文 献 (References):

[1] Herring T A, *et al.* Geodesy by radio interferometry: Studies of the forced nutations of the Earth 1 Data analysis[J]. J. Geophys. Res., 1986, 91: 4745~4654.

[2] Herring T A, *et al.* Forced nutation of the Earth: Influence of inner core dynamics 3 VLBI data analysis[J]. Journal of Geophysical Research, 1991, 96(B5):8259~8273.

[3] Herring T A, *et al.* Modeling of nutation-precession: VLBI results[J]. J. Geophys. Res., 2002, 107(B4): 10.1029/2001J B000165.

[4] Dehant V. On the nutations of a more realistic Earth model [J]. Geophys. J. Int., 1990, 100:477~483.

[5] Dehant V, *et al.* Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory[J]. Celest. Mech. Dyn. Astr., 1999, 72: 245~310.

[6] Mathews P M, *et al.* Forced nutation of the Earth: Influence of inner core dynamics 1 theory[J]. Journal of Geophysical Research, 1991, 96(B5):8219~8242.

[7] 夏一飞, 张承志. 关于地球受迫章动的简正模表达式[J]. 南京大学学报(自然科学版). 1995, 31(3):363~368.

[8] Dehant V, Defraigne P. New transfer functions for nutations of a nonrigid Earth[J]. J. Geophys. Res., 1997, 102: 27659~27688.

[9] Wahr J M. The Forced nutations of an elliptical rotating elastic and oceanless earth[J]. Geophys. J. R. Astron. Soc., 1981, 64:705~727.

[10] Mathews P M, *et al.* Forced nutations of the Earth: Influence of Inner core dynamics 2 Numerical results and comparisons[J]. Journal of Geophysical research, 1991, 96(B5): 8243~8257.

[11] Sasao T, *et al.* A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth[A]. in Proceedings of IAU Symposium 78, edited by E. P. Fedorov, *et al.*, D. Reidel, Hingham, Mass., 1980:165~183.

[12] 朱涛. 地球的差异旋转[J]. 地球物理学进展, 2003, 18(2): 247~255.

[13] 刘斌, 张群山, 王宝善, 等. 内核地震波速各向异性的成因[J]. 地球物理学报, 2000, 43(3):312~321.

[14] 张捍卫, 许厚泽, 王爱生. 内核地球自转动力学理论的研究进展(I)——理论基础[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(2):507~512.

[15] 张捍卫, 许厚泽, 王爱生. 内核地球的自转运动和地球固定参考系的研究[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(3):712~717.

[16] 张捍卫, 许厚泽, 王爱生. 内核地球自转动力学理论的研究进展(III)——液核自转动力学方程[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(1):48~52.

[17] 张捍卫, 许厚泽, 王爱生. 内核地球自转动力学理论的研究进展(IV)——内核自转动力学方程[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(4):1139~1144.

[18] 张捍卫, 许厚泽, 王爱生. 内核地球自转动力学理论的研究进展(V)——地球自转耦合运动方程组[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(1):121~126.