

# RSA 算法中几种可能泄密的参数选择

谢健全<sup>1,2</sup>, 阳春华<sup>1</sup>

(1. 中南大学信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 湖南财经高等专科学校, 长沙 410205)

**摘要:** RSA 加密算法是目前使用较多、安全性高的一种非对称加密算法, 在实际应用中要使该算法有较高的防破解强度, 在大素数的选择上是有要求的。文章给出了选择高质量的大素数的有效方法, 并对一些不当的选择可能造成的泄密给出了相应的证明。

**关键词:** 大素数; RSA 算法; 安全性; 攻击

## Several Possible Parameters Options Causing Encryption Failure in RSA Algorithm

XIE Jianquan<sup>1,2</sup>, YANG Chunhua<sup>1</sup>

(1. Information Engineering College, Central South University, Changsha 410083; 2 Hunan Finance and Economics College, Changsha 410205)

**【Abstract】** RSA encryption algorithm is a popular unsymmetrical encryption with high secure character. There are some special requirements in the selection of the large prime number in order to prevent the decryption. An efficient method has been introduced, which can be used to select the large prime numbers, and the some reasons which cause lower security by selecting incorrect prime number have been proved.

**【Key words】** Big primes; RSA algorithms; Security; Attack

### 1 RSA 算法的基本描述

RSA 算法是公钥密码体制的典型算法, 它具有密钥管理方便、破译难度大的优点, 因而在网络中常用于敏感信息的加密。RSA 算法的具体操作是: 选取 2 个大素数  $p$  与  $q$ , 然后算出  $m=pq$ ,  $\varphi(m)=(p-1)(q-1)$ , 再选取一个正整数  $e$ , 使之满足  $(e, \varphi(m))=1$ ,  $1 < e < \varphi(m)$ , 其中  $()$  表示求最大公约数; 再求出正整数  $d$ , 使之满足  $1 < d < \varphi(m)$ , 且使  $de \equiv 1 \pmod{\varphi(m)}$ 。然后用  $\{m, e\}$  作为公钥, 而用  $\{m, d\}$  作为私钥。

用 RSA 体制加密时, 先将明文数字化, 然后进行分组, 每组的长度不超过  $\log(m)$ , 再每组单独加密和解密。加密过程如下: 假设要加密的明文组为  $n(0 \leq n < m)$ , 将  $n$  的  $e$  次方用  $m$  除后得到余数  $c$ ,  $c$  为密文, 这就是加密过程; 将密文  $c$  的  $d$  次方用  $m$  除后得到的余数刚好为  $n$ , 即明文, 这就是解密过程。

### 2 可能导致 RSA 失密的几种大素数的选择

如果要对 RSA 算法加密后的信息进行破译, 最直接的方法是根据公开密钥  $\{m, e\}$  中的  $m$ , 对  $m$  进行因子分解, 算出  $p$  和  $q$ , 再算出  $\varphi(m)$  和  $d$ 。

实际应用中  $m$  是一个相当大的数, 对大数的因子分解目前是难解的, 这是 RSA 公钥密码体制建立的基础。因为迄今没有找到一个有效算法可用于分解因子; 只要  $p$  和  $q$  足够大, 用计算机进行穷举, 一般在信息的有效期内也无法找出  $p$  或  $q$ , 如果  $p$  和  $q$  的长度为 100 位时, 若用一台每秒能进行 1 亿次因子分解的高速计算机来做分解, 其所需时间均为 3 800 000 年。

如果不通过对  $m$  进行因子分解能算出  $p$ 、 $q$  或  $d$ , 也能对 RSA 算法加密后的信息进行破译, 因为只须知道  $p$ 、 $q$ 、 $\varphi(m)$  与  $d$  之中的一个, 就可推导出其它的数。因此有时要对 RSA 加密进行破解, 不一定要直接分解  $m$ , 也就是说, RSA 体制

的安全性并非是无条件的。只有选择满足某些条件的高质量  $p$ 、 $q$  及  $d$ , 才能使 RSA 的安全性尽量基于大数因子分解难上。否则, 大数因子分解难, 但 RSA 不难攻破。

要使 RSA 加密后的密文不被破译,  $p$ 、 $q$  和  $d$  除了要选用大素数外, 还应满足如下几个条件: (1)  $p$  和  $q$  必须为强素数; (2)  $p$  与  $q$  的长度应该相差不多,  $p$  与  $q$  之差不能太小; (3)  $p-1$  和  $q-1$  的最大公因子应该很小; (4) 一个模数  $m$  只能被一个人使用; (5)  $e$  的值不能过小, 且不能为  $\log_n(km+n)$ , 式中  $n$  为明文,  $k$  为任意正整数。

### 3 $p$ 和 $q$ 选择不当可能导致失密的证明

#### 3.1 $p$ 和 $q$ 必须为强素数的证明

强素数  $x$  的条件:

(1) 存在 2 个大素数  $x_1$  和  $x_2$ , 使  $x_1 | (x-1)$ ,  $x_2 | (x+1)$ ;

(2) 存在 4 个大素数  $r_1, s_1, r_2$  及  $s_2$ , 使  $r_1 | (x_1-1)$ ,  $s_1 | (x_1+1)$ ,  $r_2 | (x_2-1)$ ,  $s_2 | (x_2+1)$ 。

采用强素数的理由如下: 若  $x-1 = \prod_{i=1}^l x_i^{a_i}$ ,  $x_i$  为素数,  $a_i$  为正整数。分解式中  $x_i < B$ ,  $B$  为已知一个小整数, 则存在一种  $x-1$  的分解法, 使我们易于分解  $m$ 。令  $m=xy$ , 且  $x-1$  满足上述条件,  $x_i < B$ 。设  $a_i$  的最大值为  $a$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ , 即可构造

$$R = \prod_{i=1}^l x_i^a$$

显然  $(x-1) | R$ 。由费尔马定理  $2^R \equiv 1 \pmod{x}$ , 令  $2^R \equiv r \pmod{x}$ , 若  $r=1$ , 则选 3 代 2, 直到出现  $r \neq 1$ 。此时, 由  $\gcd(x-1, m)=x$ ,

**作者简介:** 谢健全(1964—), 男, 教授, 主研方向: 计算机安全策略与效率; 阳春华, 教授、博导

**收稿日期:** 2005-11-29 **E-mail:** xiejianquan@sina.com

就得到 $m$ 的分解因子 $x$ 和 $y$ 。

### 3.2 $p$ 与 $q$ 之差要大的证明

$m$ 是正奇整数,若 $m=x*y$ ,则 $m$ 可写成 $u^2-v^2$ ,假定 $a>b$ ,则: $u=(x+y)/2$ , $v=(x-y)/2$ ,所以 $u$ 和 $v$ 为非负整数。

反过来 $m$ 是正奇数, $m$ 可表示为 $m=u^2-v^2=(u+v)(u-v)$ ,故 $x=u+v$ , $y=u-v$ ,这里可提供一种因数分解办法。

因若 $m=xy$ 且 $x$ 、 $y$ 比较接近,则 $v$ 将是一个很小的数,而 $u$ 比 $\sqrt{m}$ 稍大,这样 $u$ 可从开始每次递增 $1(\sqrt{m}+1, \sqrt{m}+2, \dots)$ ,直到找到 $u^2-n=v^2$ 为止。由于 $u$ 只比 $\sqrt{m}$ 稍大,只要进行几次运算就能很快确定 $u$ 和 $v$ 。例如取两个相差小的素数 401 和 409,则 $m=164\ 009$ , $\sqrt{m} \approx 405$ , $405^2-m=16$ ,可得 $v=4$ ,从而确定 $u=405$ ,进而得到 $x=409$ , $y=401$ 。

注意不能为保证 $p$ 与 $q$ 之差大而过于拉大 $p$ 与 $q$ 的长度差,因为针对 $m$ 的穷举搜索难度取决于 $p$ 与 $q$ 的最小值,比如 $p$ 与 $q$ 的长度分别为 150 位和 50 位, $m$ 虽有 200 位,但此时的攻击难度仅相当于 100 位。在实际应用中, $p$ 与 $q$ 的长度应只相差几位。

### 3.3 $p-1$ 和 $q-1$ 的最大公因子要小的证明

根据 RSA 算法的原理,保密的 $\varphi(m)=(p-1)(q-1)$ 是用于计算 $e$ (或 $d$ )的,故在 RSA 中具有关键作用。一旦 $\varphi(m)$ 被攻破,则 $p$ 、 $q$ 与 $d$ 均很容易被攻破(例如,对 $\varphi(m)$ 代数运算可求 $P$ 与 $q$ ,由 $de \equiv 1(\text{mod}(\varphi(m)))$ 可求 $e$ 或 $d$ ),因此必须加强 $\varphi(m)$ 的抗攻击性。

若 $p-1$ 和 $q-1$ 的最大公因子较小,由 Euler 定理可知, $\varphi(m)$ 大,则 $\varphi(m)$ 的抗攻击性就强,也就是说,由于 $P-1$ 与 $q-1$ 必是大偶数,其最小素因子必均为 2,若 $P-1$ 与 $q-1$ 的最大公因子为 2,则 $\varphi(m)=(p-1)(q-1)/2$ ,则对其穷举攻击和对 $\varphi(m)$ 因子分解攻击(含因子素数性测试)必耗费巨大,即 $\varphi(m)$ 的抗攻击性很强。

### 3.4 一个模数 $m$ 只能被一个人使用的证明

若系统中共有一个模数,只是不同的人拥有不同的 $e$ 和 $d$ ,这样实现相对简单,但可能导致共模攻击。当同一信息用不同的公钥加密,这些公钥共模而且互质(一般情况如此),那末该信息无需私钥就可得到恢复,从而导致泄密。其证明如下:

设 $n$ 为信息明文,两个加密密钥分别为 $e_1$ 和 $e_2$ ,公共模数是 $m$ ,则:

$$c_1 = m^{e_1} \text{ mod } m$$

$$c_2 = m^{e_2} \text{ mod } m$$

因为 $e_1$ 和 $e_2$ 互质,故用 Euclidean 算法能找到 $r$ 和 $s$ ,满足:

$$r \cdot e_1 + s \cdot e_2 = 1$$

假设 $r$ 为负数,需再用 Euclidean 算法计算 $c_1^{-1}$ ,则

$$(c_1^{-1})^{-r} \cdot c_2^s = n \text{ mod } m$$

进而可算出 $n$ ,也就是说密码分析者知道 $m$ 、 $e_1$ 、 $e_2$ 、 $C_1$ 和 $C_2$ ,就能得到 $n$ ,即泄密。

另外,还有其它几种利用公共模数攻击的方法。总之,如果知道给定模数的一对 $e$ 和 $d$ ,一是有利于攻击者分解模数,二是有利于攻击者计算出其它成对的 $e'$ 和 $d'$ ,而无须分解模数。解决办法只有一个,那就是不要共享模数 $n$ 。

### 4 $e$ 和 $d$ 选择不当可能导致失密的证明

在选好 $p$ 和 $q$ 后,要选取满足 $(e, \varphi(m))=1$ 的 $e$ 值是很容易的事,因为两个随机数互素的概率为 $3/5$ 。若采用小的 $e$ ,

可加快加密的速度,但 $e$ 过小时易遭低加密指数攻击。

(1)当 $e$ 过小时,对小的 $n$ ,可能出现 $n^e < m$ 的情况,此时 $c = n^e \text{ mod } m = n^e$ ,即未取模,由 $c$ 直接开 $e$ 次方就可求出明文 $n$ ;

(2)低加密指数攻击。

令网中有 3 用户为加快加密速度,均选用 $e=3$ ,而有不同的模 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ ,一般 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 互素,否则可求出其公因子,即求出构成 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 的两个因子 $p$ 和 $q$ 中的 1 个,进而导致解密密钥被破解。若有 1 用户要将明文 $n$ 传给这 3 个用户,其密文分别为:

$$c_1 = n^3 \text{ mod } m_1 \quad n < m_1$$

$$c_2 = n^3 \text{ mod } m_2 \quad n < m_2$$

$$c_3 = n^3 \text{ mod } m_3 \quad n < m_3$$

$$\text{设 } c = n^3 \text{ mod } (m_1 m_2 m_3)$$

利用中国余定理,可根据 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 求出 $c$ 。由于 $n < m_1$ 、 $n < m_2$ 、 $n < m_3$ ,可得 $n^3 < m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ ,因此 $c = n^3$ ,故有 $n = \sqrt[3]{c}$ ,即失密。

可见对于较小的 $e$ ,可通过计算出 $c$ ,进而解出 $n$ 。

对于传送的信息很短时,需要用随机数字进行填充,否则即使 $e$ 不过小,也可能导致低加密指数攻击。

在 RSA 加密过程中,对一些特殊的明文,总会出现 $n^e \text{ mod } m = n$ 的情况,致使信息暴露,如 $n=0, 1, m-1$ ,这些被称为 RSA 加密下的不动点。一般来说,不动点有 $[1 + \text{gcd}(e-1, p-1)] \cdot [1 + \text{gcd}(e-1, q-1)]$ 个,由于 $p$ 、 $q$ 、 $e$ 均为奇数, $\text{gcd}(e-1, p-1) \geq 2$ , $\text{gcd}(e-1, q-1) \geq 2$ ,因此不动点至少有 $3 \times 3 = 9$ 个,具体个数与 $p$ 、 $q$ 、 $e$ 的选择有关。

这 9 个明文中,对于 0 和 1,不管采用什么样的参数 $e$ ,加密后仍为 0 和 1,但明文块为 0 和 1 时,由于不包含关键信息,不存在泄密问题,也不会造成加密强度的下降;对于不动点 $n=m-1$ ,其位置只与 $p$ 和 $q$ 相关,如重要明文块刚好为 $m-1$ ,则应另选其它的 $p$ 或 $q$ 值;其它不动点的位置则与 $p$ 、 $q$ 、 $e$ 的选择同时相关。

当 $e = \log_n(km+n)$ 时:

$$n^e = n^{\log_n(km+n)} = km+n$$

根据 RSA 算法,对明文 $n$ 加密后的密文为:

$$c = n^e \text{ mod } m = (km+n) \text{ mod } m = n$$

可见,当 $e = \log_n(km+n)$ ,加密后的密文与明文一模一样,其后果等于直接用明文进行传送,因此在 $p$ 、 $q$ 已选定的情况下,选择 $e$ 时,要防止其等于 $\log_n(km+n)$ 。

例:选择 $p=17$ , $q=11$ , $e=3$ 时, $m=187$

当 $n=33$ 时, $c=33^3 \text{ mod } 187 = 33$

当 $n=34, 67, 120, 153, 154$ 时,所得密文也仍为 34, 67, 120, 153, 154,即 $c=n$ 。

为了兼顾快速加密和抗低加密指数攻击, $e$ 可考虑采用 16 位的素数。

由于在 RSA 体制中, $d$ 是保密的,而 $e$ 是公开的,因此 $d$ 应有足够的长度以抵抗对 $d$ 的攻击。如果 $d < \frac{1}{3}m^{1/4}$ ,则存在有效的算法能够解出这个指数。考虑到 $d$ 与 $e$ 的可互换性,应使用选择 $d$ ,再算出 $e$ 的办法。可靠的方法是选一个大于 $p$ 、 $q$ 而小于 $\varphi(m)$ ,并满足 $\text{gcd}(d, \varphi(m))=1$ 的强素数作为 $d$ ,然后算出 $e$ ,如果 $e$ 不是很小,也不是很大(否则低速度的终端在加密时将会很慢),同时 $e \neq \log_n(km+n)$ ,则 $e$ 就为所求,否则要另选 $d$ 和重新计算 $e$ 。(下转第 124 页)