

文章编号: 1001-4322(2003)01-0064-05

柱几何 Rayleigh-Taylor 不稳定性的数值模拟*

吴俊峰¹, 叶文华², 张维岩²

(1. 中国工程物理研究院 研究生部, 北京 100088; 2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘 要: 给出了柱几何中流体力学方程组及其在数值模拟中采用的计算方法。对二维柱几何 Rayleigh-Taylor 不稳定性进行数值模拟, 在线性阶段与线性理论符合得很好; 不稳定性增长进入非线性区域的阈值依赖于界面的位置, 并且明显不同于平面情况。

关键词: 柱几何流体不稳定性; FCT 算法; 高精度格式

中图分类号: O361.5; O242.1 **文献标识码:** A

当轻流体加速重流体, 或在重力场中轻流体支撑重流体时, 流体界面是 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定的; 当冲击波穿过两种不同密度的流体时, 会产生 Richtmyer-Meshkov (RM) 不稳定性; 当两种流体的交界面出现切向速度间断时, 会产生 Kelvin-Helmholtz (KH) 不稳定性。流体不稳定性是影响 ICF 内爆压缩和点火燃烧的关键因素^[1]。以前的流体不稳定性实验和数值模拟大多是关于平面的, 而关于柱和球几何的很少^[2~4]。柱几何和球几何中流体不稳定性的发展具有收缩几何效应, 不稳定性发展更为迅速, 这是平面所不具有的现象。但是由于球几何流体不稳定性的发展在实验上难以诊断, 而柱几何比较容易观察, 例如, 沿柱的对称轴方向, 使用背景光照明可以定量检测到轴对称界面上不稳定性的发展。所以数值模拟柱几何流体不稳定性, 用实验结果检验 ICF 内爆中大变形流体计算程序, 对于 ICF 研究具有重要意义。

流体不稳定性进入非线性阶段, 界面严重扭曲, 拉氏计算方法存在网格畸变和相交的严重困难, 使得计算不能进行下去, 现在一般采用界面自适应细分的高精度流体计算方法。我们在这里使用 FCT (Flux-Corrected Transport) 方法^[5], 它适于计算单个连续性方程, 具有较大灵活性, 实践证明可以用来处理流体不稳定性问题。

1 柱几何流体力学不稳定性

在柱几何中, 物理模型如图 1 所示, 考虑两层理想不可压缩流体, 外层流体的密度为 ρ_1 , 内层流体的密度为 ρ_2 , 并且 $\rho_1 > \rho_2$, 界面到轴心的距离为 R , 沿径向 r 向内的重力场加速度大小为 g 。这里需要注意的是^[6], 类似于平面情况^[7], 假想在半径 r 方向存在一个向心重力场, 例如在恒星系中, 向心重力场由万有引力产生, 而在实验中, 对于带电流体, 向心重力场可以用向心静电场代替, 这时在向心重力场中, 内层轻流体支撑外层重流体, 流体界面是不稳定的。若界面上不存在扰动, 在重力场中流体交界面两侧的内层压力是平衡的, 这时界面是静止的, 一旦在界面上出现扰动, 类似于平面情况, 扰动开始增长, 产生沿径向 r 的 RT 不稳定性。在这个模型中, 单模扰动的波长在不稳定性增长过程中保持不变, 可以与平面几何中具有相同波长扰动的不稳定性增长过程进行比较。而在与这个模型类似的具有运动界面的模型中, 例如在 ICF 内爆减速阶段, 靶丸中心低密度热斑减速外部低温高密度推进层, 这时内界面是不稳定的。在跟随内界面运动的非惯性参考系中, 与前面相似的是, 惯性力的方向由外向内, 但是在这个非惯性参考系中, 界面扰动的波长在不稳定性增长过程中是变化的, 这时收缩效应会影响不稳定性的增长过程, 而这准备在以后考虑激光烧蚀及热传导过程后

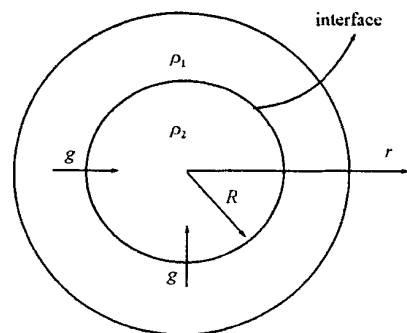


Fig. 1 Schematic of RTI in two-dimensional cylindrical geometry

图 1 二维柱几何中 RT 不稳定性模拟示意图

* 收稿日期: 2002-06-19; 修订日期: 2002-08-13

基金项目: 国家自然科学基金重点资助课题 (19932010, 10135010)

作者简介: 吴俊峰 (1975-), 男, 博士生, 主要从事惯性约束聚变中流体不稳定性研究; 北京 8009 信箱。

进行分析。建立这个具有静止界面模型的目的有两个,首先,在这种情况下,不稳定性在线性阶段具有解析解,可以直接用来检验程序;其次,可以分析在内外不对称的收缩几何中(包括柱几何和球几何),几何效应对不稳定性增长的影响(收缩效应留待将来考虑)。所以这里考虑二维情况(r, z),在适当的局部区域内,重力场加速度 g 近似为常数,在线性近似下,可以得到方程^[6]

$$\frac{d^2(\xi)}{dt^2} - \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{m}{R} g(\xi) = 0 \quad (1)$$

式中: $\xi(t)$ 为单模扰动振幅; m 为单模扰动的模数。可以看出,在线性阶段时,柱几何中不稳定性增长过程与平面情况类似,扰动的增长率正比于沿径向的重力加速度 g ,反比于扰动的波长($\lambda = 2\pi R/m$);与平面情况不同的是, m 越大或 R 越小,扰动波长越短,扰动增长越快。

流体不稳定性的增长进入非线性阶段,各种模的耦合作用加强,不稳定性发展的物理图像变得非常复杂,尤其在柱几何情况下,由于收缩几何效应的存在,界面扰动更易于发展成不对称形状,从而扰动比平面情况更快进入非线性阶段。因此对柱几何中流体不稳定性的非线性发展进行数值模拟,有利于理解在收缩几何结构中流体不稳定性的演变规律,发展 ICF 内爆中大变形流体计算方法,同时为建立理论模型提供可靠的物理图像。

2 物理方程

我们使用柱几何中非守恒形式的流体力学方程组,来描述柱几何中的 RT 不稳定性。

质量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(v) - \frac{\partial}{\partial z}(w) \quad (2)$$

动量方程

$$\frac{\partial(u)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(uv) - \frac{\partial}{\partial z}(uw) - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v^2}{r} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial(v)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r uv) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(v^2) - \frac{\partial}{\partial z}(vw) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{uv}{r} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(w)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r uw) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(vw) - \frac{\partial}{\partial z}(w^2) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

内能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(v) - \frac{\partial}{\partial z}(w) - p \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (6)$$

式中: u, v, w 分别为 r, θ, z 三个方向的流体速度; p 为流体压力。这里采用非守恒形式是为将来进行电子热传导和多群光子扩散的升级,因为采用总能量守恒方程会使电子热传导前沿和其它密度间断处内能和动能匹配不好,使计算结果振荡,温度出现负值。

3 计算方法和网格

采用流体高精度算法和自适应界面追踪并细分的网格方法,是进行界面不稳定性计算的两个必要条件,这是由于流体不稳定性存在明显的剪切流,采用传统的拉氏方法进行计算困难很大^[8,9]。

3.1 高精度 FCT 流体算法

我们采用局部一维的分裂格式算法,在 r, θ 和 z 三个方向分别进行一维计算。FCT 算法用非线性反扩散方法提高流体计算精度,具体计算过程分四步:

(1) 用积分法计算一维连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r D_1) + C_2 \frac{\partial D_2}{\partial r} + D_3 \quad (7)$$

其中 D_1, C_2, D_2, D_3 表示各种形式的源项。在活动网格上进行离散,其中自动包含网格速度

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r D_1) + C_2 \frac{\partial D_2}{\partial r} + D_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r D_1) + C_2 \frac{\partial D_2}{\partial r} + D_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r D_1) + C_2 \frac{\partial D_2}{\partial r} + D_3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} t C_{2,i} (A_{i+1/2} + A_{i-1/2}) (D_{2,i+1} - D_{2,i-1}) + t {}^n D_{3,i} \quad (8)$$

式中 $V_i, A_{i+1/2}$ 和 $A_{i-1/2}$ 分别为网格的体积和两边的面积, $v_{i+1/2}$ 和 $v_{i-1/2}$ 分别为网格两边的流体速度和网格速度之差。这一步起格式稳定作用,结果用来计算未校正的反扩散通量。

(2) 抵消部分格式得

$${}^{n+1} \tilde{u}_i = \frac{{}^n T_i}{i} + v_{i+1/2} \tilde{u}_{i+1/2} - v_{i-1/2} \tilde{u}_{i-1/2} (\frac{{}^n T_{i+1}}{i+1} - \frac{{}^n T_i}{i}) \quad (9)$$

这一步起抵消部分格式粘性的作用,但要保证正性要求。

(3) 为提高计算精度,必须进行反扩散,计算未校正的反扩散通量

$$f_{i+1/2}^{\text{ad}} = \mu_{i+1/2} \tilde{u}_{i+1/2} (\frac{{}^n T_{i+1}}{i+1} - \frac{{}^n T_i}{i}) \quad (10)$$

(4) 反扩散不应当出现振荡和非物理解现象,必须进行通量校正

$$f_{i+1/2}^c = S_{i+1/2} \times \max\{0, \min[S_{i+1/2} \frac{{}^{n+1} \tilde{u}_{i+1} - {}^{n+1} \tilde{u}_i}{i+1 - i}, | f_{i+1/2}^{\text{ad}} |, S_{i+1/2} \frac{{}^{n+1} \tilde{u}_i - {}^{n+1} \tilde{u}_{i-1}}{i - i-1}]\} \quad (11)$$

$${}^{n+1} \tilde{u}_i = \tilde{u}_i - \frac{1}{{}^n n+1} (f_{i+1/2}^c - f_{i-1/2}^c) \quad (12)$$

式中 $S_{i+1/2} = \text{sign}(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i)$ 。

反扩散不应产生新的极大值或极小值,也不应加重已存在的极值。相位误差精度对流体波形的失真产生重要影响,模拟中发现四阶相位误差精度的不稳定性界面计算产生较大失真,而取下面具有六阶相位误差精度的 μ 和 ν 值,不稳定性界面得到明显改善。

$$\begin{cases} \mu_{i+1/2} = (-1/30) (1 - 4 \frac{{}^2}{i+1/2}) \\ \nu_{i+1/2} = (1/5) (1 + \frac{{}^2}{i+1/2}) \\ \mu_{i+1/2} = (1/6) (1 - \frac{{}^2}{i+1/2}) \end{cases}$$

FCT 是一种计算“对流型”方程的高精度格式。用 FCT 计算保持了格式的稳定性、力学量的守恒性及某些力学量的非负性,提高了流体计算的分辨率。

最后采用二阶龙格-库塔方法,先前进半个时间步,得到 ${}^{n+1/2} u, {}^{n+1/2} p, {}^{n+1/2} \rho$, 然后利用这些半点量,再前进一个时间步,得到 ${}^{n+1} u, {}^{n+1} p, {}^{n+1} \rho$, 从而达到时间的二阶精度。

3.2 追踪界面并细分网格的活动网格方法

网格划分的不同对不稳定性计算结果产生严重影响。我们在纵向 r 采用活动网格,用界面速度追踪流体不稳定性界面,并在其附近均匀细分网格,以减少计算误差,密分网格区两边的网格均匀放大,但放大因子不超过 1.1。横向 (或 z) 一般取均匀网格。

4 数值模拟的结果

为考察柱几何中 RT 不稳定性的发展,我们设计图 1 所示的理想模型,这里只考虑二维情况 (r, z),一方面可以与线性阶段的解析解进行比较,以达到检验程序的目的,另一方面 ICF 中内爆靶丸具有收缩几何结构,通过模拟柱收缩几何结构中不稳定性的发展,可以间接了解内爆靶丸中不稳定性的发展过程;而在 Z-pinch 中, r, z 方向的不稳定性过程较少讨论,因此有必要进行分析,以了解该方向不稳定性过程的作用。当流体的绝热指数足够大时,流体即可近似为不可压缩,这里取绝热指数为 10。数值模拟证明,在这种情况下,绝热指数在大于 5 的范围内,不稳定性在线性阶段及弱非线性阶段的增长过程不会产生较大差异。

我们对两种情况进行数值模拟:一种是在其他参数不变,模数 m 变化时扰动的发展情况;另一种是在 R 与 m 的比值为固定时(即扰动的波长 $\lambda = 2 R/m$ 固定不变时)扰动的发展情况。

4.1 模数 m 变化时扰动的发展情况

取 $\rho_1 = 20 \text{g/cm}^3, \rho_2 = 5 \text{g/cm}^3, R = 450 \mu\text{m}, g = 10^{14} \text{cm/s}^2$, 我们分别对模数 $m = 6, 12$ (对应于不同波长)的扰动进行数值模拟,结果如图 2 所示。

在线性区域,我们的计算结果与线性理论符合得很好,且 m 大,扰动波长短,扰动增长较快,并较早进入非线性区域。柱几何中扰动的波长为 $\lambda = 2 R/m$, 平面几何中 RT 不稳定性的三阶扰动展开理论给出扰动进入非线性区的振幅为 ≈ 0.1 , m 增大,扰动波长变短,扰动进入非线性区域的阈值降低。在非线性区域,尖钉头部被严重挤压,较少出现卷曲,而气泡因发展空间较大,明显比平面情况的大。因此二维柱几何和平面几何的 RT 不稳定性在非线性阶段有较大差别,这有待进一步研究。

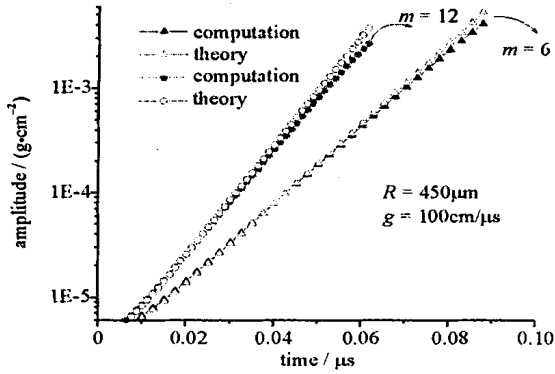


Fig. 2 Results of different wavelengths with the same interface position
图 2 相同界面位置、不同扰动波长的结果

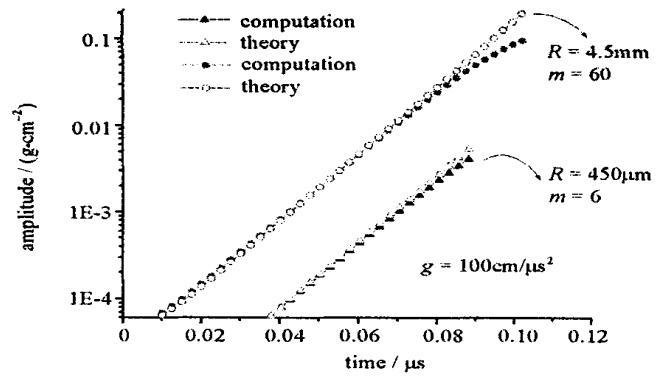


Fig. 3 Results of different interface positions with the same wavelength
图 3 相同扰动波长、不同界面位置的结果

4.2 在 R 与 m 的比值为固定时扰动的发展情况

取 $\rho_1 = 20\text{g/cm}^3$, $\rho_2 = 5\text{g/cm}^3$, $g = 10^{14}\text{cm/s}^2$, (R, m) 分别取下列二组数据: $(450\mu\text{m}, 6)$, $(4.5\text{mm}, 60)$, 即扰动波长相同, 但界面位置不同。数值模拟结果如图 3 所示。

在线性发展阶段, 若 R 与 m 的比值固定, 其他参数不变, 线性理论公式表明不稳定性的增长率是不变的, 也就是说, 在给定的二个例子中, 扰动在线性阶段的发展规律是完全一样的。计算结果与线性理论公式很好符合, 即在对数坐标系中相同波长、不同界面位置的扰动振幅增长曲线有相同的斜率。在计算的两个例子中, 唯一的区别在于扰动发生非线性分离的阈值不同。对于 $R = 450\mu\text{m}$ 情况, 扰动发生非线性分离的振幅阈值约为 $4.61 \times 10^{-3}\text{g/cm}^2$; 对于 $R = 4.5\text{mm}$ 情况, 阈值约为 $4.979 \times 10^{-2}\text{g/cm}^2$ 。因此, 计算结果表明: 扰动的非线性分离阈值与界面到轴心的距离 R 有关, 并且 R 越大, 非线性阈值越趋近于平面的情形。非线性阈值随 R 变小而变小, 说明在柱几何内爆后期, 流体的非线性作用很强, 内爆数值模拟需要有足够的网格用以分辨小尺度的扰动。

5 结 论

可以看出, 当 R 固定时, 柱几何中 RT 不稳定性在线性阶段与经典理论符合得很好, 仍然是指数增长规律。由于柱收缩几何效应的存在, 不稳定性的发展很快进入非线性阶段, 具体表现在不稳定性发生非线性分离的阈值要比平面情况更小, 同时, 我们还可以看出随着 R 的增大, 发生非线性分离的阈值逐渐增大而接近平面情况, 这说明半径 R 的大小是决定柱几何效应的重要因素。但是要想理解其中的具体关系, 单靠数值模拟是很困难的, 必须进行解析求解, 这涉及到弱非线性理论。

参考文献:

- [1] Kilkenny J D, Gendinning S G, Haan S W, et al. A review of the ablative stabilization of the Rayleigh-Taylor instability in regimes relevant to inertial confinement fusion[J]. *Phys Plasmas*, 1994, **1**:1379—1389.
- [2] Hsing W W, Hoffman N M. Measurement of feedthrough and instability growth in radiation-driven cylindrical implosions[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **78**:3876—3879.
- [3] Weir S T, Chandler E A, Goodwin B T. Rayleigh-Taylor instability experiments examining feedthrough growth in an incompressible convergent geometry[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**:3763—3766.
- [4] Tubbs D L, Barnes C W, Beck J B, et al. Cylindrical implosion experiments using laser direct drive[J]. *Phys Plasmas*, 1999, **6**:2095—2104.
- [5] Book D L, Boris J P, Hain K. Flux-corrected transport II: generalizations of the method[J]. *J Comput Phys*, 1975, **18**:248—283.
- [6] Beck J B. The effects of convergent geometry on the ablative Rayleigh-Taylor instability in cylindrical implosions[D]. Purdue University, 1996. 65—66.
- [7] 王继海. 二维非定常流和激波[M]. 北京: 科学出版社, 1994. (Wang J H. Two-dimensional Unsteady Flow and Shock Waves. Beijing: Science Press, 1994)
- [8] 叶文华, 张维岩, 陈光南, 等. Rayleigh Taylor 和 Richtmyer-Meshkov 不稳定性的 FCT 方法数值模拟[J]. 计算物理, 1998, **15**:277—282. (Ye W H, Zhang W Y, Chen G N, et al. Numerical simulations of the FCT method on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1998, **15**:277—282)
- [9] 叶文华, 张维岩, 陈光南. 激光烧蚀瑞利-泰勒不稳定性模拟[J]. 强激光与粒子束, 1998, **10**(3):403—408. (Ye W H, Zhang W Y, Chen G

N, et al. Numerical simulations of laser ablative Rayleigh-Taylor instability. *High Power Laser and Particle Beams*, 1998, **10**(3):403—408)

Numerical simulations of Rayleigh-Taylor instability in cylindrical geometry

WU Jun-feng¹, YE Wei-hua², ZHANG Wei-yan²

(1. Graduate School of CAEP, Beijing 100088, China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P. O. Box 8009, Beijing 100088, China)

Abstract: The fluid equations and numerical algorithm are given to simulate two-dimensional Rayleigh-Taylor (RT) instability in cylindrical geometry in this paper. Simulation results agree well with the linear theory of RT instability. However the threshold at which nonlinear effects begin to become apparent in cylindrical geometry is clearly different from that in planar geometry and is related to the position of interface.

Key words: Hydrodynamic instability in cylindrical geometry; FCT algorithm; High-resolution scheme