

## 利用菲涅尔衍射测量微小尺寸

冉多钢 曹文杰 何小东

(河北工业大学机械学院 天津 300130)

**摘要** 在科研工程实际中,对细丝、狭缝等微小尺寸的测量通常采用夫琅和费衍射法,因为衍射暗斑间距与被测尺寸之间具有很简单函数关系: $s = \lambda L/d$ 。理论上,夫琅和费衍射条件是相当苛刻的,即要求  $L > d^2/\lambda$ ,在实际应用中,考虑到光源、传感器以及被测对象尺寸之间的匹配关系,往往很难实现。本文通过理论分析与实验数据充分证明,对于菲涅尔衍射,前述函数关系也能保持极为良好的近似,为仪器结构设计提供了极大方便,同时也为提高测量精度,扩展测量范围创造了有利条件。

**关键词** 夫琅和费衍射 菲涅尔衍射 衍射暗斑

在许多工程实际应用中,对细丝、狭缝等微小尺寸的测量无法用常规的接触法测量。光学法,特别是衍射法,是进行这类测量的首选方法。目前实用的衍射法测量通常采用夫琅和费衍射法,因为衍射暗斑间距与被测尺寸之间具有很简单函数关系  $s = \lambda L/d$ 。理论上,夫琅和费衍射条件是相当苛刻的,即要求<sup>[2,3,4]</sup>  $L > d^2/\lambda$ 。在实际应用中,考虑到光源、传感器以及被测尺寸之间的匹配关系,往往很难实现。本文前一部分对菲涅尔衍射理论进行了深入的分析,证明对于利用理想的单色均匀平行的相干光源的菲涅尔衍射,前述线性关系仍然成立。如果利用高斯光束实现衍射,无论夫琅和费衍射还是菲涅尔衍射,上述函数关系均会产生一定的非线性。本文后一部分通过实验数据验证了前述分析的正确性。同时提出了一种非常简单的测量方法,有效地将非线性误差减小到可忽略不计的程度。为仪器结构设计提供了极大方便,同时也为提高测量精度,扩展测量范围创造了有利条件。

### 1 衍射理论分析

首先我们考虑夫琅和费衍射。夫琅和费衍射的实现有两种基本形式:第一种基于自由空间衍射,单色均匀平行的平行光照射在开有狭缝的衍射屏上(根据互补原理,衍射屏上也可由与狭缝互补的细丝构成),在远离衍射屏的接收面上形成明暗相间的衍射条纹;第二种利用凸透镜实现无穷远光程,在透镜后焦面上形成衍射谱。这两种方法衍射条纹分布具有相同的形状。假设相干光波长为  $\lambda$ ,狭缝宽或细丝直径为  $d$ ,衍射距离为  $L$

(对于第二种情况,衍射距离等于透镜焦距  $f$ ),则衍射暗斑的坐标位置与间距分别为

$$X_k = \frac{k\lambda}{L}d \quad s = \frac{\lambda}{L}d \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中  $k$  为衍射暗斑级次。因此被测尺寸与衍射暗斑间距之间具有很简单函数关系<sup>[2,5]</sup>  $d = \lambda L/s$ 。

实行测量时,必须采用某种传感器接受衍射条纹分布。对于一种特定的传感器,其接收面尺寸是固定的。由于衍射暗斑间距与被测尺寸成反比,当被测尺寸变化较大时,很可能使衍射暗斑间距超过传感器接受面尺寸,从而无法测量。因此为了实现测量,必须调整衍射距离。采用透镜实现衍射进行测量时,透镜焦距一般是不能改变的,因为变焦距不容易保证测量精度。对于某一特定范围的被测尺寸,要求设计特定焦距的透镜,以适应被测尺寸与传感器尺寸之间的匹配关系,这样便限制了其应用范围。采用自由空间实现衍射时,理论上允许衍射距离可以在相当宽的范围变化。但是为了适应被测尺寸与传感器尺寸之间的匹配关系,减小衍射距离很可能进入菲涅尔衍射域。为了评估偏离夫琅和费衍射对测量精度的影响,我们对菲涅尔衍射进行了深入的分析,得到了比较理想的结论。

下面我们参照大多数物理光学或工程光学方面的专著,建立适当简化的物理模型<sup>[2,3,4,5]</sup>(如图1)波长为  $\lambda$  的单色均匀平行的相干光垂直入射到开有狭缝的衍射屏 XOY 平面,狭缝宽度  $d$ ,对称于  $y$  轴分布。接收屏  $X_0O_0Y_0$  平行于衍射屏 XOY。光轴  $OO_0$  分别垂直于这两个平面, $O O_0 = L$  为衍

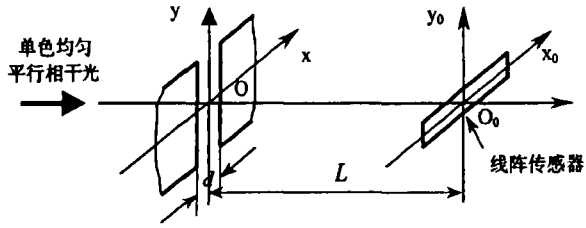


图1 简化的物理模型

射距离。在接受屏  $X_0O_0Y_0$  的  $x_0$  轴上放置线阵光电传感器。当系统满足菲涅尔衍射条件时，即  $L \gg d$  时，接受屏上衍射光复振幅为<sup>[3,4]</sup>

$$E(x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda L} \exp(j \frac{2\pi L}{\lambda}) \iint_{\Sigma} E(x, y) \exp\{j \frac{\pi[(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2]}{\lambda L}\} dx dy \quad (1)$$

这就是菲涅尔衍射基本公式<sup>[1,2]</sup>。其中  $E(x, y)$  是相干光复振幅在衍射屏上的分布，对于均匀相干光应为常数。如果只考虑  $x_0$  轴上传感器表面，又可简化为

$$E(x_0) = E_0 E_y \frac{1}{\lambda L} \exp(j \frac{2\pi L}{\lambda}) \left[ \int_{-d/2}^{d/2} \cos j \frac{\pi}{\lambda L} (x - x_0)^2 dx + j \int_{-d/2}^{d/2} \sin \frac{\pi}{\lambda L} (x - x_0)^2 dx \right] \quad (2)$$

其中  $E_0$  为与入射光强成正比的常数， $E_y$  为  $y$  轴方向衍射光复振幅积分(也是常数)

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j \frac{\pi}{\lambda L} y^2) dy \quad (3)$$

传感器上光强分布为

$$I(x_0) = E(x_0, 0) \overline{E(x_0, 0)} = I_0 \left\{ \left[ \int_{-d/2}^{d/2} \cos j \frac{\pi}{\lambda L} (x - x_0)^2 dx \right]^2 + \left[ \int_{-d/2}^{d/2} \sin \frac{\pi}{\lambda L} (x - x_0)^2 dx \right]^2 \right\} \quad (4)$$

其中  $I_0 = (E_0 E_0 / \lambda L)^2$  为常数。

菲涅尔衍射光强的计算是相当复杂的，利用经典著作中提出的科纽蜷线法<sup>[3,4,5]</sup>或波带片法<sup>[2,3,4,5]</sup>等方法计算也是非常不方便的。在我们提出的问题中，只要确定衍射暗斑即可。因此，在上述积分表达式中，在  $x_0$  轴上直接对  $I(x_0)$  求导

$$\frac{d}{dx_0} I(x_0) = 4 \sin \frac{\pi}{\lambda L} \sin \frac{\pi}{\lambda L} (x_0^2 + \frac{1}{4} d^2) d \int_{-d/2}^{d/2} \sin \frac{\pi}{\lambda L} (x - x_0)^2 dx \quad (5)$$

当  $X_{0k} = k\lambda L / d$  时  $dI(X_{0k}) / dx_0 = 0$ ，为极值点，这正与夫琅和费衍射暗斑相同，由物理意义可以断定，这也正是菲涅尔衍射的暗斑位置。这样我们证明了对于理想的单色均匀平行的相干光，

菲涅尔衍射暗斑位置与夫琅和费衍射暗斑是完全相同的。

在实际测量中，这样理想的单色均匀平行的相干光源实际是不存在的，与之最为接近的光源是激光束。如采用最常用的 He-Ne 激光束，其光强分布为高斯分布。可以证明<sup>[1]</sup>，对于高斯光束，无论夫琅和费衍射或菲涅尔衍射，其暗斑分布都是非线性的。通过复杂的推导，可以确定其非线性的界限。由于推导过程过于复杂，本文仅给出基本思路和最后结论。

当高斯光束照射在衍射屏 XOY 平面上，其复振幅可以近似表达为

$$\tilde{E}(x, y) = \exp\left[-\frac{X^2 + Y^2}{\omega_0^2}\right] \quad (6)$$

式中  $C$  为常， $\omega_0$  为激光腰斑半径。在狭缝或细丝附近可以将其展开成幂级数

$$\exp\left(-\frac{X^2}{\omega_0^2}\right) = 1 - \left(\frac{X}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{\omega_0}\right)^4 \Lambda \quad (7)$$

并用余弦函数近似代替

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2}X}{\omega_0}\right) = 1 - \left(\frac{x}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{\omega_0}\right)^4 \Lambda \quad (8)$$

将其代入菲涅尔衍射基本公式(1)或公式(2)，求出光强表达式，求导，取极值，便可确定衍射暗斑的位置

$$X_k = (k + \zeta_k) \frac{\lambda L}{d} \quad (9)$$

$$|\zeta_k| \approx \frac{d^2}{2\pi^2 j \omega_0^2} \quad (10)$$

其中  $\zeta_k$  反映衍射暗斑偏离线性点的程度。当  $d$  非常小时，对应于夫琅和费衍射， $\zeta_k$  趋于 0。当  $d$  增加到一定程度时，进入于菲涅尔衍射域， $\zeta_k$  按照平方律增加。代入下列具体数值： $d = 0.8\text{mm}$ (比较粗的丝径)， $\omega_0 = 0.6\text{mm}$ (普通 He-Ne 激光束腰斑半径)， $k = 20$ (比较低的衍射级次)，可以得到： $\zeta_{\text{max}} = 0.0045$ 。该数值可以认为是本文所讨论的测量方法产生的非线性误差的最大值。采取适当措施，可以将该项误差减小到可忽略不计。

## 2 实验结果与数据处理

为了验证上述理论分析，我们进行了一系列实验，充分证明了前文分析结果的正确性。实验光路如图 1 所示，没有任何光学元件，即基于自由空间的衍射。光源采用腰斑半径为  $\omega_0 = 0.6\text{mm}$ ，波长  $= 0.6328\mu\text{m}$  的普通 He-Ne 激光器。传感器

采用 2048 像素的线阵 CCD 光电传感器, 像素宽度  $14\mu\text{m}$ , 传感器接收面宽度  $28.7\text{mm}$ 。衍射距离可以任意选择, 为保证实验对象尺寸象尺寸与传

感器尺寸之间的匹配关系, 我们选择  $L = 450\text{mm}$  左右。为了避免 0 级衍射亮斑亮度太高, 造成传感器饱和, 我们有意使传感器偏离中心光轴。

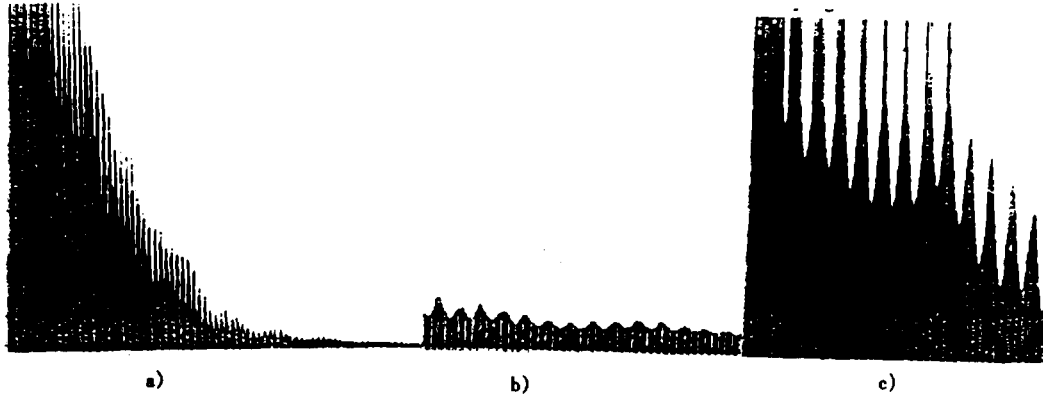


图 2 菲涅尔衍射光强分布情况

首先, 我们采用直径约为  $0.8\text{mm}$  左右的细丝进行实验, 衍射类型属于菲涅尔衍射。图 2a 是传感器表面衍射谱光强分布情况。图 2b 是经过放大的低级衍射谱光强分布情况; 图 2c 是经过放大的高级衍射谱光强分布情况。从 b、c 两图可以看出, 低级衍射谱光强比较强; 高级衍射谱光强比较弱。光强衰减与衍射级次的平方成正比。设计实际仪器时, 光强选择是非常关键的, 光强过高低级衍射谱将使传感器饱和; 光强过低将使高级次衍射谱亮度低于传感器灵敏限而损失测量信息。在我们的实验中, 清晰可辨的最低级衍射暗斑的衍射级次约为  $n = 20$  左右, 最高级约为  $m = 70$  左右。

下面我们讨论数据处理问题。按照公式(9), 第  $k$  级衍射暗斑坐标测量值为  $x'_k$

$$x'_k = (k + \zeta_k) \frac{\lambda L}{d} + \delta' X_k \quad (11)$$

式中  $\delta' X_k$  为传感器上任意一个衍射暗斑处的测量误差。

在传感器上可以得到最高与最低级衍射暗斑的坐标  $x'_m$  与  $x'_n$ , 令  $s = \lambda L/d$  (夫琅和费衍射暗斑间距),  $s' = (x'_m - x'_n)/(m - n)$ , 则

$$s' - s = \frac{\zeta_m - \zeta_n}{m - n} s + \frac{\delta'_m x - \delta'_n x}{m - n}$$

对等式右边第一项

$$\left| \frac{\zeta_m - \zeta_n}{m - n} \right| < \frac{2\zeta_{\max}}{m - n} s = 0.00018s$$

这实际上是可以忽略不计的。对第二项, 假设  $\delta'_m x$  与  $\delta'_n x$  为服从相同分布的互相独立的随机误差, 将其合成为  $\Delta' x$

$$\Delta' x = \frac{\sqrt{\delta'_m x^2 + \delta'_n x^2}}{m - n} = \frac{\sqrt{2} \delta'_k x}{m - n}$$

因此

$$\Delta s = |s' - s| \leq 0.00018s + \Delta' x$$

忽略非线性误差, 或将其按随机误差处理, 利用贝塞尔公式可以得到  $\delta' x_k$  的(有偏)估计值

$$s'_i = x'_{i+1} - x'_i \quad i = n, n+1, \dots, m-1$$

$$\delta' x_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m-n-1} (s'_i - \bar{s})^2}{m-n-2}} \quad \bar{s} = s' = \frac{1}{m-n} (x'_m - x'_n)$$

在我们的实验中(测量数据从略),  $s' = 24.61$  像素,  $\delta' x_k = 0.78$  像素, 这主要是由传感器量化误差造成。被测直径可由下式计算

$$d \frac{\lambda L}{s'}$$

测量精度可以按照下式确定

$$\left| \frac{\Delta d}{d} \right| \leq \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| + \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta s}{s} \right|$$

经过适当定标, 可以确定  $L = 450.05\text{mm}$ ,  $\Delta L/L \leq 0.0005$ ,  $d = 0.8265\text{mm}$ ,  $\Delta d \approx 0.0015d = 1.2\mu\text{m}$ 。

此外, 我们还测量了另一直径约为  $0.08\text{mm}$  左右的细丝, 衍射类型属于夫琅和费衍射。传感器上可以接收 8 个衍射暗斑, 如图 3 所示。  $s' = 241.71$  像素,  $\delta' x_k = 0.73$  像素。测量结果为  $d = 84.15\mu\text{m}$ ,  $\Delta d \approx 0.0015d = 0.12\mu\text{m}$ 。通过这两个实验可以看出, 虽然理论上菲涅尔衍射非线性误差较大, 但通过利用多组衍射暗斑间距取平均, 其相对测量精度与夫琅和费衍射基本相同。

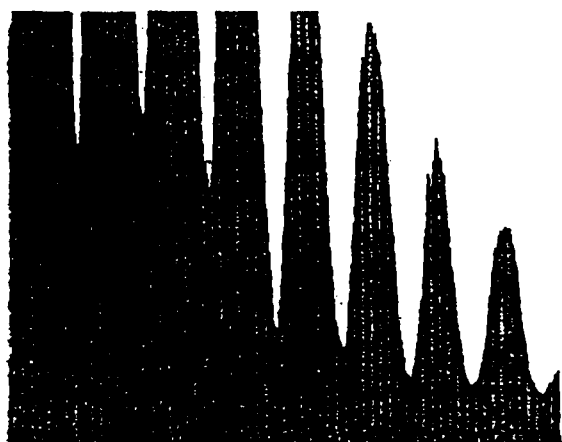


图3 夫琅和费衍射情况

### 3 总结

本文通过理论分析与实验证明,利用衍射法测量细丝直径或狭缝宽度,对于衍射类型没有特殊要求,并提出一种极为简单的测量方法,其优越性主要体现在以下四个方面

#### 3.1 简化仪器结构

从图1可以看出,测量光路非常简单,可以不用光学元件,结构尺寸也比较适中,并且选择自由度也比较大。设计实际仪器时,还可以根据被测尺寸范围和精度要求对结构参数进行适当优化。为了实现最佳光强匹配,也可以在光源之前加一组双偏振片调整光强。

#### 3.2 提高测量精度

这种测量方法的另一个主要特点是可以利用多组衍射暗斑间距取平均提高测量精度。由于不受衍射类型限制,可以根据被测参数在相当广泛的范围里选择衍射距离,把传感器的分辨能力提高到最大。

由于我们的实验条件的限制,不便于进一步优化与调整,测量精度并没有达到极限。选用分辨率更高的传感器,改善实验条件,至少可以使测量精度提高两到三倍。

#### 3.3 扩展测量范围

利用我们现有的实验装置,不加任何调整,测量范围可以达到  $d = 0.05 \sim 1\text{mm}$ 。测量上限主要受激光腰斑直径限制,如对激光光束进行适当扩大,测量范围上限还可以进一步扩大。测量下限主要受传感器尺寸限制。因为我们这种测量原理要求传感器表面至少要出现 2~3 个衍射暗斑间距,因此通过减小衍射距离,测量下限还可以进一步降低。

#### 3.4 适用于多种不同的测量对象

这种测量方法的测量对象不仅限于完全透明的狭缝与完全不透明的细丝。我们曾对光纤进行了实验,发现衍射模式与上述两种情况并不相同,而与光纤的光学特性密切相关,由于对此没有进行更为深入的研究,对测量精度无法验证,但实验数据表明,衍射暗斑间距线性度级为良好,复现性也很好,相信经过深入的理论探索,也可以实现光纤测量的实用化。

#### 参考文献

1. 冉多钢. "Study on laser diffraction measurement" [C]. SPIE PHOTONICS CHINA '98 国际会议论文集. 1998. 11
2. 叶声华. 《激光在精密计量中的应用》[M]. 北京: 机械工业出版社. 1982
3. 张凤林. 孙学珠. 《工程光学》[M]. 天津: 天津大学出版社. 1998
4. 梁铨廷. 《物理光学》[M]. 北京: 机械工业出版社. 1980
5. 徐家骅. 《计量工程光学》[M]. 北京: 机械工业出版社. 1980

## Measurement for micro size by Fresnel diffraction

Ran Duogan Cao Wenjie He Xiaodong

(Hebei University of Technology Tianjin 300130)

**Abstract** In the research and engineering applications, the measurement for width of narrow slit or diameter of filament was generally based on Fraunhofer diffraction because there is a simple function between the size to be measured and space of diffraction minima:  $s = \lambda L/d$ . In practice, the Fraunhofer diffraction are quite strict, i. e.  $L > d^2/\lambda$ , so the condition is difficult to satisfy due to the size of sensor might fault to match with the object to be measured for any given size. By analyses and experiments it has been proven that the simple function mentioned above can be extended to Fresnel diffraction field with good precise. This result is very valuable since the structure of instrument can be very simple with high accuracy and wide measurement range.

**Key word** Fraunhofer diffraction Fresnel diffraction diffraction minima