

# 低信噪比下基于 DAF 的 LFM 信号参数估计新方法

袁俊泉 皇甫堪

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 提出了一种基于序列重组提升输入信噪比, 然后利用离散模糊函数(DAF)估计 LFM 信号参数的新方法。该方法在不增加采样数据的点数, 从而保证实时处理的前提下, 可以提高参数估计的精度, 同时降低正确估计对输入信噪比的要求。该文对所提方法的基本原理及估计性能进行了理论分析, 并通过仿真实验验证了方法的有效性。

**关键词:** LFM 信号, 信噪比提升, 离散模糊函数, 参数估计

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2005)08-1193-04

## A New Method for Parameters Estimation of LFM Signal Based on DAF at Low SNR

Yuan Jun-quan Huangfu Kan

(School of Electron. Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defense Tech., Changsha 410073, China)

**Abstract** Discrete Ambiguity Function (DAF) is used to estimate parameters of LFM signal after improving SNR based on recomposing sequences. This method does not add the number of the sampling data and ensures real-time processing, but can improve the precision of parameters estimation and reduce the need for input Signal-to-Noise Ratio(SNR) in order to estimating exactly. This paper analyses theoretically its basic principle and performance. Simulation results prove the validity of this method.

**Key words** LFM signal, SNR improvement, Discrete ambiguity function, Parameters estimation

### 1 引言

LFM 信号作为大时宽带宽积信号, 广泛应用于通信、雷达及声纳等信息系统中。一般情况下, 探测系统的目标多普勒频率与目标速度近似成正比, 而当目标作等加速运动时, 回波即为 LFM 信号。要准确地获取目标的运动信息, 对其参数准确估计显得非常重要。

LFM 信号又称 chirp 信号, 有关 chirp 信号参数估计的方法大致可以分为以下几种: 最大似然估计<sup>[1]</sup>、迭代估计法<sup>[2,3]</sup>、离散 chirp 傅里叶变换(DCFT)分析法<sup>[4]</sup>及离散多项式相位变换(DPT)分析法<sup>[5,6]</sup>。最大似然估计法虽然能够得到参数的最佳估计, 但该方法由于计算复杂, 所以很少被采用。而迭代估计法是基于高信噪比的假设条件下, 将加性噪声看作相位项得到参数的估计。对于现代军事设备, 特别是应用于远场的设备, 该条件很难满足。DCFT 分析法需对 LFM 信号进行二维搜索, 因而计算量比较大, 且该估计方法要求总采样数必须为质数。

利用 DPT 分析法估计高阶多项式相位信号的参数是国际上研究的热点之一, 且讨论最多的仍然为二阶多项式相位信号(即 LFM 信号)的参数估计问题。文献 [6] 对基于二阶 DPT(即离散模糊函数(DAF))估计 LFM 信号的方法进行

了讨论, 指出该参数估计方法所适用的最低输出信噪比门限。该信噪比门限与输入信噪比及采样数据的点数有关, 增大采样数据的点数或提升输入信噪比均能改善参数估计的性能。但增大采样数据的点数, 必然带来计算量的成倍增加, 这不利于实时信号处理。如果能够在利用 DAF 估计 LFM 信号参数前提升输入信噪比, 将对参数估计性能及满足分析门限要求等方面带来很大的好处。鉴于此思想, 本文提出了一种基于序列重组提升输入信噪比, 然后利用 DAF 估计 LFM 信号参数的新方法。

### 2 问题描述

离散观测模型为

$$z_n = s_n + w_n, 1 \leq n \leq N \quad (1)$$

其中  $s_n = b_0 e^{j(a_0 + a_1 \Delta n + a_2 \Delta^2 n^2)}$  为 LFM 信号,  $\Delta$  为采样间隔,  $N$  为采样点数。  $w_n$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的复高斯白噪声。待估计的参数为幅度  $b_0$  及相位系数  $\{a_0, a_1, a_2\}$ 。

观测序列  $z_n$  的 DAF 定义为

$$DAF(z, \omega, \tau) = \sum_{n=1}^{N-\tau} z_{n+\tau} z_n^* e^{-j\omega \Delta n} \quad (2)$$

基于 DAF 估计 LFM 信号参数时, 是分级实现的, 具体实现过程如下:

(1)选择某个固定的 $\tau$ 值,基于DAF得到LFM信号最高阶相位参数 $a_2$ 的估计值 $\hat{a}_2$ ,对于LFM信号的参数估计来说, $\tau$ 的最佳值为 $N/2$ 。

(2)利用估计得到的 $\hat{a}_2$ ,经解线调后,基于DFT得到次高阶相位参数 $a_1$ 的估计值 $\hat{a}_1$ 。

(3)最后估计相位参数 $a_0$ 和幅度 $b_0$ 。

可以看出,基于DAF估计LFM信号参数主要是通过FFT来实现的。而基于FFT的估计方法,影响估计精度的最重要的因子是输出信噪比(OSNR)。且对于LFM信号参数估计,OSNR对高阶参数估计的影响要高于对低阶参数估计的影响。

基于DAF估计LFM信号最高阶相位参数 $a_2$ 时的OSNR为<sup>[6]</sup>

$$\text{OSNR} = \frac{N \cdot \text{ISNR}}{4(1+1/2\text{ISNR})} \quad (3)$$

可以看出,该OSNR与总的采样点数 $N$ 及输入信噪比 $\text{ISNR} = b_0^2/\sigma^2$ 有关。考虑到估计算法计算量的影响,总的采样点数 $N$ 不宜取得过大。因而在保证计算量的基础上,适当选取采样点数 $N$ ,提升ISNR可以改善OSNR,从而提高参数估计的精度。

### 3 基于序列重组提升信噪比

#### 3.1 序列重组的原则

借鉴平均周期图的思想,将原来 $N$ 点的观测序列分解成 $N_2 \times N_1$ 的矩阵,即

$$z(n_2, n_1) = z(n_2 N_1 + n_1), \quad 1 \leq n_1 \leq N_1, \quad 1 \leq n_2 \leq N_2 \quad (4)$$

分别计算每一行的FFT,然后对 $N_2$ 行的FFT结果取平均并搜峰,最后利用 $N_2$ 个峰值点组成新序列。这里要注意的是,序列分解时应遵循以下原则:通过增大 $n_1$ 方向上多普勒匹配滤波器的分析带宽,使信号的能量集中在一根谱线上,同时在 $n_2$ 方向由加速度引起的谱线的移动不超过一根谱线。

根据这一原则,我们对 $N$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ 的关系进行分析。

由加速度 $a$ 引起的 $N$ 点观测序列的带宽为 $\Delta f_a = 2aNf_0/cf_s$ ,  $f_0$ 为载波频率,  $f_s$ 为采样频率,  $c$ 为光速。 $N_1$ 点FFT对应的频谱分辨率为 $\Delta f = f_s/N_1$ 。由序列拆分的原则,应该有 $\Delta f_a \leq \Delta f$ ,即

$$N_2 \leq (cf_s^2)/(2aN_1^2 f_0) \quad (5)$$

#### 3.2 序列重组得到的新序列及信噪比

将LFM信号模型代入式(4)得

$$s(n_2, n_1) = b_0 e^{ja_0} e^{j(a_1 \Delta n_2 N_1 + a_2 \Delta^2 N_1^2 n_2^2)} e^{j[a_2 \Delta^2 n_1^2 + (a_1 \Delta + 2a_2 \Delta^2 N_1 n_2) n_1]} \quad (6)$$

由序列分解的原则可知,对应 $N_1$ 点的序列,加速度引起的谱线展宽不超过一根谱线,即上式可以近似为

$$s(n_2, n_1) \approx b_0 e^{ja_0} e^{j(a_1 \Delta n_2 N_1 + a_2 \Delta^2 N_1^2 n_2^2)} e^{j(a_1 \Delta + 2a_2 \Delta^2 N_1 n_2) n_1} \quad (7)$$

在 $n_1$ 方向上进行傅里叶变换,得

$$S(n_2, \omega_1) \approx N_1 b_0 e^{ja_0} e^{j \frac{N_1 - 1}{2} (a_1 - \omega_1) \Delta} e^{j[a_2 \Delta^2 N_1^2 n_2^2 + (a_1 \Delta N_1 + a_2 \Delta^2 N_1 (N_1 - 1)) n_2]} \quad (8)$$

对 $N_2$ 行的FFT结果取平均并搜峰得到 $\omega_{1\max}$ 对应的新序列为

$$h(m) = N_1 b_0 e^{ja_0} e^{j \frac{N_1 - 1}{2} (a_1 - \omega_{1\max}) \Delta} e^{j[a_2 \Delta^2 N_1^2 m^2 + (a_1 \Delta N_1 + a_2 \Delta^2 N_1 (N_1 - 1)) m]}, \quad 1 \leq m \leq N_2 \quad (9)$$

可以看出,新序列保留了LFM信号的全部参数特征。

由随机信号分析的理论可知,均值为零、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声 $w_n$ 经 $N_1$ 点FFT分析后在频点 $\omega_{1\max}$ 处仍为均值为零、方差为 $N_1 \sigma^2$ 的高斯白噪声,我们用 $v_m$ 来表示。则经序列重组后得到的观测序列 $r_m$ 为

$$r_m = h_m + v_m, \quad 1 \leq m \leq N_2 \quad (10)$$

且新的观测序列的信噪比为 $\text{SNR}_{\text{new}} \approx N_1 b_0^2 / \sigma^2$ ,即相对于ISNR近似提高了 $N_1$ 倍。

### 4 基于DAF的参数估计方法及其性能分析

新观测序列中LFM信号 $h_m$ 的DAF为

$$\text{DAF}(h, \omega_2, \tau) = N_1^2 b_0^2 K \sum_{m=1}^{N_2 - \tau} e^{j(2\Delta^2 N_1^2 a_2 \tau - \omega_2 \Delta) m} \quad (11)$$

式中 $K = e^{j(a_2 \Delta^2 N_1^2 \tau^2 + (a_1 \Delta N_1 + a_2 \Delta^2 N_1 (N_1 - 1)) \tau)}$ 。

由式(11)可以看出,模糊函数 $\text{DAF}(h, \omega_2, \tau)$ 在 $\omega_{2\max} = 2\Delta N_1^2 \tau a_2$ 处取得最大值,即

$$\hat{a}_2 = \frac{\omega_{2\max}}{2\Delta N_1^2 \tau} \quad (12)$$

利用估计得到的 $\hat{a}_2$ 对观测序列 $z_n$ 进行解线调得

$$z_n^{(1)} = z_n e^{-j\hat{a}_2 \Delta^2 n^2} \quad (13)$$

则可得到参数 $a_1$ 的估计为

$$\hat{a}_1 = \max \left\{ \text{DFT}(z^{(1)}, \omega) \right\} \quad (14)$$

利用估计得到的 $\hat{a}_1$ 对观测序列 $z_n^{(1)}$ 进行补偿得

$$z_n^{(2)} = z_n^{(1)} e^{-j\hat{a}_1 \Delta^2 n^2} \quad (15)$$

令

$$\hat{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n^{(2)} \quad (16)$$

则

$$\hat{a}_0 = \arg \{ \hat{v} \} = \text{Im} \{ \log \hat{v} \} \quad (17)$$

$$\hat{b}_0 = \hat{v} e^{-j\hat{a}_0} = e^{\text{Re} \{ \log \hat{v} \}} \quad (18)$$

基于随机过程的一阶扰动分析理论,可以得到上述参数估计方法的性能。若取 $\tau = N_2/2$ ,参数 $\hat{a}_2$ ,  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{b}_0$ 和 $\hat{a}_0$ 的估计均方差分别为

$$E\{(\delta a_2)^2\} \approx \left[ 1 + \frac{1}{2N_1 \text{SNR}} \right] \frac{96}{\text{SNR}^4 N^5} \quad (19)$$

$$E\{(\delta a_1)^2\} \approx \left[ \frac{17}{16} + \frac{1}{2N_1 \text{SNR}} \right] \frac{96}{\text{SNR} \Delta^2 N^3} \quad (20)$$

$$E\{(\delta b_0)^2\} \approx \frac{b_0^2}{2N^2} E\{\psi\psi^*\} = \frac{\sigma^2}{2N} \quad (21)$$

$$E\{(\delta a_0)^2\} \approx \left[ \frac{14}{3} + \frac{4}{3N_1 \text{SNR}} \right] \frac{1}{N \text{SNR}} \quad (22)$$

将式(19)~式(22)的结果与文献 [6] 相应的结果比较可以看出,除了幅度  $\hat{b}_0$  估计的均方差相同外,其它参数的估计精度均得到了相应的提高。另外,文献 [7] 给出了参数  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{b}_0$  和  $\hat{a}_0$  估计的克拉-美罗下界(CRLB)。

### 5 信噪比门限分析

基于扰动分析理论分析参数估计方法的性能时,通常采用一阶泰勒级数近似,而这种近似是基于估计误差足够小的基础上。而基于 FFT 的估计方法,影响估计误差大小的最重要的因子是 OSNR。当 OSNR 低于某个门限时,估计误差变大,从而一阶泰勒近似不再成立,估计方法也不再给出有效估计。

文献 [8] 的结果表明,基于 FFT 的估计方法,其输出信噪比门限通常取为 13~14dB。此门限值在雷达及其它领域被公认为信噪比门限准则。因为

$$E\left\{ \left[ \text{DAF}(r, 2\Delta N_1^2 \tau a_2, \tau) \right]_{\tau=N_2/2}^2 \right\} = \frac{1}{4} N^2 N_1^2 b_0^4 + \frac{1}{2} N N_1^2 \left( 2b_0^2 \sigma^2 + \frac{1}{N_1} \sigma^4 \right) \quad (23)$$

式中第 1 项为信号能量,第 2 项为噪声方差。

于是,可得到估计  $\hat{a}_2$  时的 OSNR<sup>(2)</sup> 为

$$\text{OSNR}^{(2)} = \frac{N \cdot \text{ISNR}}{4 \left[ 1 + \frac{1}{2N_1} \cdot \text{ISNR} \right]} \quad (24)$$

若 OSNR 门限要求为  $T$ , 则 ISNR 必然满足

$$\text{ISNR} \geq \frac{1}{N} \left( 2T + \sqrt{4T^2 + 2N_2 T} \right) \quad (25)$$

取 OSNR<sup>(2)</sup> = 25 (约 14dB), 则最低 ISNR 要求为

$$\text{ISNR}_{\min} = \frac{1}{N} \left( 50 + \sqrt{2500 + 50N_2} \right) \quad (26)$$

### 6 仿真研究

对于 LFM 信号,我们通常最关心的两个参数是:起始频率  $f_{a0}$  与调频率  $\mu$ 。仿真产生如下的零中频多普勒信号:

$$z(n) = e^{j \left[ 2\pi \left( f_{a0} n T_s + \frac{1}{2} \mu n^2 T_s^2 \right) \right]} + w(n), \quad n = 1, \dots, N$$

式中  $f_{a0} = 2v_0 f_0 / c$ ,  $\mu = 2af_0 / c$ 。假设机动目标的初速  $v_0$  为 100m/s, 加速度  $a$  为 280m/s<sup>2</sup>, 采样频率  $f_s$  为 100kHz, 总的采样点数  $N$  为 4096, 发射信号的频率  $f_0$  为 10GHz。  $w(n)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的复高斯白噪声,其方差随着 ISNR 的

改变而改变。根据序列重组的原则,选取  $N_1 = 128$ ,  $N_2 = 32$ 。

为了验证本文提出的参数估计方法的性能,我们做了如下两个蒙特卡罗仿真实验,仿真实验次数为 1000 次。实验中称本文的方法为 Y-DAF, 而称文献 [6] 的方法为 S-DAF。当 OSNR 门限取为 25 时,对于总采样点数  $N$  为 4096 的序列,基于 S-DAF 估计方法所需的最小 ISNR 大约为 -9dB, 而基于 Y-DAF 估计方法所需的最小 ISNR 大约为 -15.5dB。

#### 6.1 高输入信噪比下两种估计方法的比较

当 ISNR 从 -8dB 变化到 10dB 时,图 1 和图 2 分别给出了基于 S-DAF 方法和 Y-DAF 方法估计得到的初速  $\hat{v}_0$  和加速度  $\hat{a}$  的误差均方根与信噪比的关系曲线,图中并与其相应的 CRLB 进行了比较。从图中可以看出,由于仿真 ISNR 范围高于正确估计所需的最低 ISNR, 所以两种方法均能给出参数的正确估计,且两种估计方法均与 CRLB 具有渐近一致性,但基于 Y-DAF 的估计方法优于基于 S-DAF 的估计方法。

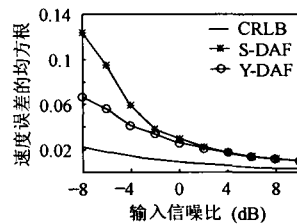


图 1 初速  $\hat{v}_0$  的估计误差均方根

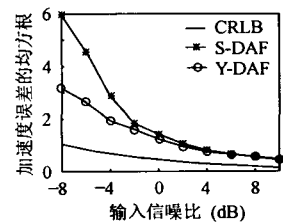


图 2 加速度  $\hat{a}$  的估计误差均方根

#### 6.2 低输入信噪比下两种估计方法的比较

当 ISNR 继续降低, 降到低于 S-DAF 方法正确估计所需最低 ISNR 门限以下时, 其仿真结果如图 3 和图 4 所示, 此时输入信噪比变化范围为 -12dB ~ -8dB。图 3 为初速  $\hat{v}_0$  的估计误差均方根与信噪比的关系曲线, 图 4 为加速度  $\hat{a}$  的估计误差均方根与信噪比的关系曲线。从图中可以看出, 当 ISNR 低于 S-DAF 方法正确估计所需最低 ISNR 门限时, 基于 S-DAF 估计方法不再给出参数的正确估计, 而基于 Y-DAF 估计方法仍可给出参数的正确估计, 且与 CRLB 比较接近。

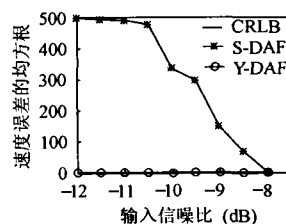


图 3 初速  $\hat{v}_0$  的估计误差均方根

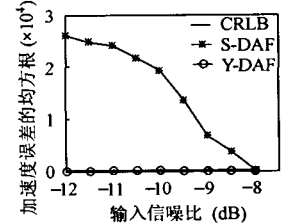


图 4 加速度  $\hat{a}$  的估计误差均方根

### 7 结束语

本文通过研究基于离散模糊函数估计 LFM 信号参数所需输出信噪比与输入信噪比及采样点数的关系, 在保证采样

点数不变即满足实时处理要求的前提下,提出了一种基于序列重组提升输入信噪比,然后利用离散模糊函数估计 LFM 信号参数的新方法。通过对该估计方法的理论分析,指出在输出信噪比门限及采样点数相同时,新估计方法比原来的估计方法对输入信噪比的要求降低了近 6.5dB,仿真结果也验证了新估计方法的有效性。

### 参 考 文 献

- [1] Abatzoglou T J. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate. *IEEE Trans. on AES*, 1986, 22(6): 708 – 715.
- [2] Ikram M Z, Abed-Meraim K, Hua Y B. Estimating the parameters of chirp signals: an iterative approach. *IEEE Trans. on SP*, 1998, 46(12): 3436 – 3441.
- [3] Djuric P M, Kay S M. Parameter estimation of chirp signals. *IEEE Trans. on ASSP*, 1990, 38(12): 2118 – 2126.
- [4] Xia X G. Discrete chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation. *IEEE Trans. on SP*, 2000, 48(11): 3122 – 3133.
- [5] Peleg S, Porat B. Estimation and classification of polynomial-phase signals. *IEEE Trans. on IT*, 1991, 37(2): 422 – 430.
- [6] Peleg S, Porat B. Linear FM signal parameter estimation from discrete time observations. *IEEE Trans. on AES*, 1991, 27(4): 607 – 616.
- [7] Peleg S, Porat B. The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(3): 749 – 752.
- [8] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Trans. on IT*, 1974, 20(5): 591 – 598.

袁俊泉: 男, 1976 年生, 讲师, 研究方向为雷达信号处理、信号检测与参数估计.

皇甫堪: 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理.