

# TCM 好码的结构分析及构造

刘宏宇 杨军 张尔扬  
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** TCM(Trellis Coded Modulation)好码的具体结构多种多样, 该文从网格图的角度分析了 TCM 好码可能的结构. 并应用分析结果构造了一种 TCM 好码的构造算法. 它不仅缩小了所搜范围, 提高了搜索效率, 而且得到的结果性能较好.

**关键词:** TCM; 卷积码; 网格图

**中图分类号:** TN911.22

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2007)05-1115-04

## The Structure Analysis and Construction of Good TCM Codes

Liu Hong-yu Yang Jun Zhang Er-yang  
(The Electronic Science and Engineering Institute, NUDT, Changsha 410073, China)

**Abstract:** There are various structures of good TCM codes. And based on the trellis map, the most possible structure of good TCM codes is analyzed. From the results, a construction algorithm is then designed. Since the searching space is greatly reduced, this method has higher efficiency and can produce codes of high performance compared with the classic algorithm.

**Key words:** TCM; Convolutional code; Trellis map

### 1 前言

TCM具有较高的带宽利用率和功率利用率, 因此自从这种编码与调制相结合的方式被提出以来<sup>[1-3]</sup>, 它一直受到人们的重视. TCM通常的结构是在卷积码的后端加上调制信号点的映射. 因此寻求一个好的TCM码型, 需要同时考虑其调制方式, 调制信号点集的分割方式, 以及卷积码的结构.

对好码的搜索一般有两种方法<sup>[4]</sup>. 一种是在可能的构成参数空间进行穷尽搜索, 从而找出满足条件的码结构. 但是随着卷积码复杂度的增加, 搜索空间是呈几何级数扩大的, 因此这种方法只用在一些相对简单的码结构的搜索上. 另外一种是通过一定算法, 将搜索局限在具有很大可能成为好码的参数空间, 通常限制的空间范围只是整个参数空间的很小一部分, 这能够极大地提高搜索效率. 但是这个范围不一定包含最优的码结构, 所以搜索空间的确定方法很重要. 本文将从第二类方法着手, 通过分析TCM好码的结构, 构造一种高效实用的搜索方法, 并将这种方法应用在 16 状态数的四维TCM-8PSK好码的获取上, 得到的结果不仅数量多, 而且经过验证具有不逊于文献[3]的优良性能, 同时具有各种相位旋转不变性.

### 2 TCM 码的结构模型及分析

从网格图上来看, 卷积码的编码过程是根据不同的输入和当前状态, 依照不同的分支进入下一时刻的不同状态的过

程. 不停地重复这一过程, 就形成了一条连续不断的编码路径. 依据这一思想, 可以建立以下状态转换模型.

假设二进制卷积码编码器有  $v$  个寄存器,  $k$  个输入, 则它有  $2^v$  个状态. 第  $n$  时刻的状态为  $\mathbf{R}^{(n)} = (r_{v-1}^{(n)} r_{v-2}^{(n)} \cdots r_0^{(n)})^T$ , 其中  $r_i^{(n)}$  是第  $i$  个寄存器的状态 ( $r_i^{(n)} \in \{0,1\}$ ); 第  $n$  时刻的输入为  $\boldsymbol{\lambda}^{(n)} = (\lambda_{k-1}^{(n)} \lambda_{k-2}^{(n)} \cdots \lambda_0^{(n)})^T$ , 则状态间的转移关系可以表述为

$$\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{g}_{\lambda,R} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} + \mathbf{g}_R \mathbf{R}^{(n-1)} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{g}_{\lambda,R}$  是  $v \times k$  矩阵, 表征当前输入与状态之间的关系,  $\mathbf{g}_R$  是  $v \times v$  矩阵, 表征前一时刻各状态与当前状态的关系. 以上各矩阵的元素取值均为 0 或 1, 加法等同于“异或”操作.

在无限延展的平行网格图中, 任意两条不重合路径中的不同支路数, 我们称为分叉支路数. 如图 1 中, 路径  $ABCD$  和  $A E F D$  的分叉支路数为 3, 若这个网格图中所有不同路径之间的分叉支路数都不小于 3, 那么这个网格图的最小分叉支路数就是 3. 在构造卷积码时, 我们希望它的平方自由距离  $d_{\text{free}}^2$  最大, 而  $d_{\text{free}}^2$  一般是出现在具有最小分叉支路数的路径对之间的. 可以想象, 最小分叉支路数越大的卷积码就更加有可能成为好码. 由于网格图具有对称性, 总可以找到从

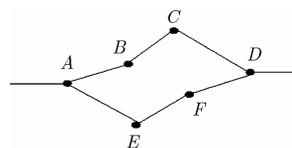


图1 最小分叉支路数

0 状态(全零状态)出发, 再回到全零状态的具有最小分叉支

路数的路径(全零路径除外)。

假设最小分叉支路数为  $n$  (中间经过  $n-1$  个状态), 则

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0 + \mathbf{g}_R \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_1 = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_1 + \mathbf{g}_R \mathbf{R}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_n + \mathbf{g}_R \mathbf{R}_{n-2} \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0 + \mathbf{g}_{R,\lambda} \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_{n-2} + \mathbf{g}_R^2 \mathbf{R}_{n-3} \\ \vdots \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0 + \mathbf{g}_{R,\lambda} \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_{n-2} + \mathbf{g}_{R,\lambda}^2 \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_{n-3} + \cdots + \mathbf{g}_R^{n-1} \lambda_0 \end{cases} \Rightarrow$$

上式中  $\mathbf{R}_i (0 \leq i \leq n-2)$  是非零状态, 即  $\forall i, \mathbf{R}_i \neq \mathbf{0}$ 。上式表示路径从  $\mathbf{0}$  状态(全零状态)出发, 依次经过状态  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{n-2}$ , 最后仍然回到  $\mathbf{0}$  状态。

对于有效的卷积码, 当  $n=1$  时(指从  $\mathbf{0}$  状态到  $\mathbf{0}$  状态), 有

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0 \quad (2)$$

这时的编码器输入必须为全零, 除此之外的非全零编码器输入都将导致产生从  $\mathbf{0}$  状态进入其它非全零状态的支路。这相当于式(2)除了  $\lambda_0 = \{0, 0, \dots, 0\}^T$  外, 无任何非零解存在。由于  $\mathbf{g}_{\lambda,R}$  是  $v \times k$  矩阵(假设  $v > k$ ), 所以

$$\text{rank}(\mathbf{g}_{R,\lambda}) = k \quad (3)$$

式(3)保证了最小分叉支路的路径从一开始就离开了全零路径。

当  $n=2$  时, 有  $\mathbf{0} = \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0 + \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda} \lambda_0$ 。此时, 必须有  $\lambda_0 \neq \{0, 0, \dots, 0\}^T$  且  $\lambda_0 \neq \{0, 0, \dots, 0\}^T$ , 上式存在非零解, 即矩阵  $(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda})$  的所有列向量是线性相关的。

可以由归纳法证明:

**结论 1** 卷积码网格满足以下两个条件时它的最小分叉支路数为  $n$ ;

(1) 矩阵  $(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \dots, \mathbf{g}_R^{n-2} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda})$  的所有列向量是线性无关的;

(2) 矩阵  $(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \dots, \mathbf{g}_R^{n-2} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R^{n-1} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda})$  的所有列向量是线性相关的。

条件(1)是为了保证不存在最小分叉支路中的支路长度  $< n$  的分叉支路, 即保证最小分叉支路长度  $> n-1$ ; 条件(2)是为了保证存在支路数为  $n$  的最小分叉支路。

矩阵  $(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \dots, \mathbf{g}_R^{n-2} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R^{n-1} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda})$  的行向量长度为  $v$ , 所以  $\text{rank}\{(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \dots, \mathbf{g}_R^{n-2} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R^{n-1} \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda})\} \leq v$ 。能同时满足结论 1 的两个条件, 而且使  $n$  尽量大, 那么可以使  $\mathbf{g}_R^i \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}$  随着  $i$  而增大, 且每次增加一个新的  $v$  维空间的基向量, 这样必须有  $i \leq v-k$ 。综合考虑式(3), 那么满足结论 1 条件的  $n$  最大只可能是  $v-k+1$ , 因此有结论 2。

**结论 2** 卷积码的网格图中最大的最小分叉支路长度不大于  $v-k+1$ 。

### 3 度量及平行路径的处理

TCM 一般是  $n/(n+1)$  编码, 如图 2 所示。有  $(n-k)$  个比特不参与编码而直接输出, 这在网格图上表现为每一条支路都会有  $2^{n-k}$  条平行路径。在译码时, 需要在平行路径间进行直接判决。所以, 需考虑的距离特性除了去除  $(n-k)$  个直接输出比特的  $k/(k+1)$  编码器所得到的网格图的平方自由距离外, 还有平行路径间的平方距离。

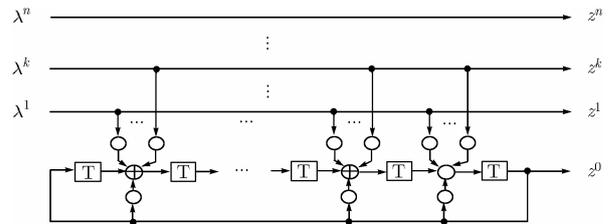


图2  $n/(n+1)$ 码率TCM编码器结构

假设在没有平行路径的网格图中, 两条具有最小分叉路径数  $m$  的路径为  $P_a$  和  $P_b$ 。在对应每一个支路具有  $s$  条平行路径的网格上, 在  $P_a$  的第  $i$  个分叉支路上的平行路径为  $p_{ai}^j (j \in \{1, 2, \dots, s\})$ 。那么度量可以如下计算:

$$\begin{aligned} W^* &= \min\{\text{Dist}(P_a, P_b)\} \\ &= \min_{j \in \{1, \dots, s\}} \left\{ \min_{k \in \{1, \dots, s\}} \left\{ \text{Dist} \left( \sum_{i=1}^m p_{ai}^j, \sum_{i=1}^m p_{bi}^k \right) \right\} \right\} \\ &= \min_j \left\{ \min_k \left\{ \sum_{i=1}^m \text{Dist}(p_{ai}^j, p_{bi}^k) \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \min_j \left\{ \min_k \left\{ \text{Dist}(p_{ai}^j, p_{bi}^k) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

可见, 按照式(4)取度量差, 就可以如同没有平行路径的网格图一样获取自由距离  $d_{\text{free}}^2$ 。但在 TCM 编码中, 平行路径间的距离  $d_p^2$  与  $d_{\text{free}}^2$  具有同等重要的地位。 $d_p^2$  是由信号点集映射方案来保证的。若  $d_{\text{free}}^2 > d_p^2$ , 则卷积码的性能主要由  $d_p^2$  决定。

### 4 TCM 好码搜索方法

由于对整个可能的卷积码结构参数空间进行穷尽搜索是一种低效率的方式, 所以首先如何确定一个尽可能小的范围非常重要。通过第 2 节对 TCM 好码的结构分析可以知道, 结构满足第 2 节结论 1 的条件, 使编码结构的最小分叉支路数能达到它的上限  $v-k+1$  的码极有可能是好码。最好码结构能满足:

$$\left. \begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{g}_{R,\lambda}, \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}, \dots, \mathbf{g}_R^i \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}) &= k + i \\ \text{rank}(\mathbf{g}_{R,\lambda}) &= k \end{aligned} \right\},$$

( $k$  是参与编码的比特数) (5)

一般 TCM 中参与编码的比特数比较少, 所以  $k$  较小。在确定搜索范围时首先保证  $\text{rank}(\mathbf{g}_{R,\lambda}) = k$ , 这有  $\binom{2^{v-1}-1}{k}$  种

情形。对  $n/(n+1)$  码率 TCM 编码(见图 2),  $\mathbf{g}_R$  可以作以下分解:

$$\mathbf{g}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{I} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{g}_r = \mathbf{g}_b + \mathbf{g}_r \quad (6)$$

其中如非特别标明,  $\mathbf{0}$  是  $1 \times (v-1)$  行向量,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,

$$\mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(v-1) \times 1} & \mathbf{0}_{(v-1) \times (v-1)} \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ 这里的列向量 } \mathbf{a} \text{ 的元素只能为 } 0 \text{ 或 } 1.$$

注意到  $\mathbf{g}_R \cdot \mathbf{A} = \mathbf{g}_b \cdot \mathbf{A} + \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{A}$ 。第 1 项  $\mathbf{g}_b \cdot \mathbf{A}$  表示将矩阵  $\mathbf{A}$  的行向量循环上移一行; 若  $\mathbf{g}_r$  中的  $a_i = 1 (i < v)$  时, 则  $\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{A}$  表示将矩阵  $\mathbf{A}$  的第 1 行放置在乘积的第  $i$  行, 而对于所有的  $a_j = 0 (j < v \text{ 且 } i \neq j)$ , 则乘积的第  $j$  行为全零向量。

从第 2 节的分析得知, 当使  $\mathbf{g}_R^i \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}$  随着  $i$  的增大, 每次增加一个新的  $v$  维空间的基相量时, 可以得到具有最大的最小分叉支路数的结构。当  $i=1$  时,  $\mathbf{g}_R \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda} = \mathbf{g}_b \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda} + \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}$ 。设  $\mathbf{g}_{R,\lambda}$  中, 经过循环上(下)移, 总可以找到一个连续的  $k$  阶满秩方阵。假设这个方阵的第 1 行在原来的  $\mathbf{g}_{R,\lambda}$  中的行号为第  $u$  行, 那么  $\mathbf{g}_b \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}$  将使第  $((u-1) \bmod v)$  行产生新的基向量。只要第 2 项  $\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_{R,\lambda}$  不产生新的基向量即可。特别地, 当  $u > 1$ , 且  $\mathbf{g}_{R,\lambda}$  的第 1 行为全零向量时,  $\mathbf{a}$  可以任意取 ( $a_i \in \{0,1\}$ ), 此时  $\mathbf{g}_r$  有  $2^{v-1}$  种取法。随着  $i$  的增加, 通过类似以上分析可知, 为了使与  $\mathbf{g}_r$  相乘的项在任意  $i \in \{0,1,\dots,(v-k-1)\}$  都不增加新的基向量, 只能在  $\mathbf{g}_r$  中允许  $a_i (i \in \{u, (u+1), \dots, (u+k-1)\})$  等于 1, 故  $\mathbf{g}_r$  只有  $2^k$  种取法。

若  $\mathbf{g}_{R,\lambda}$  中, 经过循环上(下)移, 无法找到一个连续的  $k$  阶满秩方阵(假设其中的第  $j$  行可以由其它行线性表出)。那么, 经过  $\mathbf{g}_b$  的上移后, 将会产生多于一个新的基向量, 这个基向量无法总是由  $\mathbf{g}_r$  通过引用原来的第 1 行消去, 那么也得不到具有最大的最小分叉数的结构。因此这种情况我们不予考虑。

那么在前一种情况下, 总的搜索可能结构有

$$2^k \cdot \binom{(2^{v-1}-1)}{k} \text{ 种。}$$

搜索范围确定后, 可以进行  $d_p^2$  和  $d_{\text{free}}^2$  的搜索。搜索算法可以借鉴文献[5]的双向经典算法, 同时结合 Viterbi 算法来简化。在这一过程中, 文献[6]提出的 3 条简化原则依然有效。令  $d_e^2 = \min\{d_{\text{free}}^2, d_p^2\}$ ,  $d_m^2 = \max\{d_{\text{free}}^2, d_p^2\}$ , 搜索的结果按照  $d_e^2$  从大到小保留, 在  $d_e^2$  相同的情形下, 按照  $d_m^2$  从大到小保留。最终保留  $S$  组编成候选表。对于上述候选表, 可以用仿真来确认其性能。

### 5 举例

本文以寻找码率为 5/6 的四维 TCM-SPSK 好码为例, 复杂度定为编码器具有 16 状态数。信号点集的分割映射方案参照文献[3]。应用上述方法搜索可以得到 98 个具有最大平方欧氏距离 3.515 的结果。在此  $v=4$ , 相对于每符号 2.5bit 信息的未编码四维 8PSK 的渐进增益为 4.77dB;  $\text{Inv}$  表示码具有相位透明特性的最小角度。表 1 列出了其中 15 个结果。

表 1 搜索结果

$\tilde{k}$	$h^0$	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$\text{Inv}(\circ)$	$d_{\text{free}}^2$
2	21	06	16	—	45	3.515
2 <sup>(1)</sup>	21	14	16	—	45	3.515
3	21	16	02	12	90	3.515
3 <sup>(2)</sup>	21	16	04	14	90	3.515
2*	23	12	16	—	45	3.515
2	23	14	02	—	45	3.515
3	23	10	14	12	90	3.515
3	23	10	12	14	90	3.515
2	31	06	16	—	45	3.515
2	31	12	16	—	45	3.515
2	31	06	10	—	45	3.515
3	25	16	12	14	90	3.515
3	25	16	14	12	90	3.515
2 <sup>(4)</sup>	27	14	02	—	45	3.515
2	27	06	16	—	45	3.515

在表 1 中任意选取 4 种码结构进行仿真(已用上标标出), 其中用\*标识的与文献[3]中 Table XXIV 的结果相同。图 3 为仿真误码率曲线。可知表 1 结果的性能并不逊于文献[3]的结果, 但是数量要大得多。

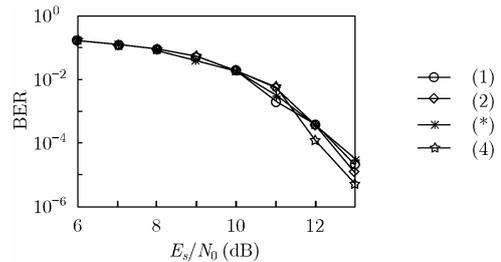


图 3 误码率仿真曲线

### 6 结束语

TCM 好码与其结构中的最小分叉支路数的大小关系密切, 具有最大的最小分叉支路数的码结构最有可能成为好码。按照第 2 节结论 1 的构造方法, 再结合  $n/(n+1)$  码率的 TCM 码的特点可以构造出高效率的搜索算法。从举例中可以看到, 应用本文的方法搜索的范围小, 效率高, 得到的结果不仅数量多, 而且性能优良。

### 参考文献

[1] Ungerboeck G. Trellis-coded modulation with redundant

- signal sets part I: Introduction. *IEEE Communications Magazine*, 1987, 25(2): 5-11.
- [2] Ungerboeck G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets part II: State of the art. *IEEE Communications Magazine*, 1987, 25(2): 12-21.
- [3] Pietrobon S S and Lafanechere A, *et al.* Trellis-coded multidimensional phase modulation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1990, IT-36(1): 63-89.
- [4] Porath J E and Aulin T. Algorithm construction of trellis code. *IEEE Trans. on Communications*, 1993, 41(5): 649-654.
- [5] Larsen K J. Comment on "An efficient algorithm for computing free distance". *IEEE Trans. on Information Theory*, 1973, IT-19(4): 577-579.
- [6] Ungerboeck G. Channel coding with multilevel/phase signals. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1982, IT-28(1): 55-67.
- 刘宏宇: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向为卫星高速数据传输、软件无线电、SOC 等.
- 杨 军: 男, 1977 年生, 博士生, 研究方向为卫星高速数据传输、高速编译码等.
- 张尔扬: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会高级会员, 主要研究方向为空间通信、军用无线通信与网络技术.