

## OFDM 系统功率和比特分配算法研究

余官定 张朝阳 仇佩亮

(浙江大学信电系信息与通信工程研究所 杭州 310027)

**摘要:** 该文研究 OFDM 系统在总功率和误比特率限定下最大化传输速率的问题, 并且考虑实际系统中整数比特的限制, 提出基于灌水法则的两种比特分配算法——改进的贪婪算法和对分灌水线搜索法, 两种算法在计算复杂度上分别比贪婪算法和迭代灌水线搜索法小。仿真结果表明, 改进的贪婪算法在性能上十分接近于贪婪算法, 但是计算复杂度仅是贪婪算法的 10%~30%, 而对分灌水线搜索法在信噪比大于 10dB 的时候只要 5~7 次迭代便可以达到与贪婪算法只相差 0.5% 的性能。

**关键词:** 比特分配, OFDM, 贪婪算法, 灌水法则, 对分搜索

中图分类号: TN919.3

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)09-1479-04

## Bit and Power Allocation Algorithm for OFDM System

Yu Guan-ding Zhang Zhao-yang Qiu Pei-liang

(Institute of Information and Communication Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract** The maximization of data rate under the constraint of total transmit power and bit error rate is a considerable issue in OFDM system. Recognizing that the number of bits on each subcarrier must be a discrete number for real systems, this paper proposed two bit allocation algorithms which are modified greedy algorithm and water filling level binary searching algorithm. Simulation results show that the complexity of modified greedy algorithm is 10% of that of greedy algorithm and 5~7 iterations are enough for 0.5% data rate loss when SNR is above 10dB.

**Key words** Bit allocation, OFDM, Greedy algorithm, Water-filling approach, Binary search

### 1 引言

正交频分复用(OFDM)由于其对付无线信道频率选择性衰落以及造成的码间干扰(ISI)的抵抗能力, 已经成为宽带传输系统的首选调制技术<sup>[1]</sup>。OFDM 基本的原理是将频带分成若干正交的子载波, 高速数据流被分成相应数目的低速数据流在各个子载波上并行传输。如果发送端知道信道状态信息(CSI), 那么可以将总功率通过信息论中经典的频域灌水方法分配到各个子载波, 以达到最大的传输容量<sup>[2,3]</sup>。

然而, 由灌水法得到的子载波上的比特数是连续的值, 而实际的调制方式中星座点的数目是离散的。在整数比特约束<sup>[4,5]</sup>下, Hughes-Hartogs<sup>[6]</sup>提出一种最优的贪婪算法, 该算法在分配一个比特的时候选择增加一个比特所需功率最少的子载波, 直到总功率达到功率上限。由于贪婪算法在分配一个比特的时候要对所有的子载波进行搜索, 因此它的计算复杂度非常大, 而且随着信噪比的升高而增加, 非常不适合实时性要求高的系统。Jang<sup>[7]</sup>提出一种迭代灌水线搜索法, 首先用灌水法则算出灌水线, 然后将各个子载波上的比特数

舍入成整数, 并且计算取整之后需要的总功率, 如果总功率大于功率上限, 则按照一定迭代步长降低灌水线并且重新灌水, 直到总功率小于功率上限。Jang 的算法是一种次优的算法, 其算法性能和计算复杂度取决于迭代步长, 一般迭代步长取 0.7 需要的迭代次数为 10 次左右。

本文提出一种改进的贪婪算法, 将一部分比特通过灌水法分配到各个子载波, 剩余的比特再用贪婪算法分配, 仿真结果表明算法的性能十分接近于贪婪算法, 但是时间复杂度却是贪婪算法的 10%~30%(与信噪比有关)。并且提出一种在性能和复杂度上都优于迭代灌水线搜索法对分灌水。

### 2 问题描述

假设子载波的数目是  $K$ , 各个子载波上的信道增益为  $h_k(k=1,2,\dots,K)$  是已知的,  $b_k, p_k$  分别是分配在子载波  $k$  上的比特数和功率,  $p_k$  与  $b_k$  之间的关系为

$$b_k = \log_2 \left( 1 + \frac{h_k p_k}{T\sigma^2} \right) \quad (1)$$

或者

$$p_k = \left( T\sigma^2 / h_k \right) (2^{b_k} - 1) \quad (2)$$

其中  $T$  为一定误比特率下的信噪比差(SNR gap),  $\sigma^2$  是子载波上的噪声功率。对于 QAM 调制, 不考虑信道编码,  $T$  与  $\text{BER}_{\text{target}}$  之间的关系为<sup>[7]</sup>:

$$T = -\ln(5\text{BER}_{\text{target}})/1.5 \quad (3)$$

如果  $b_k$  可以是连续的值, 那么问题 P1: 在总功率  $P$  约束下

最大化  $\sum_{k=1}^K b_k$  的解由

$$p_k = T\sigma^2(\lambda - 1/h_k)^+ \quad (4)$$

给出, 其中  $(x)^+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$  灌水线  $\lambda$  由约束条件:

$$\sum_{k=1}^K p_k \leq P \quad (5)$$

决定。在实际的通信系统中,  $b_k$  往往只能是整数, 问题变

为 P2: 在  $\sum_{k=1}^K p_k \leq P$  约束下最大化  $\sum_{k=1}^K b_k$ , 其中  $b_k$  由式(1)

决定且  $b_k \in \{0\} \cup N$ ,  $N$  为自然数集合。

### 3 贪婪算法

贪婪算法的步骤如下:

(1) 令  $b_k = 0, p = 0, k = 1, 2, \dots, K$ 。

(2) 计算每个子载波增加一个比特需要的额外功率  $\Delta p_k = (T\sigma^2/h_k)2^{b_k}$ 。

(3) 选择  $k^* = \arg \min_{1 \leq k \leq K} \Delta p_k$ , 若  $p + \Delta p_{k^*} > P$  结束, 否则置  $b_{k^*} = b_{k^*} + 1, p = p + \Delta p_{k^*}$ , 返回(2)。

最后得到的  $\{b_k, k = 1, 2, \dots, K\}$  是各个子载波上得到的比特数。贪婪算法的每一步都是最优的, 可以证明贪婪算法得到的解是问题 P2 的最优解。但是贪婪算法的复杂度是  $O(B \cdot K)$ , 其中  $B$  是传输的总比特数目, 随着信噪比的提高,  $B$  增大, 算法计算复杂度随之增大。

### 4 改进的贪婪算法

改进的贪婪算法先通过灌水法则确定每个子载波上的比特数  $b_k$ , 然后将比特数下取整得  $\hat{b}_k = \lfloor b_k \rfloor$ , 计算需要的总功率  $\hat{P}$ , 再用贪婪算法将剩余的功率  $P_e = P - \hat{P}$  分配到各个子载波。我们用对分法搜索灌水线, 由式(4)可以得到灌水线的上下界分别为(见附录):

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{K} \left( \frac{P}{\sigma^2 T} + \frac{K}{h_{k^*}} \right)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{K} \left( \frac{P}{\sigma^2 T} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{h_k} \right)$$

其中  $k^* = \arg \max_{1 \leq k \leq K} h_k$ 。由于在改进贪婪算法中灌水法只是初步的比特分配, 所以灌水线的精度不需要很高, 一般用对分法搜索 4~6 次即可。

算法步骤:

(1) 用对分法在  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  范围内搜索灌水线  $\lambda$ 。

(2) 对所有的  $k = 1, 2, \dots, K$ , 计算  $b_k = \lfloor \log_2(\lambda h_k) \rfloor^+$ ,

$$p_k = (T\sigma^2/h_k)(2^{b_k} - 1), \text{ 令 } p = \sum_{k=1}^K p_k.$$

(3) 计算每个子载波增加一个比特需要的额外功率  $\Delta p_k = (T\sigma^2/h_k)2^{b_k}$ 。

(4) 选择  $k^* = \arg \min_{1 \leq k \leq K} \Delta p_k$ , 如果  $p + \Delta p_{k^*} > P$  结束, 否则置  $b_{k^*} = b_{k^*} + 1, p = p + \Delta p_{k^*}$ , 返回(3)。

改进贪婪算法有一部分比特是通过灌水法来分配的, 假设这部分比特为  $B_w$ , 剩下的  $B - B_w$  通过贪婪算法分配, 因此其算法复杂度是  $O((B - B_w + m)K)$ , 其中  $m = 4 \sim 6$  是对分法搜索灌水线需要的次数, 当信噪比较高的时候,  $B - B_w \ll B$ , 此时改进贪婪算法的复杂度远小于贪婪算法。

### 5 迭代灌水线搜索法

迭代灌水线搜索法是一种改进的灌水法, 其基本思想是令  $\lambda = \lambda_{\max}$ , 计算每个子载波上的比特数, 并且四舍五入成整数, 再计算取整之后需要的总功率, 如果总功率小于功率上限则分配完毕, 否则降低灌水线, 重新灌水, 直到总功率小于功率上限。

具体步骤如下:

(1) 令  $\lambda = \lambda_{\max}, K_{\text{ON}} = K$ 。

(2) 对所有的  $k$ , 计算  $b_k = (\text{round}[\log_2(\lambda h_k)])^+$ ,  $p_k = (T\sigma^2/h_k)(2^{b_k} - 1)$ , 如果  $b_k = 0$ , 则  $K_{\text{ON}} = K_{\text{ON}} - 1$ 。

(3) 如果  $P \geq \sum_{k=1}^K p_k$ , 则分配完毕; 否则令  $\lambda = \lambda + \mu \cdot \frac{1}{K_{\text{ON}}} \cdot \frac{1}{\sigma^2 T} (P - \sum_{k=1}^K p_k)$ , 返回(2)。其中  $\text{round}$  是四舍五入函数,  $\text{round}(x) = \lfloor x - 0.5 \rfloor + 1$ 。  $0 < \mu < 1$  是迭代步长。

迭代灌水线搜索法的性能取决于迭代步长  $\mu$ ,  $\mu$  越大迭代需要的次数越少, 但是精度越低,  $\mu$  越小迭代次数越多同时精度越高。  $\mu$  的经验值是 0.7, 此时迭代次数大约为 10 次, 当信噪比大于 10dB 的时候可以达到与贪婪算法相差 0.5% 的性能。

### 6 对分灌水线搜索法

如果搜索变量的上下限能够确定, 那么对分搜索法是效率非常高的搜索算法。我们用对分搜索法对迭代灌水线搜索法进行改进, 提出对分灌水线搜索法。首先要确定在整数比特限制下灌水线的上界和下界, 在整数比特限制下, 我们

将各子载波上的比特数向下取整, 此时要求灌水线比连续比特情况下高, 才能达到总功率要求。基于这个考虑, 下界取

$$\lambda_{\max}^d = \frac{1}{K} \left( \frac{P}{\sigma^2 T} + \frac{K}{h_{k^*}} \right),$$

其中  $k^* = \arg \max_{1 \leq k \leq K} h_k$ , 而上界取

$$\lambda_{\max}^d = \lambda_{\max} + \max \left\{ \frac{1}{h_k} (2^{\lceil b_k \rceil} - 2^{b_k}), k = 1, 2, \dots, K \right\}.$$

如图 1 所示, 用  $\lambda_{\max}^d$  灌水, 并且把子载波上的比特数向下取整后, 每个子载波上的实际功率比用  $\lambda_{\max}$  灌水得到的功率大, 因此  $\lambda_{\max}^d$  是离散比特约束下的灌水线上界。



图 1 离散比特约束下的灌水线灌水线

对分法灌水线搜索法的流程图如图 2 所示。其中  $0 < \epsilon < 1$  是算法的相对精度要求。图 3 是对分法灌水线搜索法的一个例子, 图中实线是上界时的总比特数  $b^u$ , 虚线是实际的总比特数  $b^T$ , 从图 3 看出随着迭代次数的增加,  $b^u$  逐渐接近于  $b^T$ , 而且所需要的迭代次数不是很多。

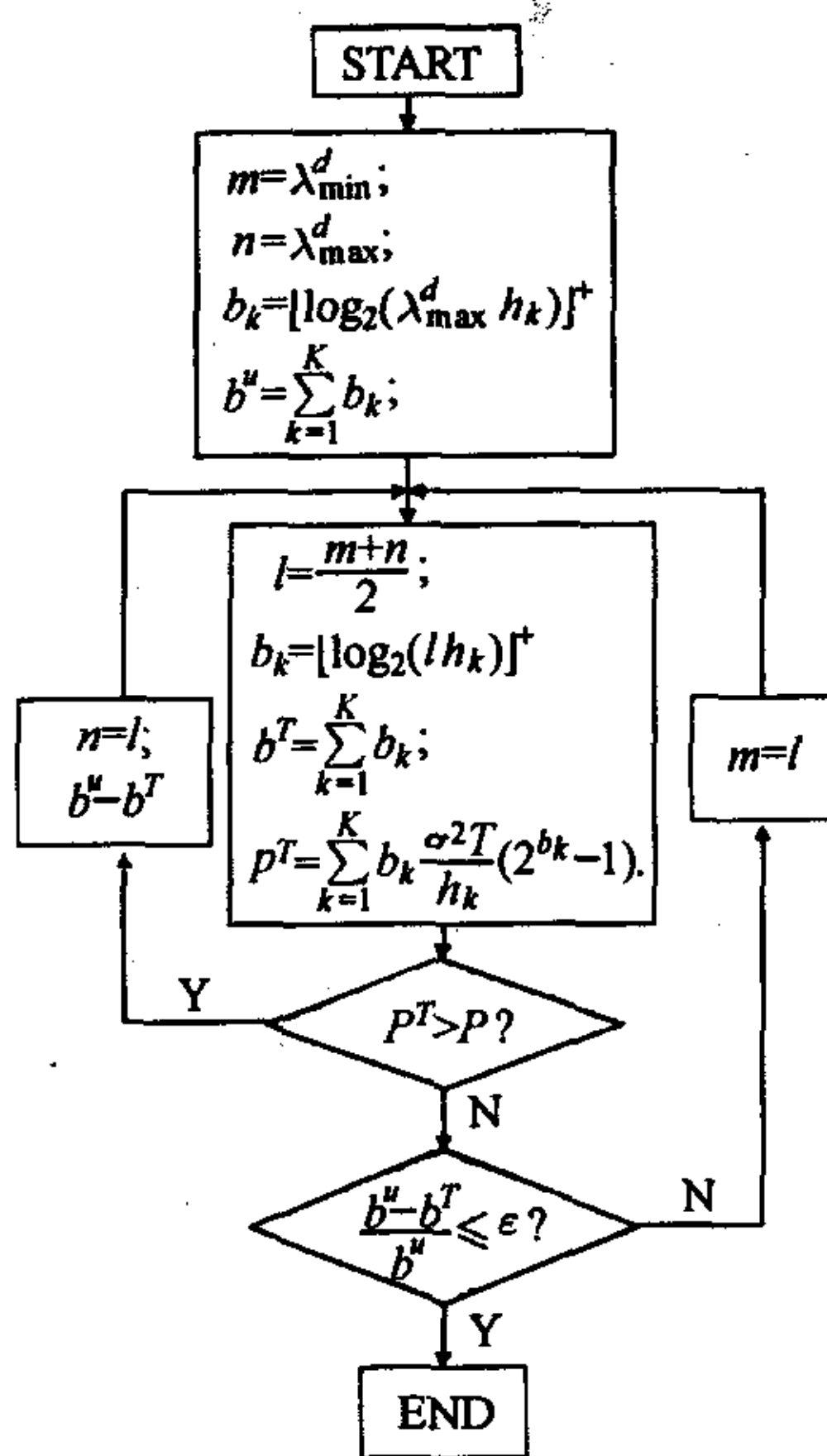


图 2 对分法灌水线搜索法流程图

### 7 仿真结果

仿真的信道为瑞利信道, 路径数目是 10 径, 最大信道时延为  $4 \mu\text{s}$ , 系统的带宽是 5MHz, 子载波的数目  $K=256$ , 每个子载波认为经历平坦衰落。系统的误比特率要求  $\text{BER}_{\text{target}} = 10^{-3}$ 。

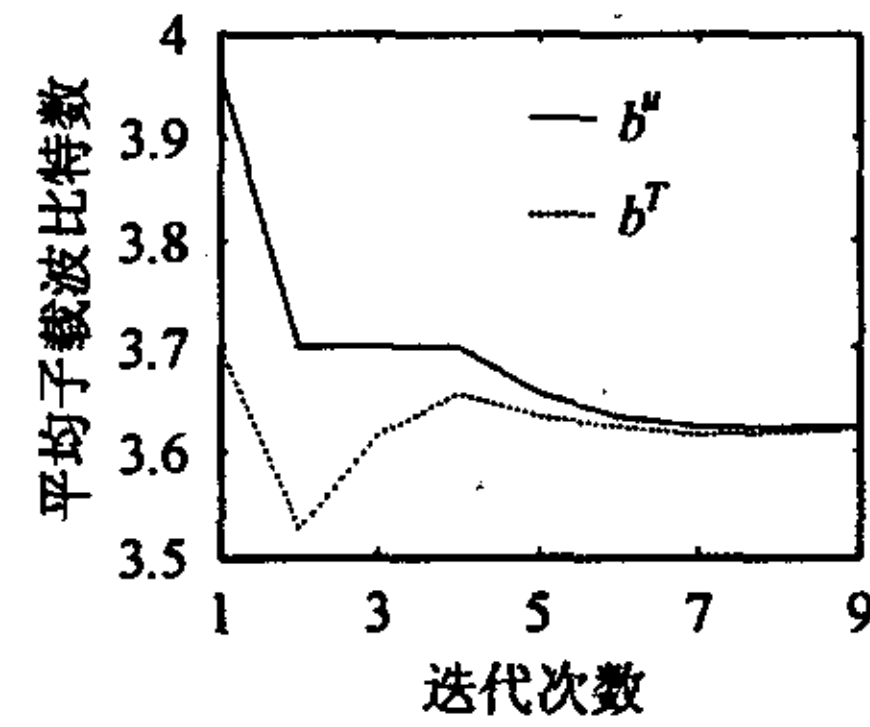


图 3 对分法灌水线搜索法实例

为了比较算法的性能, 定义相对速率损失为

$$\text{DRL} = \frac{B_G - B}{B_G} \times 100\%$$

其中  $B_G$  是一定功率下贪婪算法能得到的传输总比特数,  $B$  是特定算法取得的总比特数。图 4 是对分灌水线搜索法和迭代灌水线搜索法需要的迭代次数在一定 DRL 下的比较, 随着信噪比的增加, 两个算法需要的迭代次数略有下降, 而且迭代次数随着 DRL 的上升而下降。当信噪比大于 10dB 的时候, 对分灌水线搜索法达到 DRL 为 0.5% 和 1% 分别只需要 5~7 次迭代, 而迭代灌水线搜索法需要大约 10 次左右, 当信噪比小的时候, 两者之间的差异更加明显。

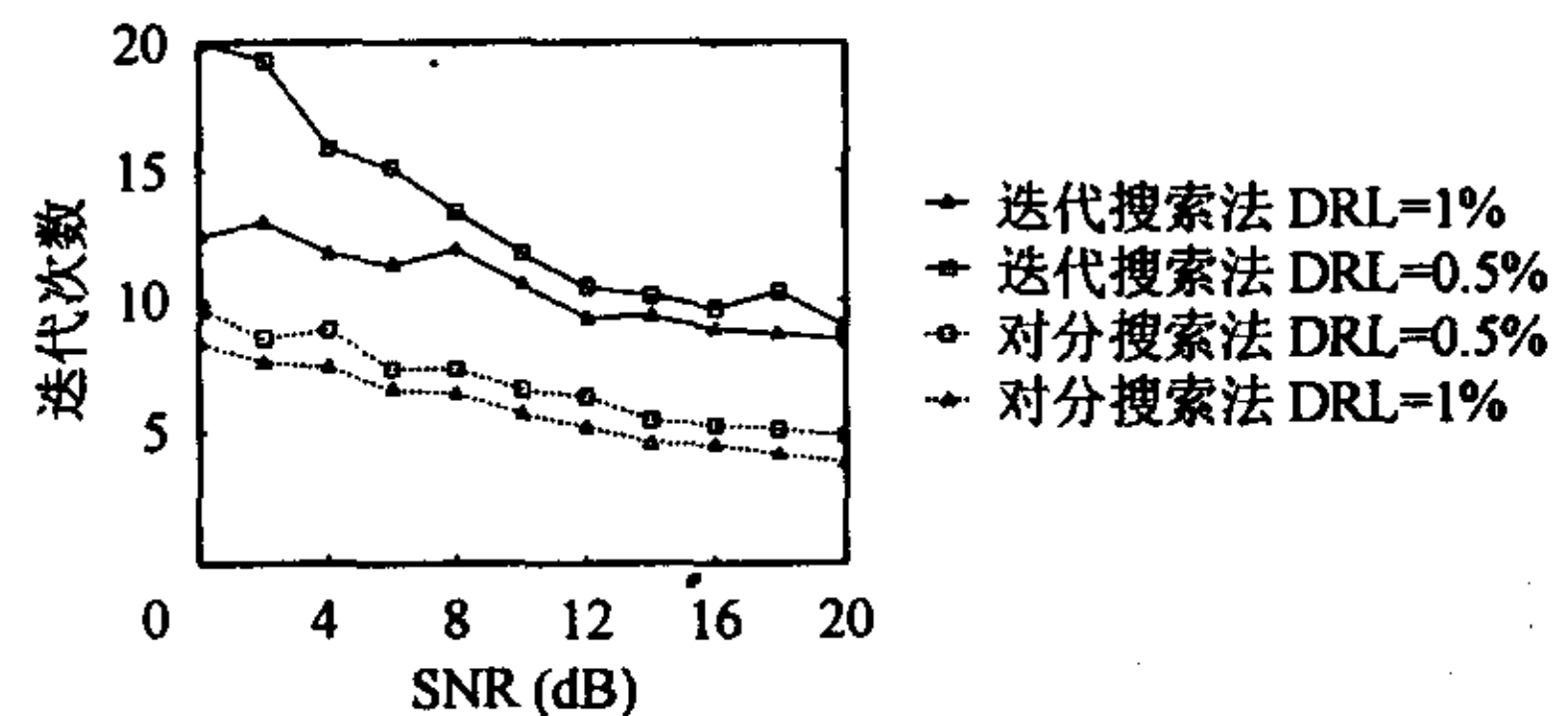


图 4 对分灌水线搜索法与迭代灌水线搜索法迭代次数比较

图 5 是改进贪婪算法需要的迭代次数与贪婪算法的比较。随着信噪比的增加, 需要分配的比特数也增加, 因此两个算法的迭代次数随之增加, 但是改进贪婪算法增加的幅度明显小于贪婪算法。在信噪比为 4dB 的时候, 改进算法与贪婪算法迭代次数比约为 1: 3, 而当信噪比为 10dB 的时候迭代次数比约为 1: 5, 信噪比为 16dB 时这个比值变为 1: 8, 可见改进算法对复杂度的减少是比较明显的。图 6 是不同信

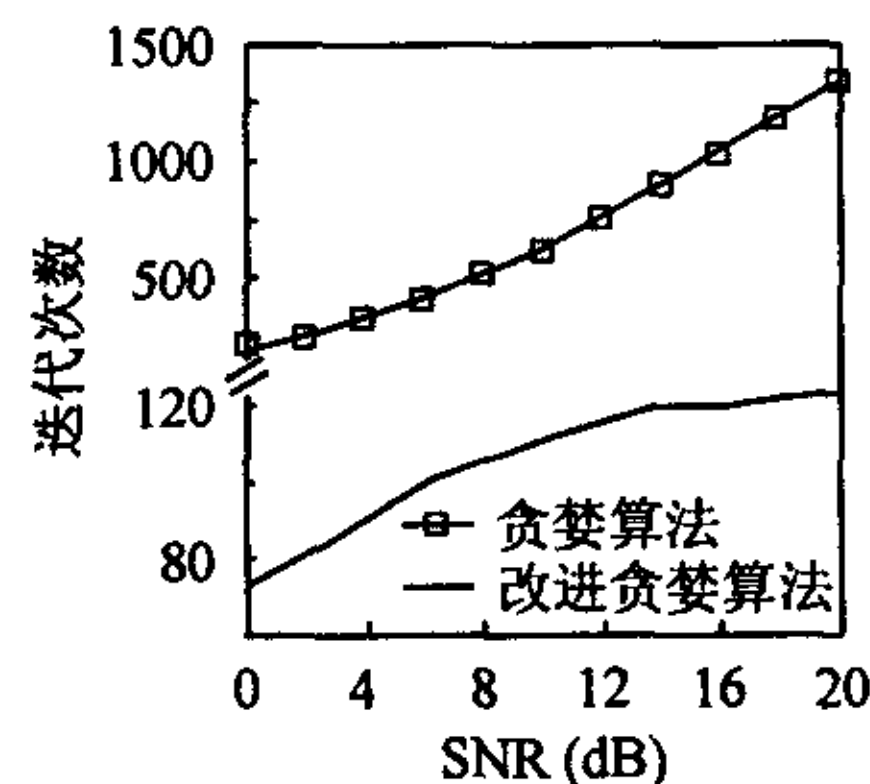


图 5 改进贪婪算法与贪婪算法迭代次数比较

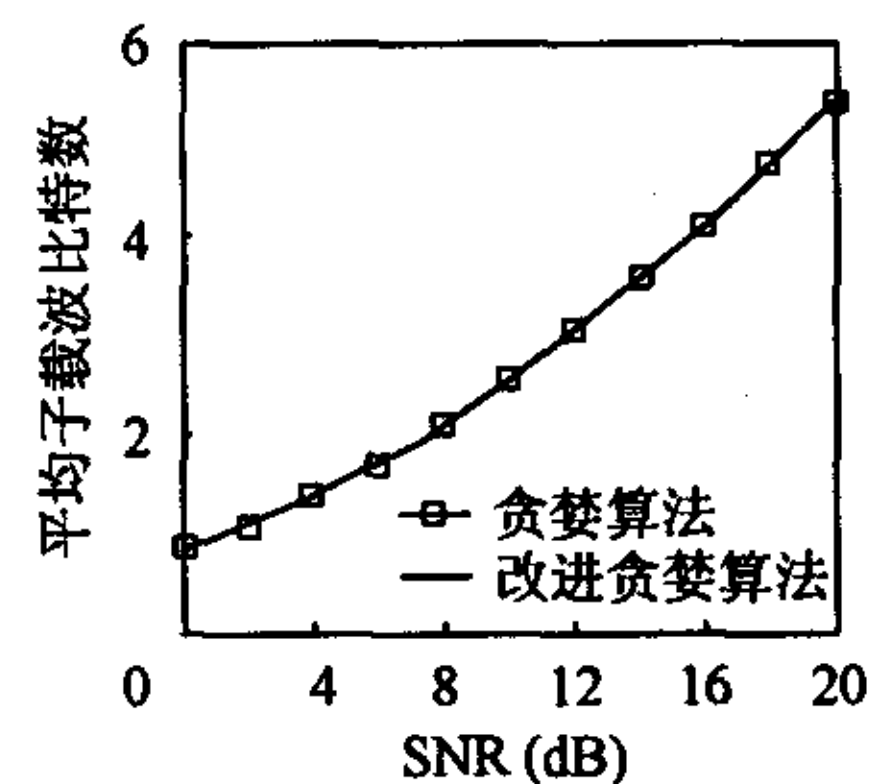


图 6 改进贪婪算法与贪婪算法传输比特数比较

噪比下贪婪算法和改进贪婪算法的传输比特数比较, 从图中看出改进算法的性能跟贪婪算法十分接近, 因此, 改

进贪婪算法在不影响性能的同时大大减少了计算复杂度。

## 8 结束语

本文提出了整数比特限制下 OFDM 系统的功率和比特分配算法,改进的贪婪算法在时间复杂度上远小于贪婪算法,但是其需要的迭代次数还是比较多,在信噪比大于 5dB 时迭代次数超过 100 次,因此改进贪婪算法比较适合于信道相对稳定的系统,比如 ADSL 和电力线载波通信系统等。而对分灌水线搜索法需要的迭代次数不多,在精度为 0.5% 时只需要 5~7 次迭代,因此比较适合于无线传输系统,还可以根据信道的衰落快慢选择合适的  $\epsilon$  值和迭代次数,以达到所需的实时性和精度图 5 改进贪婪算法和贪婪算法迭代次数比较要求。

## 附录 灌水线上下界的证明

由式(4),式(5)知:

$$P = \sum_{k=1}^K T\sigma^2 \left( \lambda - \frac{1}{h_k} \right)^+ \geq \sum_{k=1}^K T\sigma^2 \left( \lambda - \frac{1}{h_k} \right),$$

$$\text{所以 } \lambda \leq \frac{1}{K} \left( \frac{P}{\sigma^2 T} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{h_k} \right) = \lambda_{\max}。$$

同样地,令  $k^* = \arg \max_{1 \leq k \leq K} h_k$ , 则

$$P = \sum_{k=1}^K T\sigma^2 \left( \lambda - \frac{1}{h_k} \right)^+ \leq KT\sigma^2 \left( \lambda - \frac{1}{h_{k^*}} \right)^+ = KT\sigma^2 \left( \lambda - \frac{1}{h_{k^*}} \right)$$

所以

$$\lambda \geq \frac{1}{K} \left( \frac{P}{\sigma^2 T} + \frac{K}{h_{k^*}} \right) = \lambda_{\min} \quad \text{证毕}$$

## 参考文献

- [1] Cimini L J. Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing. *IEEE Trans. on Communications*, 1995, 33(7): 665 – 675.
- [2] 仇佩亮编著. 信息论与编码. 北京: 高等教育出版社, 2004: 159 – 162.
- [3] Munz G, Pfletschinger S, Speidel J. An efficient waterfilling algorithm for multiple access OFDM. *IEEE GLOBECOM '02*, Taipei, Taiwan, 2002, 1: 681 – 685.
- [4] Tu J C, Cioffi J M. A loading algorithm for the concatenation of coset codes with multichannel modulation methods. *IEEE GLOBECOM '90*. San Diego, USA, 1990, 2: 1183 – 1187.
- [5] Chow P S, Cioffi J M, Bingham J A C. A practical discrete multitone transceiver loading algorithm for data transmission over spectrally shaped channels. *IEEE Trans. on Communications*, 1995, 43(2): 773 – 775.
- [6] Hughes-Hartogs D. Ensemble modem structure for imperfect transmission media, U.S. Patents Nos.4,679,227 (July 1987), 4,731,816 (March 1988), and 4,833,706 (May 1989).
- [7] Jang Jiho, Lee Kwang Bok, Lee Yong-Hwan. Transmit power and bit allocations for OFDM systems in a fading channel, *GLOBECOM '03*. San Francisco, USA, 2003, 2: 858 – 862.

余官定: 男, 1980年生, 博士生, 研究方向为OFDM、自适应调制、无线资源管理。

张朝阳: 男, 1973年生, 副教授, 主要研究方向为宽带接入、无线通信、数字电视。

仇佩亮: 男, 1944年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信息论与编码、无线数字通信。