高校应用数学学报A辑 Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000,15(1):15～20

二次系统的一类三角形周期环域的 Poincaré 分支

沈伯骞 司成斌

(辽宁师范大学数学系,大连 116022)

摘 要 本文讨论了二次系统的一类三角形周期环域的 Poincaré 分支,给出了分支函数的精确表达式,证明了其 Poincaré 分支可以产生两个极限环.

关键词 三角形周期环域,Poincaré 分支,分支函数,极限环.

分类号 (中图)O175;(1991MR)34C.

文[1～5]都曾讨论过二次系统的 Poincaré 分支,而且都给出了相应的分支函数 $A(h)$ 的精确表达式. 文[1,2]所讨论的周期环域的边界是双曲线;文[3]所讨论的周期环域的边界是抛物线;文[4]所讨论的周期环域是两个半圆面;文[5]所讨论的周期环域是两个半平面. 本文将讨论一类以三角形为边界的周期环域的 Poincaré 分支.

考虑如下的二次系统

$$\begin{cases}\dot{x} = 2y^2 - x^2 + 3y + 1 + \mu(l_1x^2 + m_1xy + n_1y^2 + p_1x + q_1y + f_1) \\ \dot{y} = xy + \mu(l_2x^2 + m_2xy + n_2y^2 + p_2x + q_2y + f_2)\end{cases}, \tag{1}_\mu$$

系统(1)($\mu=0$)不是 Hamilton 系统,但右端同乘以 y 后得到

$$\begin{cases}\dot{x} = 2y^3 - x^2y + 3y^2 + y + \mu(l_1x^2y + m_1xy^2 + \\ \qquad n_1y^3 + p_1xy + q_1y^2 + f_1y) = P(x,y) \\ \dot{y} = xy^2 + \mu(l_2x^2y + m_2xy^2 + n_2y^3 + p_2xy + q_2y^2 + f_2y) = \\ \qquad Q(x,y)\end{cases} \tag{2}_\mu$$

系统(2)($\mu=0$)是 Hamilton 系统. 其 Hamilton 函数为

$$H(x,y) = y^2(1+x+y)(1-x+y) = h, \tag{3}$$

当 $0<h<1/16$ 时,(3)表示绕点$(0,-1/2)$的一族闭曲线;$h=0$ 时,(3)表示三条直线 $y=0$, $1+x+y=0$, $1-x+y=0$ 它们构成一个三角形;$h=1/16$ 时(3)表示一个孤立点$(0,-1/2)$.

讨论系统$(2)_\mu$,也即系统$(1)_\mu$ 的 Poincaré 分支. 根据文[6]考虑以下函数

$$A(h) = \iint\limits_{D_h}(P_{\mu x} + Q_{\mu y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

收稿:1998-07-08. 修回:1998-10-28.

辽宁省自然科学基金(962061)资助项目.

$$\iint_{D_h}(2l_1xy+m_1y^2+p_1y+l_2x^2+2m_2xy+$$
$$3n_2y^2+p_2x+2q_2y+f_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_h 表示当 $0<h<1/16$ 时,闭曲线(3)所围区域. 因为 D_h 关于 y 轴对称,所以

$$A(h)=\iint_{D_h}[(m_1+3n_2)y^2+(p_1+2q_2)y+f_2+l_2x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$2\int_{y_1}^{y_2}[(m_1+3n_2)y^2+(p_1+2q_2)y+f_2+$$
$$\frac{l_2}{3}\frac{y^2(y+1)^2-h}{y^2}]\sqrt{\frac{y^2(y^2+1)^2-h}{y^2}}\mathrm{d}y=$$
$$2\int_{y_1}^{y_2}\left[-\left(m_1+3n_2+\frac{1}{3}l_2\right)y-\left(p_1+2q_2+\frac{2}{3}l_2\right)-\left(f_2+\frac{1}{3}l_2\right)\frac{1}{y}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}l_2h\frac{1}{y^3}\right]\cdot\sqrt{y^2(y+1)^2-h}\,\mathrm{d}y=$$
$$I_1(h)\alpha+I_0(h)\beta+I_{-1}(h)\gamma+I_{-3}(h)\delta, \tag{4}$$

这里

$$\begin{cases}\alpha=-2(m_1+3n_2+l_2/3),\\ \beta=-2(p_1+2q_2+2l_2/3),\\ \gamma=-2(f_2+l_2/3),\\ \delta=2l_2/3,\end{cases} \tag{5}$$

$$In(h)=\int_{y_1}^{y_2}y^n\sqrt{y^2(y+1)^2-h}\,\mathrm{d}y,(n=1,0,-1,-3),$$
$$In(h)=\int_{y_1}^{y_2}y^n\sqrt{\left[(y+1/2)^2-\frac{1}{4}(1+4\sqrt{h})\right]\left[(y+1/2)^2-\frac{1}{4}(1-4\sqrt{h})\right]}\mathrm{d}y, \tag{6}$$

其中 $y_1<y_2$,y_1 和 y_2 是方程$(y+1/2)^2-\frac{1}{4}(1-4\sqrt{h})=0$ 的两个根. 即

$$y_1=\left(-1-\sqrt{1-4\sqrt{h}}\right)/2,y_2=\left(-1+\sqrt{1-4\sqrt{h}}\right)/2.$$

定理 1

$$A(h)=\overline{A}(k)=\frac{1}{k^2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\{k^2[(1+k^2)\varphi_1(k)-(1-k^2)\varphi_0(k)]\alpha'+$$
$$(1-k^2)^2[2k^2\varphi_0(k)+(1+k^2)H_1(k)]\beta'+ \tag{7}$$
$$(1+k^2)^2[2k^2\varphi_0(k)+(1-k^2)H_1(k)]\delta'\},\quad(0<k<1)$$
$$k^2=(1-4\sqrt{h})/(1+4\sqrt{h})\quad(0<h<1/16).$$

其中
$$\begin{cases}\alpha'=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}(l_2-m_1-3n_2+2p_1+4q_2),\\[2ex] \beta'=\dfrac{\sqrt{2}}{12}(25l_2-24m_1-72n_2+48p_1+96q_2+3f_2),\\[2ex] \delta'=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}l_2,\end{cases}\tag{8}$$

$$\varphi_0(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\varphi_1(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$$H_1(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin^2\theta-a)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\left(a=\frac{1+k^2}{2k^2}\right)$$

这里 $\varphi_0(k)$,$\varphi_1(k)$,$H_1(k)$分别称之为第一,二,三类椭圆积分,它们之间相互独立,不能互化.

证　对(6)作变换 $y+\frac{1}{2}=z$ 得

$$In(h)=\int_{z_1}^{z_2}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt{\left[z^2-\frac{1}{4}(1+4\sqrt{h})\right]\left[z^2-\frac{1}{4}(1-4\sqrt{h})\right]}\mathrm{d}z,$$

这里 $z_1=-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sqrt{h}}$,$z_2=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sqrt{h}}$,再设 $z=\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sqrt{h}}\,u$,得

$$In(h)=\frac{1}{2^{n+3}}(1-4\sqrt{h})\sqrt{1+4\sqrt{h}}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-4\sqrt{h}}\,u-1\right)^n\times$$
$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u,$$

其中 $k^2=\frac{1-4\sqrt{h}}{1+4\sqrt{h}}(<1)$,也可写成

$$In(h)=\overline{In}(k)=\frac{k^2}{2^{n+3/2}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}}u-1\right]^n\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u.\tag{9}$$

当 $n=0$ 时,由(9)式得

$$I_0(h)=\overline{I}_0(k)=\frac{\sqrt{2}k^2}{4(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}[\varphi_2(k)-(1-k^2)\varphi_1(k)],$$

这里记 $\varphi_n(k)=\int_0^1\frac{(1-k^2u^2)^n}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\mathrm{d}u.$

当 $n=1$ 时,由(9)式得

$$I_1(h)=\overline{I}_1(k)=\frac{k^2}{4\sqrt{2}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}}u-1\right]\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{-k^2}{4\sqrt{2}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\overline{I}_0(k).$$

当 $n=-1$ 时,由(9)式得

$$I_{-1}(h)=\overline{I_{-1}}(k)=\frac{\sqrt{2}\,k^2}{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{1+k^2}}u-1\right]^{-1}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+k^2}}\left[-\varphi_1(k)-\frac{1}{2}(1-k^2)\varphi_0(k)-\frac{(1-k^2)^2}{4k^2}H_1(k)\right],\tag{10}$$

这里记 $H_n(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(u^2-a)^n\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\left(a=\frac{1+k^2}{2k^2}\right)$.

当 $n=-3$ 时由(9)式得

$$I_{-3}(h)=\overline{I_{-3}}(k)=\frac{2\sqrt{2}\,k^2}{(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{1+k^2}}u-1\right]^{-3}\cdot\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{3\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2\sqrt{1+k^2}}\left[k^2\varphi_0(k)+\frac{2}{3}(1+k^2)H_1(k)-\frac{(1-k^2)^2}{4k^2}H_2(k)-\right.$$

$$\left.\frac{(1+k^2)(1-k^2)^2}{6k^4}H_3(k)\right].$$

(10)式中的 $\overline{I}_{-1}(k)$ 已具有最简形式. 为了化简 $\overline{I}_0(k)$ 和 $\overline{I}_1(k)$，注意对任意整数 m 有循环关系式

$$(2m+1)\varphi_{m+1}(k)+2m(k^2-2)\varphi_m(k)+(1-2m)(k^2-1)\varphi_{m-1}(k)=0\tag{11}$$

成立. 事实上由

$$[t(1-k^2t^2)^{m-1}\cdot\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}]'_t=\frac{2m+1}{k^2}\cdot\frac{(1-k^2t^2)^{m+1}}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+$$

$$\frac{2m(k^2-2)}{k^2}\cdot\frac{(1-k^2t^2)^m}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+\frac{(1-2m)(k^2-1)}{k^2}\cdot\frac{(1-k^2t^2)^{m-1}}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

两边对 t 从 0 到 1 积分即得公式(11).

令 $m=1$，由(11)式得

$$\varphi_2(k)=\frac{1}{3}[(k^2-1)\varphi_0(k)-2(k^2-2)\varphi_1(k)].$$

所以 $\overline{I_0}(k)$ 可化简为

$$\overline{I_0}(k)=\frac{\sqrt{2}}{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\left[\frac{1}{3}(k^2-1)\varphi_0(k)+\frac{1}{3}(k^2+1)\varphi_1(k)\right].\tag{12}$$

而 $\overline{I_1}(k)$ 可化简为

$$\overline{I_1}(k)=-\frac{1}{2}\overline{I_0}(k)=-\frac{\sqrt{2}}{4(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\left[\frac{1}{3}(k^2-1)\varphi_0(k)+\frac{1}{3}(k^2+1)\varphi_1(k)\right].\tag{13}$$

为了化简 $\overline{I_{-3}}(k)$. 根据文[7]，对任意整数 m 又有以下循环关系式成立.

$$\begin{aligned}&(2m-2)[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]H_m(k)-\\&(2m-3)[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]H_{m-1}(k)-\\&(2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}(k)-(2m-5)k^2H_{m-3}(k)=0.\end{aligned}\tag{14}$$

将 $a=\frac{1+k^2}{2k^2}$ 代入(14)，再令 $m=2$，可得

$$\frac{1}{4k^4}(1+k^2)(1-k^2)^2H_2(k)+\frac{1}{4k^2}(1-k^2)^2H_1(k)+k^2H_{-1}(k)=0. \tag{15}$$

又因

$$H_{-1}(k)=\int_0^1\frac{(u^2-a)\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{1}{k^2}\int_0^1\frac{(1-k^2a)-(1-k^2u^2)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{1-k^2a}{k^2}\varphi_0(k)-\frac{1}{k^2}\varphi_1(k)=\frac{1-k^2}{2k^2}\varphi_0(k)-\frac{1}{k^2}\varphi_1(k).$$

将 $H_{-1}(k)$代入(15)式解出 $H_2(k)$得

$$H_2(k)=\frac{4k^4}{(1+k^2)(1-k^2)^2}\varphi_1(k)-\frac{2k^4}{(1+k^2)(1-k^2)}\varphi_0(k)-\frac{k^2}{1+k^2}H_1(k). \tag{16}$$

再在公式(14)中令 $a=\frac{1+k^2}{2k^2}$,$m=3$ 得

$$\frac{1}{2k^4}(1+k^2)(1-k^2)^2H_3(k)+\frac{3}{4k^2}(1-k^2)^2H_2(k)-(1+k^2)H_1(k)-k^2H_0(k)=0,$$

解出 $H_3(k)$,并注意到 $H_0(k)=\varphi_0(k)$,得

$$H_3(k)=\frac{2k^6}{(1+k^2)(1-k^2)}\varphi_0(k)+\frac{2k^4}{(1-k^2)^2}H_1(k)-\frac{3k^2}{2(1+k^2)}H_2(k).$$

再将(16)式的 $H_2(k)$代入上式得

$$H_3(k)=\frac{k^6(5-k^2)}{(1+k^2)^2(1-k^2)^2}\varphi_0(k)-\frac{6k^6}{(1+k^2)^2(1-k^2)^2}\varphi_1(k)+$$
$$\frac{k^4(7+2k^2+7k^4)}{2(1+k^2)^2(1-k^2)^2}H_1(k).$$

将以上所得的 $H_2(k)$和 $H_3(k)$代入$\overline{I_{-3}}(k)$中,得

$$\overline{I_{-3}}(k)=\frac{3\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2\sqrt{1+k^2}}\left[\frac{2}{3}k^2\varphi_0(k)+\frac{1}{3}(1-k^2)H_1(k)\right]. \tag{17}$$

将(10),(12),(13),(17)所表达的$\overline{I_{-1}}(k)$,$\overline{I_0}(k)$,$\overline{I_1}(k)$,$\overline{I_{-3}}(k)$代入(4)式,经计算整理后即得所需要的(7).其中

$$\varphi_0(k)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$\varphi_1(k)=\int_0^1\frac{1-k^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$H_1(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(u^2-a)\cdot\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin^2\theta-a)\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$
$$(a=(1+k^2)/(2k^2)).$$

定理 2 系统$(1)_\mu$ 的 Poincaré 分支可以产生两个极限环.

证 因(7)式中的函数

$$\psi_1(k)=k^2[(1+k^2)\varphi_1(k)-(1-k^2)\varphi_0(k)],$$
$$\psi_2(k)=(1-k^2)^2[2k^2\varphi_0(k)+(1+k^2)H_1(k)],$$
$$\psi_3(k)=(1+k^2)^2[2k^2\varphi_0(k)+(1-k^2)H_1(k)]$$

是定义在(0,1)内任意次连续可微的线性无关函数组.故必存在这样的k_1,k_2:$\{0<k_1<k_2<1\}$.有不全为零的参数值$\alpha'=\alpha'_0,\beta'=\beta'_0,\delta'=\delta'_0$,使得$\overline{A}(k_1)=0,\overline{A}(k_2)=0$.根据Poincaré分支理论[6],可知,如果系统$(2)_\mu$的系数(即系统$(1)_\mu$的系数)满足条件

$$\alpha'=\alpha'_0,\beta'=\beta'_0,\delta'=\delta'_0, \tag{18}$$

则当$0<|\mu|\ll 1$时,系统$(1)_\mu$存在两个极限环.它们分别位于闭曲线

$$y^2(1+x+y)(1-x+y)=(1-k_i^2)^2/(16(1+k_i^2)^2)\quad(i=1,2)$$

的不相重迭的小邻域内.实际上这就是系统$(1)_\mu$的Poincaré分支产生两个极限环的一个构造性例子.注意到(8)式右边关于l_2,m_1,n_2,p_1,q_2,f_2的系数矩阵的秩为3.所以其系数条件(18)显然是能够实现的.

参 考 文 献

1 李继彬,陈孝秋,一类平面二次系统的Poincaré分支,科学通报,1987,16:1213～1217.

2 沈伯骞,具有以双曲线与赤道弧为边界的周期环域的二次系统的Poincaré分支及其应用,应用数学,1997(2):115～119.

3 沈伯骞,何平,二次系统的二重极限环和从无穷大分界线环分支出两个极限环的例子,应用数学学报,1994(4):592～596.

4 沈伯骞,一类具有双中心的二次系统的Poincaré分支,辽宁师范大学学报,1996(4):265～277.

5 Hao Jinbiao,Shen Boqian,A problem of Poincaré bifurcation theory in quadratic system with two semiquator arc separatrix and two centres,Ann. Differential Equations,1995,270～275.

6 叶彦谦等,极限环论,上海科学出版社,上海,1984,87～88.

7 Г.M.菲赫金哥尔茨,微积分学教程第二卷第一分册,高等教育出版社,北京,1956,80～84.

A POINCARÉ BIFURCATION FOR THE QUADRATIC SYSTEM WITH A TRIANGULAR PERIODIC REGION

Shen Boqian Si Chengbin

(*Dept. of Math.,Liaoning Normal University,Dalian* 116022)

Abstract A Poincaré bifurcation for the quadratic system with a triangular periodic region is discussed in this paper. The paper gives the accurate expression of its bifurcation function,and proves that its Poincaré bifurcation can produce two limit cycles.

Keywords Triangular Periodic Region, Poincaré Bifurcation, Bifurcation Function, Limit Cycle.

Subject Classification (CL)O175;(1991MR)34C.