高校应用数学学报A辑 Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000,15(1):25～33

具连续变量的线性时滞差分方程的振动性

张友生 庚建设

(湖南教育学院数学系,长沙 410012) (湖南大学应用数学系,长沙 410052)

摘 要 本文研究如下具有连续变量的线性时滞差分方程

$$y(t)-y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(t)y(t-\sigma_j)=0,\quad t\geqslant 0,$$

其中 $p_j(t)\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$, $0<\tau<\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\cdots\leqslant\sigma_m$, $j=1,2,\cdots,m$,获得了该方程的每个解都振动的若干充分条件,改进了现有文献中的结果.

关键词 连续变量,差分方程,振动.

分类号 (中图)O175;(1991MR)39A12.

§1 引 言

[1]给出了如下具有常系数的时滞差分方程

$$y(t)+p_1y(t-\tau_1)+p_2y(t-\tau_2)=0 \tag{1.1}$$

振动的充分必要条件,即它的特征方程

$$1+p_1e^{-\lambda\tau_1}+p_2e^{-\lambda\tau_2}=0 \tag{1.2}$$

没有实根,其中 p_1,p_2,τ_1,τ_2 是实数.

[2]讨论了如下具有连续变量的变系数时滞差分方程

$$y(t)-y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(t)y(t-\sigma_j)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{1.3}$$

和它的特殊形式

$$y(t)-y(t-\tau)+p(t)y(t-\sigma)=0,\quad t\geqslant 0. \tag{1.4}$$

其中

$$p_j(t)\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+),\quad 0<\tau<\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\cdots\leqslant\sigma_m,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{1.5}$$

$$p(t)\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+),\quad 0<\tau<\sigma. \tag{1.6}$$

[2]证明了:

收稿:1998-05-17,修回:1998-09-06.

国家自然科学基金资助课题(19671027).

定理 A 假设(1.5)成立，且 $\sigma_j=k_j\tau+\theta_j,0\leqslant\theta_j<\tau,k_j\geqslant 2$ 为正整数，$j=1,2,\cdots,m$. 如果

$$\sum_{j=1}^{m}\lim_{t\to\infty}\inf p_j(t)=a>0, \tag{1.7}$$

且存在一非负单增数列$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$，有

$$\limsup_{a\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{m}\min_{s\in[t_n,t_n+\tau]}\{p_j(s)\}\Big]>1-\alpha, \tag{1.8}$$

那么方程(1.3)也是振动的.

对方程(1.4)也有类似结果.

1996年，周勇在文[3]中获得了特殊情形下的一个新的判据. 最近，申建华在文[4]中通过化为微分方程的方法又获得了积分判据.

本文建立了方程(1.3)和(1.4)振动的新的判据，改进了文[2～4]的相应结果.

为了行文方便，下面先介绍几个定义.

定义 1.1 方程(1.3)的一个解 $y(t)$ 是指定义在$[-\sigma_m,\infty)$上的一个连续函数，它在$[0,\infty)$上满足方程(1.3).

定义 1.2 称方程(1.3)的一个解 $y(t)$ 是振动的，是指 $y(t)$ 有任意大的零点，否则，称 $y(t)$ 是非振动的，即 $y(t)$ 最终为正或最终为负.

定义 1.3 称方程(1.3)是振动的，如果它的每一个解都是振动的.

对方程(1.4)也有以上类似定义.

为方便起见，以下约定：$\sum\limits_{i}^{j}\equiv 0$，如果 $j<i$.

§2 方程(1.3)的振动性

本节考虑方程(1.3)及其特殊形式(1.4)的解的振动性.

定理 2.1 假设(1.5)成立，且 $\sigma_j=k_j\tau+\theta_j,0\leqslant\theta_j<\tau,k_j\geqslant 2$ 为正整数，$j=1,2,\cdots,m$，如果存在 $\alpha\in[0,1/4)$，使得

$$\sum_{j=1}^{m}\liminf_{t\to\infty}p_j(t)=\alpha, \tag{2.1}$$

且存在一非负单增数列$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$，有

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{m}\min_{n\in[t_n,t_n+\tau]}\{p_j(s)\}\Big]>1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha}), \tag{2.2}$$

那么方程(1.3)是振动的.

为了证明定理2.1，需要一个有用的引理.

引理 2.1 设有如下定义的数列$\{b_n\}$：

$$b_1=\frac{b}{1-b},b_n=\frac{b}{1-b_{n-1}},n=2,3,\cdots,\text{其中 } 0\leqslant b<\frac{1}{4}, \tag{2.3}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且有限，并且

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4b}). \tag{2.4}$$

定理 **2.1** 的证明 当 $\alpha=0$ 时,定理显然成立,下面假设 $\alpha>0$. 用反证法,设 $y(t)$ 是方程(1.3)的一个最终正解,则存在 t^*,使得当 $t>t^*$ 时,有 $y(t)>0$. 由条件(2.1)知,$\forall\ \varepsilon\in[0,\alpha)$,$\exists\ t_1^*$,使得

$$\sum_{j=1}^{m}\inf_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ s\in[t-\tau,t]}}\{p_j(s)\}>\alpha-\varepsilon,\quad t\geqslant t_1^*. \tag{2.5}$$

记 $t_2^*=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{t^*+\sigma_j,t_1^*\}$,从 $t-\tau$ 到 t 对方程(1.3)的两边积分,由积分中值定理可以得到

$$\begin{aligned}0=&\int_{t-\tau}^{\tau}y(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^{\tau}y(s-\tau)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\tau}^{\tau}p_j(s)y(s-\sigma_j)\mathrm{d}s=\\&\int_{t-\tau}^{\tau}y(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^{\tau}y(s-\tau)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})\int_{t-\tau}^{\tau}y(s-\sigma_j)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $t>t_2^*$,$t-\tau\leqslant\xi_{jt}\leqslant t$,$j=1,2,\cdots,m$.

令 $z(t)=\int_{t-\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s$,则 $z(t)>0$ 且 $z'(t)<0$,$t>t_2^*$,因此 $z(t)$ 单调减少,即有

$$z(t-\tau)<z(t-2\tau)\leqslant z(t-\sigma_j),\quad t>t_2^*,\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{2.7}$$

由(2.6)式可得

$$z(t-\tau)=z(t)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\sigma_j). \tag{2.8}$$

由(2.5),(2.7)和(2.8)式可得

$$\begin{gathered}z(t-\tau)>\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\sigma_j)>\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-2\tau)>(\alpha-\varepsilon)z(t-2\tau),\\ t>t_2^*,\quad t-\tau\leqslant\xi_{jt}\leqslant t,\quad j=1,2,\cdots,m.\end{gathered} \tag{2.9}$$

即 $z(t)>(\alpha-\varepsilon)z(t-\tau)$, $t>t_2^*+\tau$.

由(2.8),(2.9)两式知

$$\begin{gathered}z(t-\tau)>(\alpha-\varepsilon)z(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\sigma_j)>\\(\alpha-\varepsilon)z(t-\tau)+(\alpha-\varepsilon)z(t-2\tau)\end{gathered}$$

故我们有 $z(t-\tau)>(\alpha-\varepsilon)[(1-(\alpha-\varepsilon)]^{-1}z(t-2\tau)$,即有

$$z(t)>(\alpha-\varepsilon)/[1-(\alpha-\varepsilon)]z(t-\tau),\quad t>t_2^*+2\tau. \tag{2.10}$$

由(2.8)和(2.10)式,我们有

$$\begin{gathered}z(t-\tau)>\frac{\alpha-\varepsilon}{1-(\alpha-\varepsilon)}z(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\sigma_j)>\\(\alpha-\varepsilon)[1-(\alpha-\varepsilon)]^{-1}z(t-\tau)+(\alpha-\varepsilon)z(t-2\tau),\end{gathered}$$

因此有

$$z(t-\tau)>(\alpha-\varepsilon)\{1-(\alpha-\varepsilon)[1-(\alpha-\varepsilon)]^{-1}\}^{-1}z(t-2\tau).$$

记 $b_1=(\alpha-\varepsilon)[1-(\alpha-\varepsilon)]^{-1}$,$b_2=(\alpha-\varepsilon)(1-b_1)^{-1}$. 由上式可知 $z(t-\tau)>(\alpha-\varepsilon)\times(1-b_1)^{-1}z(t-2\tau)$. 因此

$$z(t)>(\alpha-\varepsilon)(1-b_1)^{-1}z(t-\tau),\quad t>t_2^*+3\tau.$$

继续做下去,最终将有

$$z(t)>(\alpha-\varepsilon)(1-b_{n-1})^{-1}z(t-\tau),\quad b_{n-1}=(\alpha-\varepsilon)(1-b_{n-2})^{-1},\quad n=2,3,\cdots. \tag{2.11}$$

由(2.8),(2.11)两式可得

$$z(t-\tau)>(\alpha-\varepsilon)(1-b_{n-1})^{-1}z(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\sigma_j)\geqslant$$

$$b_nz(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-2\tau)>b_nz(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})z(t-\tau),$$

即有

$$\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})\leqslant 1-b_n. \tag{2.12}$$

显然,当 $t\to\infty$ 时,$n\to\infty$. 且由 ε 的取法可知,当 $t\to\infty$ 时有 $\varepsilon\to\infty$. 故由(2.4),(2.12)式有

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}p_j(\xi_{jt})\leqslant\lim_{t\to\infty}(1-b_n)=\lim_{\substack{t\to\infty\\ n\to\infty}}(1-b_n)=1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha}).$$

这与条件(2.2)矛盾. 故方程(1.3)不可能存在最终正解. 同理可证方程(1.3)不可能存在最终负解,即方程(1.3)是振动的.

推论 2.1 假设(1.6)式成立,且 $\sigma=k\tau+\theta$,$k\geqslant2$ 为正整数,$0\leqslant\theta<\tau$. 如果存在 $\alpha\in[0,1/4)$,使得 $\liminf\limits_{t\to\infty}p(t)=\alpha$,且存在一个非负增数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$,有

$$\limsup_{n\to\infty}[\min_{s\in[t_n,t_n+\tau]}\{p(s)\}]>1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha}), \tag{2.13}$$

则方程(1.4)是振动的.

下面叙述本节的主要结果.

定理 2.2 假设(1.5)成立,且 $\sigma_j=k_j\tau+\theta_j$,$0\leqslant\theta_j<\tau$,$k_j\geqslant2$ 为正整数,$j=1,2,\cdots,m$. 如果存在 $\alpha\in[0,-1+\sqrt{2})$,使得

$$\liminf_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\right)>\alpha, \tag{2.14}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\right)>1-\frac{1}{2}\left[1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\frac{k+1}{k-1}\alpha^2}\right], \tag{2.15}$$

其中 $k=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{k_j\}$,则方程(1.3)是振动的.

为了证明定理 2.2,先证明几个有用的引理.

引理 2.2 设 $y(t)$是下列差分不等式

$$y(t)-y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(t)y(t-\sigma_j)\leqslant 0 \tag{2.16}$$

的一个最终正解,且假设(1.5)成立,$\sigma_j=k_j\tau+\theta_j$,$0\leqslant\theta_j<\tau$,$k_j\geqslant2$ 为正整数,$j=1,2,\cdots,m$. 如果存在 $\alpha\in[0,-1+\sqrt{2})$,使得(2.14)式成立,则最终有

$$y(t+k\tau)\geqslant b_qy(t),\quad q=1,2,\cdots \tag{2.17}$$

其中

$$b_1=\frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{4},\ b_q=b_{q-1}^2+(\alpha-\varepsilon)b_{q-1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)(\alpha-\varepsilon)^2,$$

$$k=\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{k_j\},\ \varepsilon\in[0,\alpha).$$

证 因 $y(t)$是(2.16)的一个最终正解,如果 $\alpha=0$,则 $b_q\equiv0$,$q=1,2,\cdots$,故(2.17)自然

成立.下面只考虑 $\alpha>0$ 的情形.

因 $y(t)$ 是(2.16)的一个最终正解,则必存在 t_1,当 $t\geqslant t_1$ 时,$y(t)>0$,$y(t-\sigma_j)>0$,$j=1,2,\cdots,m$.这样,由(2.16)式有

$$y(t)\leqslant y(t-\tau),\quad t\geqslant t_1, \tag{2.18}$$

$$y(t+i\tau)-y(t+(i-1)\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)y(t+i\tau-\sigma_j)\leqslant 0,\quad (i\geqslant 1\text{ 为正整数}). \tag{2.19}$$

由(2.14)式知对任意的正整数 $n\geqslant k-1$,存在 $t_2>t_1$,当 $t\geqslant t_2$ 时,对任意的 $\varepsilon\in[0,\alpha)$ 有 $\sum_{i=n-k+2}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)>\alpha-\varepsilon$,从而有 $\sum_{i=n}^{n+k-2}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)>\alpha-\varepsilon$.因此,必存在 n^* 满足 $n<n^*\leqslant n+k-2$,使得

$$\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\geqslant\alpha-\varepsilon. \tag{2.20}$$

i 从 n 到 n^* 对(2.19)式求和有

$$y(t+(n-1)\tau)\geqslant y(t+n^*\tau)+\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)y(t+i\tau-\sigma_j). \tag{2.21}$$

如果记 $x(t)=\int_{t-\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s$,则由(2.18)式知,当 t 充分大时,$x'(t)\leqslant 0$,即 $x(t)$ 是最终单调减少的,因此我们有

$$\int_{t-\tau}^{t}y(s+i\tau-\sigma_j)\mathrm{d}s=x(t+i\tau-\sigma_j)=x(t+i\tau-k_j\tau-\sigma_j)\geqslant$$
$$x(t+i\tau-k_j\tau)\geqslant x(t+(i-k)\tau)=\int_{t-\tau}^{t}y(s+(i-k)\tau)\mathrm{d}s.$$

注意到 $y(t)$ 是最终为正的,故当 t 充分大时有

$$y(t+i\tau-\sigma_j)\geqslant y(t+(i-k)\tau). \tag{2.22}$$

由(2.21)式有

$$y(t+(n-1)\tau)\geqslant y(t+n^*\tau)-\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)y(t+(i-k)\tau). \tag{2.23}$$

显然 $n\leqslant i\leqslant n^*$,从 $i-k+1$ 到 $n-1$ 对(2.19)式求和,可得

$$y(t+(i-k)\tau)\geqslant y(t+(n-1)\tau)+\sum_{l=i-k+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)y(t+(l-k_j)\tau-\theta_j)\geqslant$$
$$y(t+(n-1)\tau)+\sum_{l=i-k+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau).$$

由(2.18)式知

$$y(t+(n-k-1)\tau)\leqslant y(t+(n-k-2)\tau)\leqslant\cdots\leqslant y(t+(i-k+1-k)\tau).$$

因此有

$$y(t+(i-k)\tau)\geqslant y(t+(n-1)\tau)+\sum_{l=i-k+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)y(t+(n-k-1)\tau). \tag{2.24}$$

把上式代入(2.23)式,可得到

$$y(t+(n-1)\tau) \geqslant y(t+n^*\tau)+\sum_{l=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)[y(t+(n-1)\tau)+$$

$$\sum_{l=i-k+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)y(t+(n-k-1)\tau)] \geqslant$$

$$y(t+n^*\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+$$

$$y(t+(n-k-1)\tau)[\sum_{l=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=i-k+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)]=$$

$$y(t+n^*\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+y(t+(n-k-1)\tau)\times$$

$$\left[\sum_{l=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\left(\sum_{l=i-k+1}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)-\sum_{l=n}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)\right)\right] \geqslant$$

$$y(t+n^*\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+y(t+(n-k-1)\tau)\times$$

$$[(\alpha-\varepsilon)^2-\sum_{l=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=n}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)]. \tag{2.25}$$

因为

$$\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=n}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)=\sum_{i=n}^{n^*-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=i+1}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau),$$

所以

$$\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=n}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)=\frac{1}{2}(\sum_{i=n}^{n^*-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=n}^{i-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)+$$

$$\sum_{i=n}^{n^*-1}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot\sum_{l=i+1}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau))=$$

$$\frac{1}{2}[\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\cdot(\sum_{l=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+l\tau)-\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))] \geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=n}^{n^*}(\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))^2.$$

把上式代入(2.25)式得

$$y(t+(n-1))\tau \geqslant y(t+n^*\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+y(t+(n-k-1)\tau)\times$$

$$[(\alpha-\varepsilon)^2-\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=n}^{n^*}(\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))^2]=$$

$$y(t+n^*\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+y(t+(n-k-1)\tau)\times$$

$$\frac{1}{2}[(\alpha-\varepsilon)^2+\sum_{i=n}^{n^*}(\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))^2]. \tag{2.26}$$

因为

$$\sum_{i=n}^{n^*}(\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))^2 \geqslant \frac{1}{n^*-n+1}(\sum_{i=n}^{n^*}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau))^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{n^*-n+1}(\alpha-\varepsilon)^2 \geqslant \frac{1}{1-k}(\alpha-\varepsilon)^2,$$

把上式代入(2.26)式得到

$$y(t+(n-1)\tau) \geqslant y(t+n^{*}\tau)+(\alpha-\varepsilon)y(t+(n-1)\tau)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-k}\right)(\alpha-\varepsilon)^{2}y(t+(n-k-1)\tau). \qquad (2.27)$$

由(2.26)式有

$$y(t+(n-1)\tau) \geqslant \frac{\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^{2}}{1-(\alpha-\varepsilon)}y(t+(n-k-1)\tau) \geqslant \frac{(\alpha-\varepsilon)^{2}}{4}y(t+(n-k-1)\tau). \qquad (2.28)$$

由(2.28)式有

$$y(t+k\tau) \geqslant \frac{(\alpha-\varepsilon)^{2}}{4}y(t)=b_{1}y(t). \qquad (2.29)$$

即当 $q=1$ 时,(2.17)式成立.

由(2.20)式和(2.29)式,有

$$y(t+n^{*}\tau) \geqslant y(t+(n+k-1)\tau) \geqslant b_{1}y(t+(n-1)\tau) \geqslant b_{1}^{2}y(t+(n-k-1)\tau),$$

把上式代入(2.27)式,得到

$$y(t+(n-1)\tau) \geqslant [b_{1}^{2}+(\alpha-\varepsilon)b_{1}+(1+(k-1)^{-1})(\alpha-\varepsilon)^{2}/2]y(t+(n-k-1)\tau),$$

即有 $y(t+k\tau) \geqslant [b_{1}^{2}+(\alpha-\varepsilon)b_{1}+(1+(k-1)^{-1})(\alpha-\varepsilon)^{2}/2]y(t)=b_{2}y(t)$,即当 $q=2$ 时,(2.17)式成立.

如果继续做下去,可得 $y(t+k\tau) \geqslant b_{q}y(t)$,$q=1,2,\cdots$,引理 2.2 证毕.

引理 2.3 设有如下定义的数列$\{b_{n}\}$:$b_{1}=\frac{b^{2}}{4}$,$b_{n}=b_{n-1}^{2}+bb_{n-1}+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k-1})b^{2}$,其中 $k \geqslant 2$,$b \in [0,-1+\sqrt{2})$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}b_{n}$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}b_{n}=\frac{1}{2}\left(1-b-\sqrt{1-2b-\frac{k+1}{k-1}b^{2}}\right).$$

引理 2.4 在定理 2.2 的条件下,差分不等式(2.16)无最终正解;下列差分不等式无最终负解:

$$y(t)-y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{m}p_{j}(t)y(t-\sigma_{j}) \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \qquad (2.30)$$

证 用反证法,不妨设 $y(t)$是(2.16)的一个最终正解,则由引理 2.2 的证明知(2.18)和(2.19)式成立.

i 从 1 到 k 对(2.19)式求和,得到

$$y(t+k\tau)-y(t)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_{j}(t+i\tau)y(t+i\tau-\sigma_{j}) \leqslant 0.$$

由(2.22)式有

$$y(t+k\tau)-y(t)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_{j}(t+i\tau)y(t+(i-k)\tau) \leqslant 0. \qquad (2.31)$$

又由(2.18)式,可得 $y(t) \leqslant y(t-\tau) \leqslant y(t-2\tau) \leqslant \cdots \leqslant y(t-(k-1)\tau)$. 因此,由(2.31)式有

$$y(t+k\tau)-y(t)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)y(t)\leqslant 0.$$

由引理2.2有

$$\Big[b_q-1+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\Big]y(t)\leqslant 0.$$

注意到 $y(t)$ 是一个最终正解，因此，当 t 充分大时，有

$$b_q-1+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\leqslant 0.$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\leqslant 1-b_q.$$

注意到当 $t\to\infty$ 时 $q\to\infty$，且由 ε 的取法知，当 $t\to\infty$ 时 $\varepsilon\to 0$，因此，由引理2.3可得

$$\limsup_{t\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}p_j(t+i\tau)\Big)\leqslant 1-\frac{1}{2}\left[1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\frac{k+1}{k-1}\alpha^2}\right],$$

这与(2.15)式矛盾，故(2.16)式无最终正解.

类似可证(2.30)式无最终负解，引理2.4证毕. 由引理2.4，定理2.2显然成立.

推论2.2 假设(1.6)成立，且 $\sigma=k\tau+\theta,0\leqslant\theta<\tau,k\geqslant 2$，为正整数. 如果存在 $\alpha\in[0,-1+\sqrt{2})$，使得 $\liminf\limits_{t\to\infty}\big(\sum\limits_{i=1}^{k-1}p(t+i\tau)\big)>\alpha$ 且

$$\limsup_{t\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k}p_j(t+i\tau)\Big)>1-\frac{1}{2}\Big(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\frac{k+1}{k-1}\alpha^2}\Big),$$

则方程(1.4)振动.

参　考　文　献

1 Ladas, G., Pakula, L. and Wang, Z., Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations, J. Pana. Math., 1992, 2(1): 17～26.

2 张玉珠，燕居让，具有连续变量的差分方程振动性的判据，数学学报，1995，38(3)：406～411.

3 周勇，具有连续变量的变系数差分方程的振动性，经济数学，1996，17(3)：86～89.

4 申建华，具有连续变量差分方程振动性的比较定理及应用，科学通报，1996，16：1441～1444.

5 Yu, J. S., Zhang, B. G. and Qian, X. Z., Oscillation of delay difference equation with oscillating coefficients, J. Math. Anal. Appl., 1993, 177: 432～444.

6 Yu, J. S., Zhang, B. G. and Wang, Z. C., Oscillation of differential equations with deviating arguments, J. Pana. Math., 1992, 3: 59～78.

7 Yu, J. S., Oscillatory behavior of first order delay differential equations with oscillating coefficients, Ann. Differential Equations, 1990, 6: 481～488.

OSCILLATION FOR LINEAR DELAY DIFFERENCE EQUATIONS WITH CONTINUOUS ARGUMENTS

Zhang Yousheng

(*Dept. of Math.*, *Hunan Education Institute*, *Changsha* 410012)

Yu Jianshe

(*Dept. of Appl. Math*, *Hunan Univ.*, *Changsha* 410082)

Abstract The following linear delay difference equation with continuous argurnents is investigated:

$$y(t) - y(t-\tau) + \sum_{j=1}^{m} p_j(t) y(t-\sigma_j) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

where $p_j(t) \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $0 < \tau < \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_m$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Some sufficient conditions for the oscillation of every solution of the equation are obtained, which improves some known results in the literature.

Keywords Continuous Arguments, Difference Equation, Oscillation.

Subject Classification (CL)O175;(1991MR)39A12.