高校应用数学学报A辑　　Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000,15(1):79～85

线性算子与右端项都近似给定的有限维正则化方法

后步风　刘家琦　韩　波

(哈尔滨工业大学数学系,150006)

摘　要　本文利用有限维正则化方法来求解线性算子与右端项皆有噪声时的问题,并给出了该方法的误差估计及正则参数选取的标准.

关键词　有限维逼近,正则化,参数化泛函.

分类号　(中图)O241.7;(1991MR)65R30,45L05.

§1　引　言

设 X,Y 是两个实的 Hilbert 空间,T 是 X 到 Y 上的紧线性算子,考虑第一类算子方程:

$$Tx = y_0, \tag{1.1}$$

其中 $x\in X, y_0\in Y$.

由于在把问题归结为第一类算子方程的过程中,总会引起一些误差,即所得到的算子方程中的已知量均为近似给定的,这样代替(1.1)中的(T,y_0)以给定的(T_h,y_δ):

$$T_h x = y_\delta, \tag{1.2}$$

其中双参数族(T_h,y_δ)满足下列条件:

(1) 算子族$\{T_h\}(0\leqslant h\leqslant h_0)$中的每个 T_h 是 $X\to Y$ 上的紧线性算子,h 表示算子 T 与 T_h 间的近似度,由关系式$\|T-T_h\|=\sup\limits_{x\in X\ x\neq 0}\|Tx-T_hx\|/\|x\|\leqslant h$ 所确定.

(2) 元素$\{y_\delta\}$满足$\|y_\delta-y_0\|\leqslant\delta$,其中 δ 称为噪声水平.

求解问题(1.1)一般来说是不适定的,因此近似问题(1.2)的解(如果存在的话)不总能趋向于原问题的解.这类不适定问题的解法,有不少学者都在进行研究.关于求解的讨论,有著名的 E. Picard 定理[1],而关于求其稳定近似解以及讨论近似解的收敛性问题,Morozor[2],Groetsch[1]等都研究过.其中最著名的是求解不适定问题的 Tikhonov 正则化方

收稿:1998-03-23.修回:1999-01-11.

黑龙江省自然科学基金和哈尔滨工业大学校基金资助课题.

第一作者现工作单位:北大方正技术研究院.

法，所得到的稳定近似解称为 Tikhonov 正则解. 但他们所讨论的问题都是算子 T 精确给定而右端项 y_0 带有噪声，即他们所讨论的问题是：

$$Tx = y_\delta. \tag{1.3}$$

至于算子 T 与右端项 y_0 都带有噪声的问题(1.2)，[3,4]已作了深入的讨论，利用 Tikhonov 正则化方法得到问题(1.2)的正则解，并给出了正则参数的选择方法及正则解的渐近阶估计.

本文利用有限维正则化方法给出(1.1)的有限维逼近解. 该方法形式简单，且易于在计算机上实现. 同时还给出了该方法的误差估计及参数选择的标准. 设 T^+ 是算子 T 的 Moore-Penrose 广义逆，记(1.1)的极小模最小二乘解为 T^+y_0. 下面讨论给出 T^+y_0 的有限维逼近.

§2 有限维正则化方法

首先构造参数化泛函：

$$J_\alpha[x] = \|Tx - y_0\|^2 + \alpha\|x\|^2, \tag{2.1}$$

$$\widetilde{J}_\alpha[x] = \|T_h x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2, \tag{2.2}$$

且设 x_α 和 $x_\alpha^{\delta h}$ 分别是(2.1)及(2.2)的极小化解，则它们满足极小化条件：

$$T^*(Tx_\alpha - y_0) + \alpha x_\alpha = 0, \tag{2.3}$$

$$T_h^*(T_h x_\alpha^{\delta h} - y_\delta) + \alpha x_\alpha^{\delta h} = 0. \tag{2.4}$$

事实上 $J_\alpha[x]=(Tx-y_0,Tx-y_0)+\alpha(x,x)$，因为 x_α 是 $J_\alpha[x]$ 的极小化解，则

$$g(t) = (T(x_\alpha + t\Delta x) - y_0, T(x_\alpha + t\Delta x) - y_0) + \alpha(x_\alpha + t\Delta x, x_\alpha + t\Delta x)$$

在零点的导数等于零，即 $g'(0)=(\Delta x, T^*(Tx_\alpha - y_0)+\alpha x_\alpha)=0, \forall\, \Delta x$. 故 $T^*(Tx_\alpha - y_0)+\alpha x_\alpha=0$. 此即为(2.3)式，同理可得(2.4)式.

现设 D_n 是 X 的一个线性子空间，由线性无关组 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 张成，即 $D_n=\mathrm{span}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$. 有限维正则化方法的思想是在 D_n 上考虑变分问题：求 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}\in D_n$ 使得成立：

$$\widetilde{J}_\alpha[\hat{x}_\alpha^{\delta h}] = \inf_{x\in D_n}\widetilde{J}_\alpha[x]. \tag{2.5}$$

下面给出 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$ 的求解表达式. 令 $\hat{x}_\alpha^{\delta h} = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i$，因为 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$ 满足(2.5)式，故它满足极小化条件 $T_h^*T_h\hat{x}_\alpha^{\delta h} + \alpha\hat{x}_\alpha^{\delta h} = T_h^*y_\delta$，即 $\sum_{i=1}^{n}C_iT_h^*T_h^*\varphi_i + \alpha\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i = T_h^*y_\delta$，将上式分别与 $\varphi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 作内积得：$\left(\sum_{i=1}^{n}C_iT_h^*T_h\varphi_i+\alpha\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i,\varphi_j\right)=(T_h^*y_\delta,\varphi_j)$，即

$$\sum_{i=1}^{n}C_i[(T_h\varphi_i,T_h\varphi_j) + \alpha(\varphi_i,\varphi_j)] = (y_\delta, T_h\varphi_j), \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

由上式适当选取 α 即可计算出 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而得到 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$，我们将它作为 T^+y_0 的有限维逼近解. 为此先给出一些已知引理[1]：

引理1 设 x_α 是(1.1)的正则解，则

当 $T^+y_0\in R(T^*)$ 时，有 $\|x_\alpha - T^+y_0\| \leqslant C_1\sqrt{\alpha}$；

当 $T^{+}y_0 \in R(T^{*}T)$ 时，有 $\|x_\alpha - T^{+}y_0\| \leqslant C_1\alpha$.

引理**2** 设 x_α^δ 是(1.3)的正则解，则：

当 $T^{+}y_0 \in R(T^{*})$ 时，有 $\|x_\alpha^\delta - T^{+}y_0\| \leqslant C_2(\sqrt{\alpha} + \delta/\sqrt{\alpha})$；

当 $T^{+}y_0 \in R(T^{*}T)$ 时，有 $\|x_\alpha^\delta - T^{+}y_0\| \leqslant C_2(\alpha + \delta/\sqrt{\alpha})$.

§3 误差估计

为了给出有限维逼近解 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$ 的误差估计，我们先给出一些已知引理[5]. 先考虑 $h=0$时的情况. 以下令 $\hat{x}=T^{+}y_0$，x_n 是 D_n 中的任意元素，并设：$y_n=y_0-(T\hat{x}-Tx_n)$. 令

$$\mu_T(x_n) = \inf_{x\in D_n}\{\|Tx - y_n\|\},\ \mu_A = \inf_{x\in X}\{\|Tx - y_0\|\}.$$

则有结论：

命题**1** $\mu_T(x_n)=\mu_A=\inf\limits_{x\in X}\{\|Tx-y_0\|\}=\inf\limits_{x\in D_n}\{\|Tx-y_n\|\}$.

证 因为 $y_n=y_0-(T\hat{x}-Tx_n)$，所以 $Tx_n-y_n=T\hat{x}-y_0$，故有$\|Tx_n-y_n\|=\|T\hat{x}-y_0\|$.

又因 $\hat{x}=T^{+}y_0$是(1.1)的极小模最小二乘解，故

$$\|Tx_n - y_n\| = \|T\hat{x} - y_0\| = \mu_A = \inf_{x\in X}\{\|Tx - y_0\|\}.$$

要证 $\mu_T(x_n)=\mu_A$，仅需证$(Tx_n-y_n,Tw)=0$，$\forall\ w\in D_n$，上式等价于$(T\hat{x}-y_0,Tw)=0$，$\forall\ w\in D_n\subset X$，由于 $\hat{x}$ 是 $Tx=y_0$的极小模最小二乘解，故上式成立.

设 $U_T^n=\{x\in D_n:\|Tx-y_n\|=\mu_T(x_n)=\mu_T\}$，则由命题1知：$U_T^n$ 非空且为凸集. 令 $g_n=x_n-\hat{x}$，则有下述结果：

命题**2** x_n 是变分问题$\inf\{\|x-g_n\|:x\in U_T^n\}$的唯一解.

证 由命题1知：$x_n\in U_T^n$. 对于$\forall\ x\in U_T^n$，有

$$\|x - g_n\|^2 = \|x_n - g_n + x - x_n\|^2 = \|x_n - g_n\|^2 + \|x - x_n\|^2 + 2(x_n - g_n, x - x_n),$$

而

$$\begin{aligned}(x_n - g_n, x - x_n) &= (x_n - (x_n - \hat{x}), x - x_n) = \\ &(\hat{x}, x - x_n) = (\hat{x}, x - x_n + \hat{x} - \hat{x}).\end{aligned}$$

因 $\hat{x}$ 是问题(1.1)的极小模最小二乘解，故

$$(\hat{x}, x - x_n + \hat{x} - \hat{x}) \geqslant 0,\text{即}(x_n - g_n, x - x_n) \geqslant 0,$$

所以
$$\|x-g_n\|^2\geqslant\|x_n-g_n\|^2,\quad \forall\ x\in U_T^n.$$

即 x_n 是变分问题$\inf\{\|x-g_n\|:x\in U_T^n\}$的解，而 U_T^n 是凸的，故解唯一.

命题**3** 设参数化泛函 $J_\alpha[x]=\|Tx-y\|^2+\alpha\|x-x_0\|^2$，且 $x_\alpha,\hat{x}_\alpha$ 分别是当(y,x_0)代之以(y_1,x_1)与(y_2,x_2)时的上述泛函的极小解，且满足条件：

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant \delta,\quad \|x_1 - x_2\| \leqslant \tau,$$

则有结论：$\|x_\alpha-\hat{x}_\alpha\|\leqslant\tau+\delta/(2\sqrt{\alpha})$.

证 因 $x_\alpha,\hat{x}_\alpha$ 分别是参数化泛函

$$J_\alpha[x] = \|Tx - y_1\|^2 + \alpha\|x - x_1\|^2,\quad J_\alpha[x] = \|Tx - y_2\|^2 + \alpha\|x - x_2\|^2$$

的极小解，则它们满足关系式

$$T^*(Tx_\alpha - y_1) + \alpha(x_\alpha - x_1) = 0, \quad T^*(T\hat{x}_\alpha - y_2) + \alpha(\hat{x}_\alpha - x_2) = 0,$$

即 $x_\alpha=(T^*T+\alpha I)^{-1}(T^*y_1+\alpha x_1)$，$\hat{x}_\alpha=(T^*T+\alpha I)^{-1}(T^*y_2+\alpha x_2)$，从而 $x_\alpha-\hat{x}_\alpha=(T^*T+\alpha I)^{-1}[T^*(y_1-y_2)+\alpha(x_1-x_2)]$. 故

$$\begin{aligned}\|x_\alpha - \hat{x}_\alpha\| \leqslant & \|(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*(y_1 - y_2)\| + \|(T^*T + \alpha I)^{-1}(x_1 - x_2)\| \leqslant \\ & \|(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*\| \cdot \|y_1 - y_2\| + \\ & \|(T^*T + \alpha I)^{-1}\| \cdot \alpha \cdot \|(x_1 - x_2)\| \leqslant \\ & \|(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*\|\delta + \alpha\|(T^*T + \alpha I)^{-1}\|\tau.\end{aligned}$$

而

$$\|(T^*T + \alpha I)^{-1}x\|^2 = ((T^*T + \alpha I)^{-1}x, (T^*T + \alpha I)^{-1}x) = ((T^*T + \alpha I)^{-2}x, x).$$

令 $\{E_\lambda\}$ 是 T^*T 的谱族，则

$$\|(T^*T + \alpha I)^{-1}x\|^2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + \lambda)^2} \mathrm{d}(E_\lambda x, x) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\|x\|^2,$$

故

$$\|(T^*T+\alpha I)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1}.$$

而

$$\begin{aligned}\|(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x\|^2 = & ((T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x, (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x) = \\ & ([(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*]^*(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x, x) = \\ & (T(T^*T + \alpha I)^{-1}(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x, x) = \\ & (TT^*(TT^* + \alpha I)^{-2}x, x),\end{aligned}$$

令 $\{E'_\lambda\}$ 是 TT^* 的谱族，则

$$\|(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*x\|^2 = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(\alpha + \lambda)^2} \mathrm{d}(E'_\lambda x, x) \leqslant \frac{1}{4\alpha}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}(E'_\lambda x, x) \leqslant \frac{1}{4\alpha}\|x\|^2,$$

即有

$$\|(T^*T+\alpha I)^{-1}T^*\| \leqslant (2\sqrt{\alpha})^{-1},$$

所以

$$\|x_\alpha-\hat{x}_\alpha\| \leqslant \delta/(2\sqrt{\alpha})+\alpha\alpha^{-1}\tau=\delta/(2\sqrt{\alpha})+\tau.$$

为了估计有限维正则化方法的误差，我们先考虑一个辅助泛函求极小的问题：

求 $x_\alpha^n \in D_n$，使：$\bar{J}_n(x_\alpha^n)=\inf\limits_{x\in D_n}\bar{J}_\alpha(x)$，其中 $\bar{J}_\alpha(x)=\|Tx-y_n\|^2+\alpha\|x-g_n\|^2$. $(\alpha>0)$ 显然 x_n 是 $Tx=y_n$ 的极小模最小二乘解，则由引理知 $\|x_n-x_\alpha^n\| \leqslant C_1\alpha^s$，$s=0.5$ 或 1.

现在考虑有限维正则化方法的误差估计，令

$$\delta(x_n) = \{\|T\hat{x} - Tx_n\|^2 + \|\hat{x} - x_n\|^2\}^{0.5} = \|\hat{x} - x_n\|_*,$$

则有 $\|\hat{x}-x_n\|=\|g_n\| \leqslant \delta(x_n)$，且 $\|y_n-y_0\|=\|T\hat{x}-Tx_n\| \leqslant \delta(x_n)$，

故由命题3知 $\|x_\alpha^n-\hat{x}_\alpha\| \leqslant \delta(x_n)/(2\sqrt{\alpha})+\delta(x_n)$，其中 $\hat{x}_\alpha$ 是当 $h=\delta=0$ 时的有限维正则解. 则有

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_\alpha - \hat{x}\| \leqslant & \|\hat{x} - x_n\| + \|x_n - x_\alpha^n\| + \|x_\alpha^n - \hat{x}_\alpha\| \leqslant \\ & \delta(x_n) + C_1\alpha^s + \delta(x_n) + \delta(x_n)/(2\sqrt{\alpha}) = \\ & 2\delta(x_n) + C_1\alpha^s + \delta(x_n)/(2\sqrt{\alpha}).\end{aligned}$$

令 $\delta_n=\inf\limits_{x\in D_n}\{\|x-\hat{x}\|_*\}$，则由 x_n 的任意性，对上式两端取下确界可得：

$$\|\hat{x}_\alpha - \hat{x}\| \leqslant C_1\alpha^s + (2 + (2\sqrt{\alpha})^{-1})\delta_n.$$

当 $\delta\neq0,h=0$时,由引理2知$\|\hat{x}_\alpha-\hat{x}_\alpha^\delta\|\leqslant c_2(\delta+\delta/\sqrt{\alpha})$. 从而

$$\|\hat{x}_\alpha^\delta-\hat{x}\|\leqslant\|\hat{x}_\alpha-\hat{x}_\alpha^\delta\|+\|\hat{x}_\alpha-\hat{x}\|\leqslant C_1\alpha^s+\left(2+\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)\delta_{n^+}+C_2\left(\delta+\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right),\quad s=0.5\text{或}1.$$

而当 $h\neq0,\delta\neq0$时,我们有下列命题:

命题4 设 $\hat{x}_\alpha^\delta$ 与 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$ 分别是(1.1)与(1.2)的正则解,则

$$\|\hat{x}_\alpha^\delta-\hat{x}_\alpha^{\delta h}\|\leqslant C_3(\delta h/\alpha+h/\sqrt{\alpha}).$$

证 令 $u=\hat{x}_\alpha^\delta-\hat{x}_\alpha^{\delta h}$, $\Phi(u,T_h)=\|T_hu\|^2+\alpha\|u\|^2$,则

$$\begin{aligned}\Phi(u,T_h)=&(T_hu,T_hu)+\alpha(u,u)=\\&(T_hu,T_hu)+(T^*y_\delta-T^*T\hat{x}_\alpha^\delta-(T_h^*y_\delta-T_h^*T_h\hat{x}_\alpha^{\delta h}),u)=\\&(T_h\hat{x}_\alpha^\delta-T_h\hat{x}_\alpha^{\delta h},T_hu)+(y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta,Tu)-(y_\delta-T_h\hat{x}_\alpha^{\delta h},T_hu)=\\&(T_h\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta,T_hu)+(T_h\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta,Tu)=\\&(T_h\hat{x}_\alpha^\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta,T_hu)+(T\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta,T_hu)+(y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta,Tu)=\\&(T_h\hat{x}_\alpha^\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta,T_hu)+(y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta,Tu-T_hu).\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\Phi(u,T_h)\leqslant&\|T_h\hat{x}_\alpha^\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta\|\|T_hu\|+\|y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta\|\|Tu-T_hu\|\leqslant\\&h\cdot\|\hat{x}_\alpha^\delta\|\cdot\|T_hu\|+\|y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta\|\cdot h\cdot\|u\|\end{aligned}$$

又显然有 $$\|T_hu\|\leqslant\sqrt{\Phi(u,T_h)},\|u\|\leqslant\sqrt{\Phi(u,T_h)/\alpha},$$

故$\sqrt{\Phi(u,T_h)}\leqslant h\|\hat{x}_\alpha^\delta\|+\dfrac{h}{\sqrt{\alpha}}\|y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta\|$,则 $\|u\|\leqslant\dfrac{h}{\sqrt{\alpha}}\|\hat{x}_\alpha^\delta\|+\dfrac{h}{\alpha}\|y_\delta-T\hat{x}_\alpha^\delta\|$. 而 $\hat{x}_\alpha^\delta$ 是泛函 $J_\alpha(x)=\|Tx-y_\delta\|^2+\alpha\|x\|^2$的极小,故

$$\|T\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta\|^2+\alpha\|\hat{x}_\alpha^\delta\|^2\leqslant\|T\hat{x}-y_\delta\|^2+\alpha\|\hat{x}\|^2\leqslant\delta^2+\alpha\|\hat{x}\|^2,$$

从而有

$$\|T\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta\|\leqslant\sqrt{\delta^2+\alpha\|\hat{x}\|^2}\leqslant\delta+\sqrt{\alpha}\|\hat{x}\|,\quad\sqrt{\alpha}\|\hat{x}_\alpha^\delta\|\leqslant\delta+\sqrt{\alpha}\|\hat{x}\|.$$

故

$$\begin{aligned}\|u\|=\|\hat{x}_\alpha^\delta-\hat{x}_\alpha^{\delta h}\|=&h(\|T\hat{x}_\alpha^\delta-y_\delta\|+\sqrt{\alpha}\|\hat{x}_\alpha^\delta\|)/\alpha\leqslant\\&\frac{2h}{\alpha}(\delta+\sqrt{\alpha}\|\hat{x}\|)\leqslant C_3\left(\frac{\delta h}{\alpha}+\frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

从而我们得到有限维正则化方法的误差估计:

命题5 设 $\hat{x}_\alpha^{\delta h}$ 是问题(1.2)的有限维正则解,$\hat{x}$ 是(1.1)的极小模最小二乘解,则有估式:

$$\|\hat{x}_\alpha^{\delta h}-\hat{x}\|\leqslant C_1\alpha^s+C_2\left(\delta+\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right)+C_3\left(\frac{\delta h}{\alpha}+\frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}+2\right)\delta_n.$$

证

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_\alpha^{\delta h}-\hat{x}\|\leqslant&\|\hat{x}_\alpha^{\delta h}-\hat{x}_\alpha^\delta\|+\|\hat{x}_\alpha^\delta-\hat{x}\|\leqslant\\&C_1\alpha^s+C_2\left(\delta+\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right)+C_3\left(\frac{\delta h}{\alpha}+\frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}+2\right)\delta_n.\end{aligned}$$

由命题5可以看出,有限维正则化方法的收敛性问题及计算稳定性可以由参数 α 的选取

及有限维集合 D_n 的构造完全确定，δ_n 的估计是一个逼近论的问题，它表征了在模 $\|\cdot\|_*$ 的意义下集合 D_n 对原求解区域的近似程度，对于它的讨论已超出本文的范围，具体可参见逼近论方面的著作，这里我们认为 D_n 能够很好地逼近原求解区域，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

有了命题5，我们便可以给出正则参数选取的标准：

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\alpha\to 0\\ \delta\to 0,h\to 0}}\left[\alpha^s+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)(\delta+\delta_n)+\frac{\delta h}{\alpha}+\frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right]=0,s=1\text{ 或 }0.5.$$

§4 数值算例

设 $H=L^2(a,b)$，$F=L^2(c,d)$，$\Omega=[a,b]\times[c,d]$，函数 $K(t,x)\in L^2(\Omega)$，算子 $T:H\to F$ 定义为：

$$Tu(x)=\int_a^b K(t,x)u(t)\mathrm{d}t=f(x),\quad \forall\, u(x)\in H. \tag{4.1}$$

则(4.1)的基本解就是第一类Fredholm积分方程的广义解 T^+y_0，它显然是一个不适定的问题. 表1和表2给出了有限维正则化方法求解上述问题的两组数值结果. 在数值计算中，选取 $D_n=\mathrm{span}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，其中：

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}(x-x_{j-1})/\bar{h}, & x\in[x_{j-1},x_j],(j=1\text{ 去掉})\\ (x_{j+1}-x)/\bar{h}, & x\in[x_j,x_{j+1}],(j=n\text{ 去掉})\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中：$x_j=a+(j-1)\bar{h}$，$j=1,2,\cdots,n$，$\bar{h}=(b-a)/(n-1)$. 算例中取 $K(x,t)=xt$，$f(x)=x/3$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则精确解 $u(x)=x$. 代替精确的 $K(x,t)$ 和 $f(x)$ 以 $K_h(x,t)=xt+h\sin(tx)$ 和 $f_\delta(x)=x/3+\delta\sin(x)$，其中 $\delta=h=0.01$，数值结果见下表，其中表1和表2分别表示当 n 和 α 给定时的数值结果.

表1 n 给定时的有限维正则化方法数值解

真解 \ 参数	$n=21\quad\alpha=0.05$	$n=21\quad\alpha=0.01$	$n=21\quad\alpha=0.005$
0.000000	−0.000000	−0.000000	−0.000000
0.200000	0.198216	0.198336	0.198486
0.400000	0.396432	0.396482	0.386972
0.600000	0.594648	0.594848	0.594459
0.800000	0.792864	0.793864	0.793945
1.000000	0.991080	0.994080	0.997431

表2 α 给定时的有限维正则化方法数值解

真解 \ 参数	$n=11\quad\alpha=0.01$	$n=21\quad\alpha=0.01$	$n=41\quad\alpha=0.01$
0.000000	−0.000000	−0.000000	−0.000000
0.200000	0.197246	0.198336	0.198752
0.400000	0.395734	0.396482	0.386873
0.600000	0.593678	0.594848	0.594337
0.800000	0.790866	0.793864	0.793827
1.000000	0.990281	0.994080	0.997183

参 考 文 献

1 Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, Boston, 1984.

2 Morozov, V. A., Methods for solving incorrectly posed problems, Springer-Verlay, New York, 1984.

3 李荷稼,侯宗义,算子和右端项都近似给定的第一类算子方程的 Tikhonov 正则解的渐近阶估计,数学年刊 A 辑,1993,14(4):458~463.

4 陈宏,侯宗义,算子与右端项都为近似的迭代正则化方法,中国科学,1993,24(8):808~814.

5 朝红阳,有限维正则化方法求解不适定问题的误差估计,高等学校计算数学学报,1991,12:368~377.

FINITE DIMENSIONAL REGULARIZED METHOD FOR SOLVING LINEAR ILL-POSED PROBLEMS WITH THE NONEXACT OPERATOR AND RIGHT-HAND

Hou Bufeng Liu Jiaqi Han Bo

(*Dept. of Math., Harbin Institute of Technology, Harbin* 150006)

Abstract This paper uses the Finite-Dimensional regularized method to solve the problems which both the linear operator and right-hand are nonexact, and gives the error estimation and choosing criterion of the regularized parameter at the same time.

Keywords Finite Dimensional Approximation, Regularization, Parameterized Functional.

Subject Classification (CL)O241.7;(1991MR)65R30, 45L05.