高校应用数学学报A辑 Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000,15(1):97～100

构造曲线的插值型细分法——非均匀四点法

金建荣　汪国昭

(浙江大学应用数学系,杭州 310027)

摘　要　本文提出了一种构造曲线的插值型细分方法——非均匀四点法,四点法可作为这个方法的一个特例.用这种方法可以构造出 G^1 连续的插值曲线,该法引入了一些偏移参数来控制细分过程,偏移参数对曲线形状的影响是局部的.

关键词　四点法,曲线,插值,细分.

分类号　(中图)O241.3;(1991MR)68U05.

§1　引　言

离散细分法是构造曲线曲面的一类重要方法,近年来受到了广泛的注意,并在几何造型中得到了应用.细分法可分为插值型和非插值型两类,Dyn[1]提出的四点法是比较典型的一种插值型细分方法,[2]将四点法推广到了变张力参数情形,用四点法可构造出 G^1 连续的插值曲线[1,3],张力参数可用来调整曲线的形状,但当控制点分布不规则时,仅调整张力参数很难使曲线满足光顺、保形等要求[4],这就限制了四点法在几何造型中的应用.

本文给出了一种新的插值型细分方法——非均匀四点法,这是 Dyn 的四点法的一个推广,用这种方法可以构造出 G^1 连续的插值曲线,我们引入了一些偏移参数来控制细分过程,增加了曲线形状控制的自由度,偏移参数对曲线形状的影响是局部的.本文中的结论可相应地推广到变张力参数情形.

§2　非均匀四点插值细分法

给定 $\mathbf{R}^d$ 中的一个控制点列 $\{p_i^0\}_{i=-2}^{n+2}$,递归地定义 $\{p_i^m\}_{i=-2}^{2^m n+2}$ 如下:

$$\begin{cases} p_{2i}^{m+1} = p_i^m, & -1 \leqslant i \leqslant 2^m n + 1 \\ p_{2i+1}^{m+1} = \dfrac{1}{2}(p_i^m + p_{i+1}^m) + \omega \cdot \dfrac{1}{4}(\boldsymbol{d}_i^m + \boldsymbol{d}_{i+1}^m), & -1 \leqslant i \leqslant 2^m n, \end{cases} \tag{2.1}$$

收稿:1999-02-21

国家自然科学基金(19971079),浙江省自然科学基金和教育部博士点基金资助.

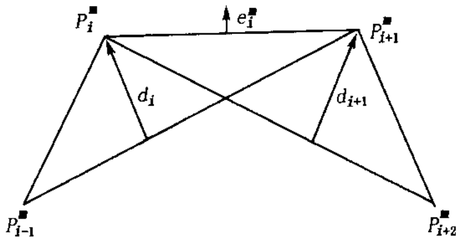

图1 $\boldsymbol{e}_i^m$ 的几何解释

式中 $\boldsymbol{d}_i^m=p_i^m-[v_i^m p_{i-1}^m+(1.0-v_i^m)p_{i+1}^m]$ $(-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1)$，$v_i^m(-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1)$为偏移参数，在$(0,1)$上取值，$\omega$ 为张力参数，记 $\boldsymbol{e}_i^m=\frac{1}{4}(\boldsymbol{d}_i^m+\boldsymbol{d}_{i+1}^m)$ $(-1\leqslant i\leqslant 2^m n)$，其几何意义如图1所示.

点列 $\{p_i^{m+1}\}_{i=-2}^{2^{m+1}n+2}$ 是 $\{p_i^m\}_{i=-2}^{2^m n+2}$ 的插值细分，当 v_i^m 都等于0.5时，(2.1)式变成：

$$\begin{cases} p_{2i}^{m+1}=p_i^m, & -1\leqslant i\leqslant 2^m n+1, \\ p_{2i+1}^{m+1}=\frac{1}{2}(p_i^m+p_{i+1}^m)+\frac{1}{4}\omega\left[\frac{1}{2}(p_i^m+p_{i+1}^m)-\frac{1}{2}(p_{i-1}^m+p_{i+2}^m)\right], & -1\leqslant i\leqslant 2^m n, \end{cases}$$

等价于 Dyn 的四点法公式，为区别起见，我们称由(2.1)式表示的插值细分方法为非均匀四点法. 设 $\Gamma^{(m)}$ 是由 $\{p_i^m\}_{i=0}^{2^m n}$ 构成的多边形，在本文中我们选取 v_i^m 满足：

$$\begin{cases} v_{2i}^{m+1}=v_i^m, & 0\leqslant i\leqslant 2^m n, \\ v_{2i+1}^{m+1}=0.5 & 1\leqslant i\leqslant 2^m n, \end{cases} \tag{2.2}$$

则可以证明(见下一节)：若 $-1<\omega<2$，$\{\Gamma^{(m)}\}_0^\infty$ 收敛到一条极限曲线 $\Gamma^{(\infty)}$，若 $0<\omega<1$，曲线 $\Gamma^{(\infty)}$ 是 G^1 连续的.

由(2.1)式可看出 $\Gamma^{(\infty)}$ 通过控制点 $p_i^0(0\leqslant i\leqslant n)$，其形状由 $p_i^0(-2\leqslant i\leqslant n+2)$ 的位置及参数 ω 和 $v_i^0(-1\leqslant i\leqslant n+1)$ 决定. ω 对曲线的影响是全局的：当 $\omega\to 0$ 时，曲线趋向于 $\Gamma^{(0)}$，参数 v_i^0 对曲线形状的影响是局部的，改变 v_i^0 只影响 p_{i-2}^0 到 p_{i+2}^0 之间四段曲线的形状.

§3 收敛及 G^1 连续条件

本节给出一个 $\{\Gamma^{(m)}\}_0^\infty$ 收敛的充分条件，及一个极限曲线 G^1 连续的充分条件.

定理1 若 v_i^m 满足(2.2)式且 $-1<\omega<2$，则 $\{\Gamma^{(m)}\}_0^\infty$ 收敛到一条曲线 $\Gamma^{(\infty)}$.

证 由(2.1)，(2.2)式可推出：

$$\boldsymbol{d}_{2i+1}^{m+1}=\frac{1}{4}\omega[\boldsymbol{d}_i^m+\boldsymbol{d}_{i+1}^m] \quad (-1\leqslant i\leqslant 2^m n, m\geqslant 0), \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{d}_{2i}^{m+1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}_i^m-\frac{1}{4}\omega[v_i^m\boldsymbol{d}_{i-1}^m+(1-v_i^m)\boldsymbol{d}_{i+1}^m+\boldsymbol{d}_i^m]\ (0\leqslant i\leqslant 2^m n, m\geqslant 0), \tag{3.2}$$

记 $\bar{\omega}=\max\left\{\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{2}\omega\right|+\frac{1}{4}|\omega|, \frac{1}{2}|\omega|\right\}$，则有：

$$\max_{-1\leqslant i\leqslant 2^{m+1}n+1}|\boldsymbol{d}_i^{m+1}|\leqslant\bar{\omega}\max_{-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1}|\boldsymbol{d}_i^m|. \tag{3.3}$$

由(2.1)，(2.2)式可知：

$$\|\Gamma^{(m+1)}-\Gamma^{(m)}\|\leqslant\max_{-1\leqslant i\leqslant 2^m n}|\omega\boldsymbol{e}_i^m|\leqslant\frac{1}{2}\max_{-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1}|\omega\boldsymbol{d}_i^m|. \tag{3.4}$$

若 $-1<\omega<2$，则 $\bar{\omega}<1$，由(3.3)，(3.4)式不难推出 $\{\Gamma^{(m)}\}$ 是一个 Cauchy 数列，因此定理成立.

设 $p^m(t)(0\leqslant t\leqslant n)$ 是满足 $p^m(2^{-m}i)=p_i^m(0\leqslant i\leqslant 2^m n)$ 的分段线性函数，则 $p^m(t)$ 是 $\Gamma^{(m)}$ 的一个参数化表示，相应地得到 $\Gamma^{(\infty)}$ 的一个参数化表示 $p^\infty(t)=\lim\limits_{m\to\infty}p^m(t)$.

定理2 若 v_i^m 满足(2.2)式且 $0<\omega<1$，则曲线 $\Gamma^{(\infty)}$ 是 G^1 连续的.

证 由(3.1)，(3.2)式可推出：

$$\boldsymbol{d}_{4i}^{m+2}=\frac{1}{4}(1-\omega)\boldsymbol{d}_i^m-\frac{1}{8}\omega[v_i^m\boldsymbol{d}_{i-1}^m+(1-v_i^m)\boldsymbol{d}_{i+1}^m]; \qquad (0\leqslant i\leqslant 2^m n)$$

$$\boldsymbol{d}_{4i+1}^{m+2}=\frac{1}{8}\omega\boldsymbol{d}_i^m-\frac{1}{16}\omega^2 v_i^m(\boldsymbol{d}_{i-1}^m-\boldsymbol{d}_{i+1}^m), \qquad (0\leqslant i\leqslant 2^m n-1)$$

$$\boldsymbol{d}_{4i+2}^{m+2}=\frac{1}{16}\omega(\boldsymbol{d}_i^m+\boldsymbol{d}_{i+1}^m)+\frac{1}{32}\omega^2[v_i^m(\boldsymbol{d}_{i-1}^m-\boldsymbol{d}_{i+1}^m)+(1-v_{i+1}^m)(\boldsymbol{d}_{i+2}^m-\boldsymbol{d}_i^m)], \qquad (-1\leqslant i\leqslant 2^m n-1)$$

$$\boldsymbol{d}_{4i+3}^{m+2}=\frac{1}{8}\omega\boldsymbol{d}_{i+1}^m-\frac{1}{16}\omega^2(1-v_{i+1}^m)(\boldsymbol{d}_{i+2}^m-\boldsymbol{d}_i^m). \qquad (-1\leqslant i\leqslant 2^m n-1)$$

记 $\bar{\omega}=\max\{|1-\omega|+\frac{1}{2}|\omega|,\frac{1}{2}|\omega|(1+|\omega|)\}$，则由上面四式可得：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2^{m-1}n+1}2^{m+2}|\boldsymbol{d}_i^{m+2}|\leqslant\bar{\omega}\max_{-1\leqslant i\leqslant 2^m n+1}2^m|\boldsymbol{d}_i^m|. \tag{3.5}$$

记 $\boldsymbol{h}_i^m=2^m(p_{i+1}^m-p_i^m)(0\leqslant i\leqslant 2^m n-1)$，设函数 $\boldsymbol{h}^m(t)(0\leqslant t\leqslant n)$ 满足：

$$\boldsymbol{h}^m(t)=\boldsymbol{h}_i^m\quad(2^m i\leqslant t\leqslant 2^m(i+1),0\leqslant i\leqslant 2^m n-1),$$

则由(2.1)，(2.2)式可知：

$$|\boldsymbol{h}^{m+1}(t)-\boldsymbol{h}^m(t)|=2^{m+1}|\omega\boldsymbol{e}_i^m|,\quad(2^{-m}i\leqslant t\leqslant 2^{-m}(i+1),0\leqslant i\leqslant 2^m n-1),$$

因此有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant n}|\boldsymbol{h}^{m+1}(t)-\boldsymbol{h}^m(t)|\leqslant 2|\omega|\max_{0\leqslant i\leqslant 2^m n}|2^m\boldsymbol{d}_i^m|. \tag{3.6}$$

若 $0<\omega<1$，则 $\bar{\omega}<1$，由(3.5)，(3.6)式不难推出 $\{\boldsymbol{h}^m(t)\}_0^m$ 是 Gauchy 数列，设 $\{\boldsymbol{h}^m(t)\}_0^m$ 收敛到一极限函数 $\boldsymbol{h}^m(t)$，$\boldsymbol{h}^m(t)$ 在 $t\neq 2^{-m}i(1\leqslant i\leqslant 2^m n-1,m\geqslant 0)$ 处是连续的. 由 $p_-^{m'}(t)=\boldsymbol{h}^m(t-)(0<t\leqslant n)$，$p_+^{m'}(t)=\boldsymbol{h}^m(t+)(0\leqslant t\leqslant n)$ 可知：

$$p_-^{\infty'}(t)=\boldsymbol{h}^m(t-)(0<t\leqslant n),p_+^{\infty'}(t)=\boldsymbol{h}^m(t+)(0\leqslant t<n),$$

因为 $(1-v_i^m)\boldsymbol{h}_i^m-v_i^m\boldsymbol{h}_{i-1}^m=-2^m\boldsymbol{d}_i^m$，由(3.5)式可知：

$$|(1-v_i^m)\boldsymbol{h}^m(2^{-m}i+)-v_i^m\boldsymbol{h}^m(2^{-m}i-)|\to 0\quad(m\to\infty),$$

因此有：

$$\boldsymbol{h}^\infty(2^{-m}i+)=\frac{v_i^m}{1-v_i^m}\boldsymbol{h}^\infty(2^{-m}i-),(1\leqslant i\leqslant 2^m n-1).$$

由(2.2)式可知 $p^\infty(t)$ 是分段 C^1 连续的，且在间断点 $t=i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 处满足：

$$P_+^{\infty'}(i)=\frac{v_i^0}{1-v_i^0}p_-^{\infty'}(i). \tag{3.7}$$

因此 Γ^∞ 是 G^1 连续的.

由(3.7)式注意到 $\frac{v_i^0}{1-v_i^0}$ 具有类似于 β 样条的 $\beta 1$ 参数的作用，在今后的工作中，我们将对偏移参数的形状控制作用、非均匀四点法的保凸条件及其在几何造型中的应用作进一步

的探讨.

参 考 文 献

1 Dyn,N. ,Levin,D. , et al. ,A 4-point interpolatory scheme for curve design, CAGD,1987,4:257～268.

2 朱松,四点法,一种离散造型方法:[学位论文],上海,复旦大学数学研究所,1992.

3 Cai Zhijie, Convergence, error estimation and some properties of four point interpolation subdivision scheme, CAGD, 1995,12:459～468.

4 丁立,区间上的变参数四点法曲线的凸性,计算机辅助设计与图形学学报,1996,8(增刊).

A NON-UNIFORM 4-POINT INTERPOLATORY SUBDIVISION SCHEME TO CONSTRUCT CURVE

Jin Jianrong Wang Guozhao

(*Dept. of Appl. Math. ,Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract A non-uniform 4 point interpolatory subdivision scheme is developed. G^1 interpolatory curve can be constructed by using this method. Some bias parameters are introduced to control the shape of curve.

Keywords 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme, Curve, Interpolation, Subdivision.

Subject Classification (CL)O241. 3;(1991MR)68U05.