离散 Walsh-Haar 变换的快速算法

卢 力[①②] 施保昌[①] 王能超[①] 田金文[②] 柳 健[②]
[①](华中科技大学并行计算研究所 武汉 430074)
[②](华中科技大学图像所图像信息处理与智能控制教育部重点实验室 武汉 430074)

摘 要 Walsh-Haar 函数系是一种具有良好的全局/局部性质的函数系，与其对应的离散变换是一种正交变换，有着广阔的应用前景。该文给出了离散 Walsh-Haar 变换及其逆变换的定义，并运用二分技术得到了离散 Walsh-Haar 变换的快速算法。文中的设计思想和方法可用于研究其它序的离散 Walsh-Haar 变换和其它的正交变换的快速算法。

关键词 Walsh-Haar 矩阵，离散 Walsh-Haar 变换，二分技术，快速算法

中图分类号：TN911.72 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2006)07-1192-04

Fast Algorithm of Discrete Walsh-Haar Transformation

Lu Li[①②] Shi Bao-chang[①] Wang Neng-chao[①] Tian Jin-wen[②] Liu Jian[②]
[①](*Parallel Computation Research Institute, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074, *China*)
[②](*Sate Key Laboratory of Education Ministry for Image Processing and Intelligent Control, Institute for Pattern Recognition and Artificial Intelligence, HUST, Wuhan* 430074, *China*)

Abstract Walsh-Haar function system is a new kind of function systems that has good global/local property. Discrete Walsh-Haar transformation is an orthogonal transformation that can be widely used in signal processing. In this paper, a new type of transformation,discrete Walsh-Haar transformation, is proposed, and the fast algorithm of discrete Walsh-Haar transformation is studied based on the dichotomous technique. The idea and method used to design the fast algorithm in this paper can be used to study the fast algorithms of other order discrete Walsh-Haar transformations and other discrete orthogonal transformations.

Key words Walsh-Haar matrix, Discrete Walsh-Haar transformation，Dichotomous technique, Fast algorithm

1 引言

Haar函数系是荷兰数学家Haar于 1910 年提出的一组完备的正交函数系[1]，Walsh函数系[1, 2]是美国数学家Walsh于1923 年提出的，我们一般称之为Walsh序的Walsh函数系(若不特别声明，下文的序均为Walsh序)。Walsh函数系全由全局函数组成(在单位区间$[0,1)$上非零)，而Haar函数系只包括两个全局函数，其余全为局部函数(在单位区间$[0,1)$的部分上非零)。这种全局／局部结构应用于图像处理的边缘检测、轮廓提取以及图像编码等方面是非常有用的。因此，研究Walsh函数系与Haar函数系这两种情况之间的其它全局／局部函数系就显得非常重要。

在文献［3］中，我们通过压缩、平移的方法构造了一类具有上述性质的函数系，即 Walsh-Haar 函数系，给出了第(k,l)类($k=1,2,\cdots;l=0,1,2,\cdots,k-1$)的 Walsh-Haar 函数系$\{\mathrm{wh}(j,t)\}$ ($t\in[0,1)$) 的一般表达式及前 KR^{m+1} 个 Walsh-Haar 函数系所对应的矩阵 $\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}$ 的递归性质。由于该函数系的生成核函数来源于 Walsh 序的 Walsh 函数系，所以我们也称它为 Walsh 序的 Walsh-Haar 函数系(若不特别声明，下面的序也指 Walsh 序)。在文献［4］中，我们还证明了 Walsh-Haar 函数系与 Walsh 函数系及 Haar 函数系一样具有完备性和正交性。在文献［5］中，我们研究了一类简单的离散 Walsh-Haar 变换即 Ter 变换的快速算法。

本文将给出一般的第(k,l)类($k=1,2,\cdots;l=0,1,2,\cdots,k-1$)的离散 Walsh-Haar 变换(简称离散 Walsh-Haar 变换，记为 DW-HT)的定义，并运用文献［6, 7］中提出的二分技术来研究该变换的快速算法。

2 离散 Walsh-Haar 变换及其逆变换

下文中如不特别声明，均设 $k=1,2,\cdots$； $l=0,1,2,\cdots,k-1$； $r=k-l$； $K=2^k$； $L=2^l$； $R=2^r=K/L$； $D=K-L$； $m=0,1,2,\cdots$。

定义 1 设［$x(u)$］为一串长度为 KR^{m+1} 的数据，则 DW-HT 定义为

$$[X(v)]^{\mathrm{T}}=[\mathrm{WH}_{KR^{m+1}}(v,u)][x(u)]^{\mathrm{T}}$$

逆 DW-HT(IDW-HT)定义为

$$[x(u)]^{\mathrm{T}}=[\mathrm{WH}_{KR^{m+1}}(v,u)]^{-1}[X(v)]^{\mathrm{T}}$$

其中 $u,v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}-1$。

2004-11-15 收到, 2005-06-09 改回
国家自然科学基金(60473015)资助课题

引理 1　KR^{m+1}阶的Walsh-Haar矩阵 $\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}$ 具有下列性质[3]：

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}\cdot(\mathbf{WH}_{KR^{m+1}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_{KR^{m+1}}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_{KR^{m+1}}=\mathrm{Diag}\{KR^{m+1}\boldsymbol{I}_K,KR^m\boldsymbol{I}_{RD},KR^{m-1}\boldsymbol{I}_{R^2D},\cdots,KR\boldsymbol{I}_{R^mD},K\boldsymbol{I}_{R^{m+1}D}\},$$

$\boldsymbol{I}_K$为K阶单位矩阵。

在引理 1 中，$\boldsymbol{P}_{KR^{m+1}}$ 为对角矩阵，其逆矩阵为

$$(\boldsymbol{P}_{KR^{m+1}})^{-1}=\mathrm{Diag}\left\{\frac{1}{KR^{m+1}}\boldsymbol{I}_K,\frac{1}{KR^m}\boldsymbol{I}_{RD},\frac{1}{KR^{m-1}}\boldsymbol{I}_{R^2D},\cdots,\frac{1}{KR}\boldsymbol{I}_{R^mD},\frac{1}{K}\boldsymbol{I}_{R^{m+1}D}\right\}$$

由此知

$$(\mathbf{WH}_{KR^{m+1}})^{-1}=\left((\boldsymbol{P}_{KR^{m+1}})^{-1}\cdot\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}\right)^{\mathrm{T}}$$

3　离散 Walsh-Haar 变换的快速算法

定义 2　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a(i,\ j)]$，则称矩阵 $[a(m-i+1,\ j)]$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列镜像对称矩阵，记为 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ 。

引理 2　Walsh矩阵具有如下递归性质[5, 6]：

$$\boldsymbol{W}_K=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{K/2}\otimes[1\quad 1]\\ \overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2}\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}$$

其中⊗为 Kronecker 积运算符。

引理 3　Walsh-Haar矩阵具有如下递归性质[3]：

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times R}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{K\backslash L}\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{W}_{K\backslash L}$ 表示将 K 阶 Walsh 矩阵的前 L 行划去后剩下的 $D\times K$ 子矩阵。

引理 4　设［$x(u)$］为一串输入数据，［$X(v)$］为［$x(u)$］经离散Walsh变换(简记为DWT)处理后的输出数据，$u,v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}-1$，即$[X(v)]^{\mathrm{T}}=[W_K(v,u)][x(u)]^{\mathrm{T}}$，则有[5]

$$[\overline{\overline{W}}_K(v,u)][x(u)]^{\mathrm{T}}=[X(K-1-v)]^{\mathrm{T}}$$

图 1 是 8 点的 DWT 的快速算法的计算流程图。

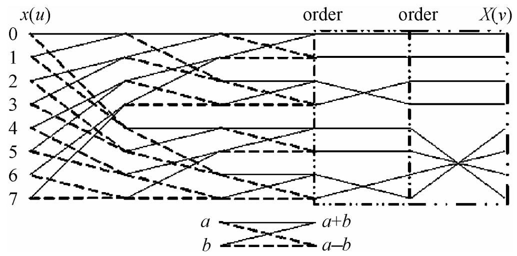

图 1　快速 Walsh 变换的计算流程图(K = 8)

Fig. 1　Flow chart of fast Walsh transformation

定理　Walsh-Haar 矩阵具有如下性质：

(1) 当 r = 1，即 R = 2 时，

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2})\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}$$

(2) 当 $r\geq 2$，即 $R\geq 4$ 时，

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}=\boldsymbol{Q}^{-1}_{KR^{m+1}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2)}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2})\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}}$ 的作用是使矩阵 $\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{K\backslash L}$ 中每一子块(共 R^{m+1} 个子块)的前 $K/2-L$ 行依次放到该矩阵的前部，余行放到该矩阵的后部。

证明　(1) 当 r = 1，即 R = 2 时，

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}\overset{引理3}{=}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times R}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{K\backslash L}\end{bmatrix}\overset{引理2}{=}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1\quad 1]\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes(\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2}\otimes[1\ -1])\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2})\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}$$

(2) 当 $r\geq 2$，即 $R\geq 4$ 时，

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}\overset{引理3}{=}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times R}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{K\backslash L}\end{bmatrix}\overset{引理2}{=}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes([1]_{1\times(R/2)}\otimes[1\quad 1])\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\otimes[1\quad 1]\\ \overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2}\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{Q}^{-1}_{KR^{m+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes([1]_{1\times(R/2)}\otimes[1\quad 1])\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes(\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\otimes[1\quad 1])\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes(\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2}\otimes[1\ -1])\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{Q}^{-1}_{KR^{m+1}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2)}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2})\otimes[1\ -1]\end{bmatrix}$$

证毕

有了上面的结论，我们来讨论 DW-HT 的快速算法问题。

情形 1　r = 1，即 R = 2 时的快速算法。

根据定理中(1)可知，对输入数据项$\{x(u)\}$进行奇偶二分，然后按对半二分输出：

$$\left.\begin{aligned}X^{(1)}(v)&=X^{(0)}(2v)+X^{(0)}(2v+1)\\ X^{(1)}(KR^m+v)&=X^{(0)}(2v)-X^{(0)}(2v+1)\end{aligned}\right\}v=0,1,2,\cdots,KR^m-1$$

$$X^{(0)}(u)=x(u),\quad u=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}-1$$

则原来的一个 KR^{m+1} 点的 DW-HT 问题变为一个 KR^m 点的 DW-HT 问题及 $R^{m+1-(1-1)}$ 即 R^{m+1} 组 $K/2$ 点的 DWT 问题(见引理 4，快速算法这里不予考虑，下同)。

然后再对此 KR^m 点的DW-HT问题进行同样的奇偶二分处理，结果按对半二分输出，

$$\left.\begin{aligned}X^{(2)}(v)&=X^{(1)}(2v)+X^{(1)}(2v+1)\\ X^{(2)}(KR^{m-1}+v)&=X^{(1)}(2v)-X^{(1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m-1}-1$$

便将它变成一个 KR^{m-1} 点的 DW-HT 问题及 $R^{m+1-(2-1)}$ 即 R^m 组 $K/2$ 点的 DWT 问题。

重复上述步骤，继续二分，

$$\left.\begin{aligned} &X^{(i)}(v)=X^{(i-1)}(2v)+X^{(i-1)}(2v+1)\\ &X^{(i)}(KR^{m+1-i}+v)=X^{(i-1)}(2v)-X^{(i-1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1-i}-1;\quad i=1,2,\cdots,m+1$$

最后，问题变成一个 K 点的 DW-HT 问题(即 K 点的 DWT 问题)及 $R^{m+1-((m+1)-1)}$ 即 R 组 $K/2$ 点的 DWT 问题。

情形 2 $r\ge 2$，即 $R\ge 4$ 时的快速算法。

根据定理中(2)有

$$\mathbf{WH}_{KR^{m+1}}=\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}}^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2)}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}$$

同理，有

$$\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2)}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2)\backslash L}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2}^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2^2)}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2^2)\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2^2})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2^{r-2})}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2^{r-2})\backslash L}\end{bmatrix}&=\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{r-2}}^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times(R/2^{r-1})}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{(K/2^{r-1})\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{K/2^{r-1}})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{r-2}}^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1]_{1\times 2}\\ \boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\boldsymbol{W}_{2L\backslash L}\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{2L})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{r-2}}^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{WH}_{KR^m}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{L})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}\otimes[1\quad 1]\\ (\boldsymbol{I}_{R^{m+1}}\otimes\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}_{2L})\otimes[1\quad -1]\end{bmatrix}\end{aligned}$$

从而，得到 DW-HT 的快速算法如下：

第 1 步 (1)对输入数据项进行奇偶二分，结果按对半二分输出：

$$\left.\begin{aligned} &X^{(1,1)}(v)=X^{(1,0)}(2v)+X^{(1,0)}(2v+1)\\ &X^{(1,1)}(KR^{m+1}/2+v)=X^{(1,0)}(2v)-X^{(1,0)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}/2-1$$

$$X^{(1,0)}(u)=x(u),\quad u=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}-1$$

则原来的一个 KR^{m+1} 点的 DW-HT 变换问题(经过矩阵 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}}$ 作用后)变为一个 $KR^{m+1}/2$ 的 DW-HT 问题 R^{m+1} 组 $K/2$ 点的 DWT 问题。

(2)对此 $KR^{m+1}/2$ 的DW-HT问题进行同样的奇偶二分处理，结果按对半二分输出，

$$\left.\begin{aligned} &X^{(1,2)}(v)=X^{(1,1)}(2v)+X^{(1,1)}(2v+1)\\ &X^{(1,2)}(KR^{m+1}/2^2+v)=X^{(1,1)}(2v)-X^{(1,1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}/2^2-1$$

便将此变换问题(经过矩阵 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2}$ 作用后)变成一个 $KR^{m+1}/2^2$ 的 DW-HT 问题及 R^{m+1} 组 $K/2^2$ 点的 DWT 问题。

(3)如此进行奇偶二分 $r-1$ 次，结果仍按对半二分输出：

$$\left.\begin{aligned} &X^{(1,t)}(v)=X^{(1,t-1)}(2v)+X^{(1,t-1)}(2v+1)\\ &X^{(1,t)}(KR^{m+1}/2^t+v)=X^{(1,t-1)}(2v)-X^{(1,t-1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}/2^t-1;\quad t=1,2,\cdots,r-1$$

便将离散变换问题(经过矩阵 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{t-1}}$ 作用后)变成为一个 $KR^{m+1}/2^{r-1}$ 点的 DW-HT 问题及 R^{m+1} 组 $K/2^{r-1}(=2L)$ 点的 DWT 问题。

(4) 最后再进行奇偶二分一次，结果仍按对半二分输出：

$$\left.\begin{aligned} &X^{(1,r)}(v)=X^{(1,r-1)}(2v)+X^{(1,r-1)}(2v+1)\\ &X^{(1,r)}(KR^{m+1}/2^r+v)=X^{(1,r-1)}(2v)-X^{(1,r-1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1}/2^r-1$$

则此 $KR^{m+1}/2^{r-1}$ 点的离散变换问题(这时不需要将变换矩阵的行进行调整)变为一个 $KR^{m+1}/2^r(=KR^m)$ 点的 DW-HT 问题及 R^{m+1} 组 $K/2^r(=L)$ 点的 DWT 问题。

这样，经过 r 步二分后，原来的一个 KR^{m+1} 点的 DW-HT 问题变成了一个 KR^m 点的 DW-HT 及若干组不同点的 DWT 问题。特别，如果 $l=0$, 则 $K=R$, 从而二分 r 步后，原来的一个 KR^{m+1} 点的 DW-HT 问题变成了一个 KR^m 点的 DW-HT 问题及 DR^{m+1} 个变换结果。

注意，在进行奇偶二分之前，我们对变换矩阵的行进行了调整(缘于矩阵 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}},\cdots,\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{r-2}}$ 的作用)，因而必须对输出结果数据(DR^{m+1} 个)进行调序。调序的顺序为从里到外，即用 $\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}/2^{r-2}}^{-1},\cdots,\boldsymbol{Q}_{KR^{m+1}}^{-1}$ 依次进行作用，这样才能得到正常的输出结果。

第 2 步 重复上述步骤，继续二分(每一次含 r 步二分及 $r-1$ 步调序，Walsh 变换除外):

$$\left.\begin{aligned} &X^{(s,t)}(v)=X^{(s,t-1)}(2v)+X^{(s,t-1)}(2v+1)\\ &X^{(s,t)}(KR^{m+1-(s-1)}/2^t+v)=X^{(s,t-1)}(2v)-X^{(s,t-1)}(2v+1)\end{aligned}\right\}$$

$$v=0,1,2,\cdots,KR^{m+1-(s-1)}/2^t-1$$

$$s=1,2,\cdots,m+1,\quad t=1,2,\cdots,r$$

这样，经过 $m+1$ 步二分后，得到 K 点的 DW-HT(此时化为 K 点的 DWT 问题)。

按照定义 1，对 KR^{m+1} 个数据进行 DW-HT 需要进行 $(KR^{m+1})^2$ 次乘法运算，但我们在这里提出的快速算法仅需做约 $KR^{m+1}(2+\log K)$ 次乘法运算。特别，当 $R=2$ 时，仅需做 $KR^{m+1}(1+\log K)-K$ 次乘法运算。

4 快速算法举例

下面以 16 点的离散 Her 变换和 16 点的离散 Ter 变换为例来说明 DW-HT 的快速算法问题。

4.1　16 点的离散 Her 变换的快速算法

由于 Her 矩阵对应于(2, 1)类的 Walsh-Haar 矩阵，因而离散 Her 变换的快速算法对应于情形 1。计算流程图如图 2 所示。其逆变换的计算流程图如图 3 所示。

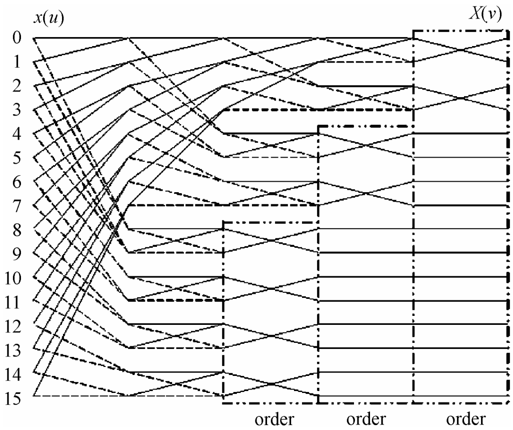

图 2　快速 Her 变换的计算流程图(k = 2, N = 16)

Fig. 2　Flow chart of fast Her transformation

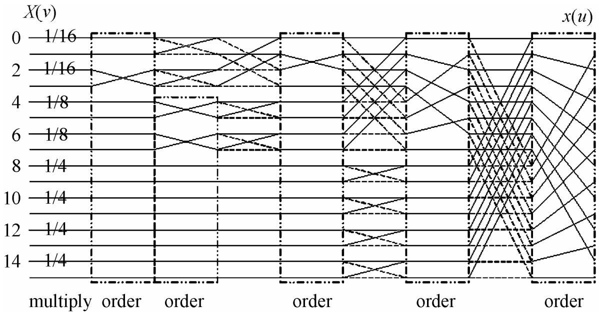

图 3　快速 Her 逆变换的计算流程图(k = 2, N = 16)

Fig. 3　Flow chart of inverse fast Her transformation

4.2　16 点的离散 Ter 变换的快速算法

由于 Ter 矩阵对应于(2, 0)类的 Walsh-Haar 矩阵，因而离散 Ter 变换的快速算法对应于情形 2。计算流程图如图 4 所示。其逆变换的计算流程图如图 5 所示。

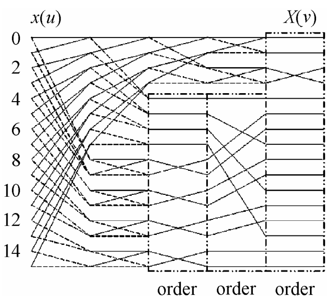

图 4 快速 Ter 变换的计算流程图(k = 2, N = 16)

Fig. 4　Flow chart of fast Ter transformation

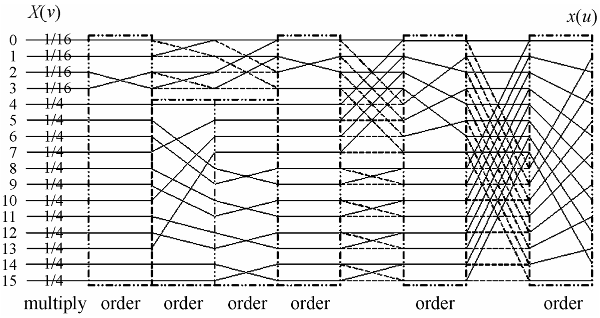

图 5　快速 Ter 逆变换的计算流程图(k = 2, N = 16)

Fig. 5　Flow chart of inverse fast Ter transformation

5　结束语

本文讨论了离散 Walsh-Haar 变换的快速算法。由于采用了 Walsh 序的 Walsh 变换，故该算法是对应于 Walsh 序的离散 Walsh-Haar 变换的快速算法，因而本文所提出的算法的设计思想可以应用于其它 3 种序的离散 Walsh-Haar 变换的快速算法的设计中。

参 考 文 献

[1]　(美)阿罕麦德 N, 罗 K R 著, 胡正名, 陆传赉译. 数字信号处理中的正交变换. 北京: 人民邮电出版社, 1979, 第五章.

[2]　(美)哈尔姆斯 H F 著，张其善等译. 序率理论：基础及其应用. 北京：人民邮电出版社，1980, 第一章.

[3]　卢力，施保昌，王能超. Walsh-Haar 类函数的演化生成. 第五届全国并行计算学术会议论文集. 西安：陕西科学技术出版社，1997：258－262.

[4]　卢力，王能超. Walsh-Haar 类函数的完备正交性. 数学杂志，1998，18(增刊) : 15－17.

[5]　卢力，施保昌，王能超. 离散 Ter 变换的快速算法. 数学的实践与认识，2004, 34(3) : 79－82.

[6]　王能超. Walsh 函数的演化生成. 中国图像图形学报，1996，1(3)：225－231.

[7]　王能超. 同步并行算法设计. 北京：科学出版社，1996, 第一章－第三章.

卢　力：　男，1964 年生，副教授，研究方向为数字图像处理、快速算法等.

施保昌：　男，1959 年生，教授，研究方向为快速算法、流体计算、优化等.

王能超：　男，1937 年生，教授，研究方向为并行算法、快速算法、复杂系统的演化分析等.

田金文：　男，1961 年生，教授，研究方向为小波理论、图像压缩、计算机视觉等.

柳　健：　男，1939 年生，教授，研究方向为数字图像处理与识别、计算机视觉、遥感图像分析等.