

# 基于 Screened Ratio 原理的冲击噪声环境下 DOA 估计算法

何 劲 刘 中

(南京理工大学电子工程系 南京 210094)

**摘 要** 该文提出了一种冲击噪声环境中 DOA 估计的算法。算法首先根据 Screened ratio 原理构造阵列信号的相关矩阵, 然后利用 MUSIC 算法实现 DOA 估计。与基于分数低阶矩(FLOM)的算法相比, 该文算法不需要选择 FLOM 参数  $p$ 。计算机仿真表明该文算法在冲击噪声环境下具有更佳的稳定性和估计精度。

**关键词** MUSIC 算法, 冲击噪声, 协变系数, 分数低阶矩

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)05-0875-04

## Screened-Ratio-Principle-Based DOA Estimation Algorithm in Impulsive Noise Environment

He Jin Liu Zhong

(Dept. of Electron. Eng., Nanjing Univ. of Sci. and Tech., Nanjing 210094, China)

**Abstract** This paper present a new DOA estimation algorithm in impulsive noise environment. The algorithm uses firstly screened ratio principle to construct the correlation matrix of the array data and then implements the DOA estimation by MUSIC algorithm. In comparison with the Fractional Lower Order Moment (FLOM)-based algorithms, the proposed algorithm does not need the selection of the FLOM parameter. Computer simulations show that the algorithm is more robust and more accurate than FLOM-MUSIC algorithm.

**Key words** MUSIC algorithm, Impulsive noise, Covariation coefficient, Fractional lower order moments

### 1 引言

DOA估计是阵列信号处理的一个重要研究领域<sup>[1]</sup>, 在无源探测、雷达、声纳、通信等领域具有广泛的应用。经过数十年的发展, DOA估计理论已经比较完善。传统的DOA估计大都是基于高斯模型假设的, 即假设信号和噪声均服从高斯分布, 在这种假设下, 利用阵列信号的二阶或高阶累积量可获得较理想的结果。然而, 在实际情况下, 噪声往往是非高斯的, 如海杂波噪声、大气噪声、无线信道噪声等<sup>[2]</sup>。近年来的研究发现<sup>[2]</sup>, 这些噪声模型更适合用 SaS 过程来表示; 但这类信号模型不存在二阶及以上矩, 这就使得基于二阶或高阶累积量的分析方法失效。

针对冲击噪声环境下的DOA估计问题, 文献[3]给出了最优的最大似然DOA算法, 但算法由于需要多维搜索, 计算量大限制了它的实际应用。文献[4]基于两个 SaS 过程的协变(Covariation), 构造了阵列信号的协变矩阵, 提出了类似 MUSIC算法的 ROC-MUSIC算法, 与最大似然算法相比, ROC-MUSIC算法降低了计算量。文献[5]在文献[4]的基础上, 定义了阵列信号的分数低阶矩(Fractional Lower Order

Moment, FLOM), 构造了一个阵列接收的FLOM矩阵, 提出 FLOM-MUSIC算法, 给出了一种冲击噪声环境下DOA估计的基本框架, 并通过仿真发现 FLOM-MUSIC算法与 ROC-MUSIC算法具有相同的性能。国内也有学者利用 FLOM 进行冲击噪声环境下的DOA估计的研究<sup>[6]</sup>。其实, 文献[4-6]都是基于 FLOM思想构造阵列信号相关矩阵的。但是, 使用 FLOM进行分析通常需要一个合适的 FLOM参数  $p$ , 这个参数通常是通过估计得到的。参数  $p$  的选择对算法性能的影响较大<sup>[5]</sup>, 很难从理论上决定如何选择最优参数  $p$ 。

为了克服不同参数  $p$  带来的算法估计误差, 本文利用 Screened ratio原理<sup>[7]</sup>构造了阵列接收的相关矩阵, 提出了 SR-MUSIC算法, 该算法避免了  $p$  参数的选择。计算机仿真表明, 与 FLOM-MUSIC算法相比, SR-MUSIC算法在冲击噪声环境下具有更好的稳健性和估计精度。

### 2 信号模型与噪声模型

假设一个  $L$  阵元等增益的均匀线阵对  $P$  ( $P < L$ ) 个远场窄带独立信号进行 DOA 估计。设阵元间距为  $d$ , 信号的 DOA 分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ , 以阵列的第一阵元为基准, 各信号源在基准点的复包络分别为  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)$ , 则在第  $m$  个阵元上第  $k$  次快拍的采样值为

$$x_m(k) = \sum_{i=1}^P s_i(k) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d \sin \theta_i} + n_m(k) \quad (1)$$

式中  $n_m(k)$  表示第  $m$  个阵元上的噪声。将各阵元上第  $k$  次快拍的采样写成向量形式:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)] \quad (3)$$

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_i}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(L-1) \sin \theta_i} \right]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_p(k)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{n}(k) = [n_1(k), n_2(k), \dots, n_L(k)]^T \quad (6)$$

这里假设噪声是各向同性的独立同分布的特征指数为  $0 < \alpha \leq 2$  的 SaS 随机变量, 其分布的特征函数为

$$\varphi(t) = e^{(j\delta t - \gamma|t|^\alpha)} \quad (7)$$

其中  $\delta$  为位置参数。当  $0 < \alpha \leq 1$  时,  $\delta$  为 SaS 概率密度的中值, 当  $1 < \alpha \leq 2$  时,  $\delta$  为 SaS 概率密度的均值。  $\gamma$  为分布的偏移系数, 相当于高斯分布的方差。当  $\delta = 0, \gamma = 1$  时, 我们把它称为标准分布。此时, 它的概率密度函数为<sup>[8]</sup>

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) x^{-\alpha k} \sin\left(\frac{k\alpha\pi}{2}\right), & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k}, & 1 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4}\right)}, & \alpha = 2 \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\Gamma(t)$  为 gamma 函数:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9)$$

图 1 是不同  $\alpha$  值时标准 SaS 分布概率密度曲线。从图中我们可以发现 SaS 分布的一个重要特性: 特征指数  $\alpha$  越小, SaS 概率密度的拖尾越长, 这就意味着 SaS 型的随机变量的特征指数越小, 冲击性就越强。与高斯分布不同的是, 特征指数为  $\alpha$  的 SaS 分布, 其二阶及以上矩都不存在, 它只存在于小于  $\alpha$  的矩。通常用协变系数  $\lambda$  来表征两个特征指数为  $1 < \alpha \leq 2$  的 SaS 分布的随机变量, 即

$$\lambda_{XY} = \frac{E\{XY^{(p-1)}\}}{E\{|Y|^p\}}, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (10)$$

其中  $Y^{(\beta)} = |Y|^{\beta-1} Y^*$ ,  $*$  表示复数共轭。

### 3 基于 Screened ratio 原理的 DOA 估计算法

#### 3.1 基于协变系数的阵列相关矩阵

我们知道子空间算法 DOA 估计性能取决于噪声子空间

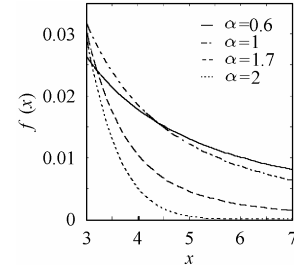


图 1 SaS 分布概率密度

的估计精度。而对噪声子空间的估计首先需要利用阵列接收数据  $\mathbf{x}(t)$  来形成一个相关矩阵  $\mathbf{R}$ , 即  $\mathbf{R} = f(\mathbf{x}(t))$ 。  $\mathbf{R}$  越能反映接收数据的统计特性, 则估计的噪声子空间越好; 反之, 则越差。当我们用协方差矩阵作为  $\mathbf{R}$  时, 其元素  $r_{ij}$  分别为

$$r_{ij} = E\{x_i(t)x_j^*(t)\}, \quad i, j = 1, \dots, L \quad (11)$$

此时我们使用了接收数据的二阶统计量, 当信号和噪声服从高斯分布时, 协方差矩阵可以确切地表征接收数据的统计特性, 这也是传统的基于高斯模型下算法可以获得高性能的原因。当噪声服从 SaS 分布时, 由于不存在二阶统计量, 所以协方差矩阵不能正确的表征接收数据的统计特性, 这就造成了传统算法性能的下降。文献[4]构造了阵列接收的协变系数矩阵, 其元素  $r_{ij}$  为

$$r_{ij} = \frac{E\{x_i(t)|x_j(t)|^{p-2}x_j^*(t)\}}{E\{|x_j(t)|^p\}}, \quad i, j = 1, \dots, L \quad (12)$$

式(12)用 FLOM 计算。如果选择合适的参数  $p$ , 基于协变系数矩阵的算法在噪声服从 SaS 分布时可以获得比基于协方差矩阵的算法更好的性能。类似共变系数矩阵的定义, 文献[5]中直接利用阵列接收数据的 FLOM 矩阵进行分析, 其性能与基于共变矩阵的算法的性能一致。但是, 利用 FLOM 进行计算会遇到参数  $p$  的选择问题, 不同的参数  $p$  会导致不同的处理结果。

#### 3.2 基于 Screened Ratio 原理的 MUSIC 算法

为了避免估计协变系数矩阵时的参数  $p$  的选择问题, 我们引入估计协变系数的 Screened ratio 原理, 然后利用 Screened ratio 原理来形成阵列接收数据的相关矩阵, 进而结合 MUSIC 算法实现 DOA 的估计。

**定理 1<sup>[9]</sup>** 如果  $X_0, X_1, \dots, X_n$  为联合 SaS 随机变量, 若  $X_0, X_1, \dots, X_n$  是独立和非退化的, 则

$$E\{X_0 | X_1, \dots, X_n\} = \lambda_{01} X_1 + \dots + \lambda_{0n} X_n \quad (13)$$

其中,  $\lambda_{0i}$  是  $X_0$  和  $X_i$  的协变系数,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

从式(13), 我们可以看到对两个联合 SaS 分布的随机变量  $X, Y$ , 其共变系数  $\lambda_{XY}$  可以表示成

$$E\{X|Y\} = \lambda_{XY} Y \quad (14)$$

**定理 2<sup>[7]</sup>** (Screened ratio 原理) 若随机变量  $X$  和  $Y$  满足  $E\{|X|\} < \infty$  和  $E\{X|Y\} = \lambda Y$ ,  $\lambda$  为一常数。对  $0 < c_1 < c_2 \leq \infty$ , 定义变量  $\chi_Y$ :

$$\chi_Y = \begin{cases} 1, & c_1 < |Y| < c_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

则

$$E\left\{\left(XY^{-1}\chi_Y\right)\right\}/P(c_1 < |Y| < c_2) = \lambda \quad (16)$$

从定理 2, 我们可以发现当  $X, Y$  服从 SaS 分布时, 可利用式(16)计算便得到  $X$  和  $Y$  的协变系数。Screened ratio 原理是由 Kanter 和 Steiger 提出的, 它是协变系数的一致估计方法。在实际中, 若给定  $N$  组独立观测值  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ ,  $\lambda$  可用下式估计:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i Y_i^{-1} \chi_{Y_i})}{\sum_{i=1}^N \chi_{Y_i}} \quad (17)$$

可以证明, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\lambda}$  为  $\lambda$  的强一致估计。

定理 2 说明, 当阵列接收服从 SaS 分布时, 用 Screened ratio 原理估计的  $\lambda$  即为阵列接收的共变系数。对每个阵列的接收数据  $\mathbf{x}_i, i=1, \dots, L$ , 我们都有

$$E\{\|\mathbf{x}_i\|\} < \infty, \quad i=1, \dots, L \quad (18)$$

$$E\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T\} = \lambda_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i, j=1, \dots, L \quad (19)$$

其中  $\lambda_{ij}$  为一常数。对任意  $0 < c_1 < c_2 \leq \infty$ , 构造一个新的随机变量  $\gamma_{x_j}$ :

$$\gamma_{x_j} = \begin{cases} 1, & c_1 < |\mathbf{x}_j| < c_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (20)$$

于是对于阵列接收的  $N$  个快拍数据, 我们可以形成一个相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$ , 其元素为

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^N (x_i(t)x_j^{-1}(t)\gamma_{x_j})}{\sum_{t=1}^N \gamma_{x_j}}, \quad i, j=1, \dots, L \quad (21)$$

显然, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 它为共变系数矩阵的一致估计。相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  可以正确反映冲击噪声环境下阵列接收数据的统计特性, 通过  $\hat{\mathbf{R}}$  的奇异值分解可获得噪声子空间的估计  $\hat{\mathbf{E}}_n$ 。

基于以上讨论, 本文提出的基于 Screened ratio 原理的 DOA 估计算法可表述为

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{E}}_n\hat{\mathbf{E}}_n^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (22)$$

本文把式(22)称为 SR-MUSIC 谱, 谱峰所对应的  $\theta$  即为 DOA 的估计值。

文献[4]中提出 ROC-MUSIC 算法时所建立的阵列信号模型是假设信号和噪声服从独立同分布的 SaS 分布, 事实上, 利用阵列协变系数矩阵进行 DOA 估计时, 并不需要信号服从 SaS 分布, 这一点可以利用文献[5]中的分析得到。文献[5]中分析了 FLOM 矩阵和协变系数矩阵之间的关系, 我们发现阵列接收的协变系数矩阵是尺度化的 FLOM 矩阵, 所以, 协变系数矩阵与 FLOM 矩阵具有相同的结构特点。因此,

对于 SaS 分布噪声环境中, 非 SaS 分布信号的 DOA 估计, 仍能利用阵列接收的协变系数矩阵进行分析。

### 4 计算机仿真

这一节我们通过计算机仿真来分析比较 FLOM-MUSIC 算法和 SR-MUSIC 算法。设一个 8 元的等距线阵, 阵元间距为半波长, 空间有两个信号分别位于  $-5^\circ$  和  $5^\circ$ 。现考虑噪声分别服从  $\alpha=1.8, 1.6$  和  $1.4$  的 SaS 分布时, FLOM-MUSIC 与 SR-MUSIC 算法的成功概率和均方根误差随信噪比的变化曲线比较, 如图 2~图 7 所示。在模拟中, 快拍数为 100, FLOM-MUSIC 算法的参数  $p$  选择为 0.8, 1 和 1.2, SR-MUSIC 算法中  $c_1$  为阵列接收数据的中值,  $c_2 = \infty$ ; 估计信号分别位于  $(-6^\circ, -4^\circ)$  和  $(4^\circ, 6^\circ)$  时, 记为一次成功估计。信噪比定义<sup>[5]</sup>为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left\{ \frac{E\left\{\left|s(t)\right|^2\right\}}{\gamma^\alpha} \right\} \quad (23)$$

由图 2~图 7 可以发现, 在不同的冲击噪声环境中, SR-MUSIC 算法的成功概率与 FLOM-MUSIC 算法相差不大, 而其均方根误差要小于 FLOM-MUSIC 算法。这就说明在冲击噪声环境下, SR-MUSIC 算法的性能要优于 FLOM-MUSIC 算法。

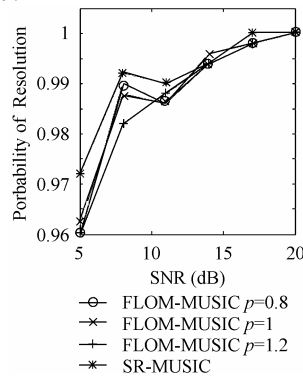


图 2  $\alpha = 1.8$  时成功

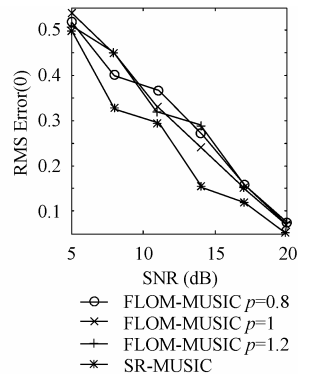


图 3  $\alpha = 1.8$  时均方根

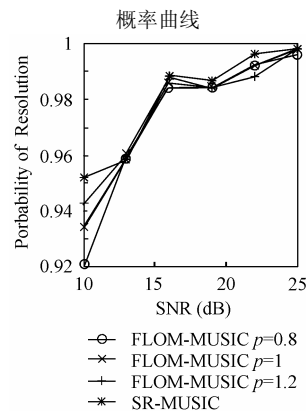


图 4  $\alpha = 1.6$  时成功

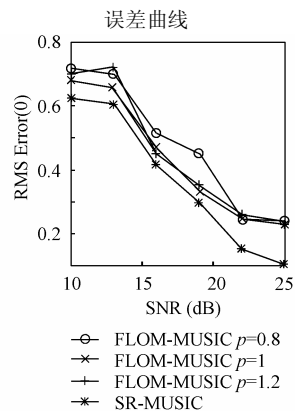


图 5  $\alpha = 1.6$  时均方根

概率曲线

误差曲线

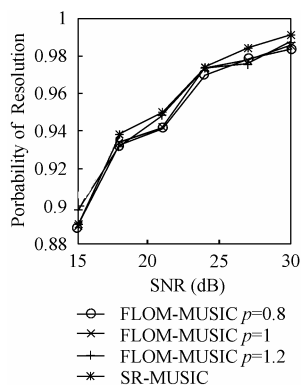


图 6  $\alpha = 1.4$  时成功  
概率曲线

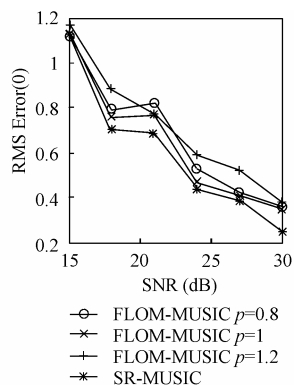


图 7  $\alpha = 1.4$  时均方根  
误差曲线

## 5 结束语

本文根据 Screened ratio 原理构造阵列接收数据的相关矩阵, 提出了一种冲击噪声环境下 DOA 估计的新算法——SR-MUSIC 算法。与 FLOM-MUSIC 算法相比, SR-MUSIC 算法不需要选择 FLOM 参数  $p$ , 而且其性能也要好于 FLOM-MUSIC 算法, 是一种冲击噪声环境下 DOA 估计的有效算法。

## 参考文献

- [1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: The parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag*, 1996, 13(2): 67 – 94.
- [2] Shao M, Nikias C L. Signal Processing with Alpha-Stable

Distributions and Applications. New York: Wiley, 1995, Chap 1,2.

- [3] Tsakalides P, Nikias C L. Maximum likelihood localization of sources in noise modeled as a stable process[J]. *IEEE Trans on SP*, 1995, 43(10): 2700 – 2713.
  - [4] Tsakalides P, Nikias C L. The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments[J]. *IEEE Trans on SP*, 1996, 44 (7): 1623 – 1633.
  - [5] Liu T H, Mendel J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. *IEEE Trans on SP*, 2001, 49 (7): 1605 – 1613.
  - [6] 吕泽均, 肖先赐. 基于分数阶矩的测向方法研究[J]. *电波科学学报*. 2002, 12, 17(12): 561 – 564.
  - [7] Kanter M, Steiger W L. Regression and autoregression with infinite variance. *Adv. Appl. Probab.*, 1974, 6(4): 768 – 783.
  - [8] Shao M, Nikias C L. Signal processing with fractional low order moments: stable processes and their application[J]. *Proc IEEE*, 1993, 81: 986 – 1010.
  - [9] Miller G. Properties of certain symmetric stable distribution. *J. of Multivariate Anal.*, 1978, 8: 346 – 360.
- 何 劲: 男, 1980 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空时自适应处理、非平稳信号处理、机载 SAR 运动目标检测与成像。
- 刘 中: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理、传感器网络、混沌与信息动力学。