

程芦颖,许厚泽.地球重力场恢复中的位旋转效应.地球物理学报,2006,49(1):93~98

Cheng L Y, Xsu H Z. The rotation effect of the gravity potential on the Earth's gravity field recovery. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, 49(1):93~98

## 地球重力场恢复中的位旋转效应

程芦颖<sup>1,2</sup>,许厚泽<sup>1</sup>

1 中国科学院测量与地球物理研究所,武汉 430077

2 西安测绘研究所,西安 710054

**摘 要** 分析了地球自转引起的位旋转效应公式中采用近似速度的影响.对一组 GFZ 的快速科学轨道、一组 TUM 的约化动力学轨道以及一组 GFZ 的事后科学轨道,计算了星历提供的速度与只有地球引力场对卫星产生作用时的卫星速度的差值,其中参考重力场模型分别采用 EGM96、EIGEN2 和 EIGEN-CG01C.通过比较得出:轨道数据与 EIGEN2 地球重力场模型的自恰性优于 EGM96 和 EIGEN-CG01C 地球重力场模型.速度差各分量的变化具有很明显的周期性且与卫星轨道的运行周期相吻合.当要求在卫星轨迹处获得  $1\text{m}^2/\text{s}^2$  精度的扰动位时,也即要求位旋转效应公式中卫星速度的近似精度小于  $2\text{mm}/\text{s}$  时,GFZ 的快速科学轨道、TUM 的约化动力学轨道只需要剔除那些速度精度不满足要求的卫星轨迹点;当要求在卫星轨迹处获得  $0.5\text{m}^2/\text{s}^2$  精度的扰动位时,应当重新估算上述轨道的速度信息,或采用精度更高的 GFZ 事后科学轨道.

**关键词** 地球重力场,能量守恒,位旋转效应,CHAMP,GRACE

文章编号 0001-5733(2006)01-0093-06

中图分类号 P228

收稿日期 2004-12-31,2005-09-20 收修定稿

### The rotation of the gravity potential on the Earth's gravity field recovery

CHENG Lu-Ying<sup>1,2</sup>, XSU Hou-Ze<sup>1</sup>

1 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China

2 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China

**Abstract** We analyze the effect of approximate velocity in the formula of the rotation of the gravity potential, which is caused by the Earth rotation. We compute the difference between the satellite ephemeris's velocity and numerical integral's velocity. The ephemeris data come from GFZ's Rapid Science Orbit, TUM's Reduced-Dynamic Orbit, and GFZ's Post-processed Science Orbit respectively. The integral data are obtained based on the reference gravity field models EGM96, EIGEN2, and EIGEN-CG01C, respectively. The fitting between ephemeris velocity and integral velocity depended on EIGEN2 reference gravity field model is better than the EGM96 and EIGEN-CG01C model. The variations of velocity difference have obvious periodicity, which coincides with the satellite orbit period. When the disturbing potential of  $1\text{m}^2/\text{s}^2$  accuracy, or the approximate velocity of accuracy less  $2\text{mm}/\text{s}$  in the formula of the rotation of the gravity potential is required, the satellite orbit data not satisfied the potential rotation computing demand are rejected from the GFZ's Rapid Science Orbit and TUM's Reduced-Dynamic Orbit. If the disturbing potential is desired  $0.5\text{m}^2/\text{s}^2$  at satellite track, the satellite velocity required in formula of the rotation of the gravity potential should be re-computed or the GFZ's Post-processed Science Orbit is adopted.

**基金项目** 国家自然科学基金项目(40234039)资助.

**作者简介** 程芦颖,男,1961年生,研究员,1982年毕业于解放军测绘学院大地测量系,主要从事空间大地测量和物理大地测量研究.

E-mail: lycheng1961@tom.com

**Keywords** Earth's gravity field, Conservation of energy, Rotation effect of gravity potential, CHAMP, GRACE

## 1 引言

利用卫星跟踪卫星技术确定地球重力场及其随时间的变化是目前国际上研究地球重力场的重要手段. 这种用于重力测量的小卫星其轨道特征为低高度、接近极轨道, 以期实现测量数据的全球覆盖和探测较高分辨率的重力场<sup>[1-4]</sup>.

2000年7月15日、2002年3月17日在距阿尔汉格尔斯克 (Archangelsk) 南部 180km 的俄罗斯普列谢茨克 (Plesetsk) 发射场用俄罗斯宇宙 (COSMOS) 运载火箭将担负地球科学和大气研究使命的 CHAMP 卫星、重力场探测和气象试验的 GRACE 卫星送入高度约为 460km 的运行轨道. 其中 GRACE 卫星是一对在同一轨道面上相距约 220km 的类似于 CHAMP 的卫星. 这些卫星的特殊之处是装备了星载 GPS 接收机完成精密轨道的测定, 星载 SuperSTAR 加速度计完成作用于卫星上的非保守力的测定, GRACE 卫星还装备了星载 K 波段微波测距系统完成星间距离变化率的测定<sup>[5-7]</sup>.

CHAMP、GRACE 卫星的成功发射以及正常工作使在 20 世纪 50、60 年代提出的基于能量守恒定律恢复地球重力场的理论和方法得以实现<sup>[8-10]</sup>. 随之基于 CHAMP、GRACE 卫星观测数据的一系列重力场模型相继问世<sup>[11-23]</sup>. 在这些模型中, 一部分是利用 CHAMP、GRACE 卫星的轨道摄动通过求解卫星运动方程一并获得地球重力场的解, 一部分是利用能量守恒定律在 CHAMP、GRACE 卫星的运动轨迹上建立能量守恒观测方程, 通过扰动位的泛函获得地球重力场其他扰动场元或全球重力场模型. 其中利用能量守恒定律恢复地球重力场的研究是其主要的研究方法.

本文根据卫星运动轨迹上的能量守恒观测方程, 重点研究由于地球自转引起的位旋转效应的特性, 通过对 GFZ 数据中心提供的快速科学轨道、事后科学轨道、TUM 提供的约化动力学轨道的分析, 利用 EGM96、EIGEN2、EIGEN-CG01C 地球重力场模型, 分析位旋转效应采用近似速度算法的影响.

## 2 能量守恒观测方程

在惯性坐标系中, 卫星的运动方程可写为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R + G + f, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{r}$  是卫星在惯性坐标系中的加速度矢量,  $R$  是地球引力位,  $G$  是作用于卫星上的所有其他保守力对应的位, 包括固体潮、海潮、日、月、行星引力等,  $f$  是作用于卫星上的所有非保守力. 而非保守力不存在位函数, 对于 CHAMP、GRACE 卫星, 由星载加速度计直接测量作用于卫星上的非保守力, 包括大气阻力、太阳光压、地球反照辐射、卫星姿态控制动力等.

对于在惯性系中 CHAMP、GRACE 卫星轨迹上的任意一点, 由于地球质量分布的不均匀性且在惯性空间中存在自转运动, 引起该点的位的变化量可达到  $1\text{m}^2/\text{s}^2$ <sup>[24]</sup>. 因此, 在推导能量守恒观测方程时必须顾及地球自转引起的位的时变<sup>[4]</sup>. 当忽略作用于卫星上的其他保守力对应位  $G$  的时变, 可得到

$$\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 = R - \frac{\partial R}{\partial t} dt + G + \dot{\mathbf{r}} \cdot f dt + E, \quad (2)$$

其中,  $\dot{\mathbf{r}}$  是卫星在惯性坐标系中的速度矢量. 等式左端是卫星的动能, 等式右端第二项是地球自转引起的位旋转效应, 第四项是非保守力引起的耗散能量,  $E$  是能量常数. 将地球引力位分解为正常位  $U_0$  和扰动位  $T$ , 则能量守恒的观测方程最终可写为

$$T = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{\partial R}{\partial t} dt - \dot{\mathbf{r}} \cdot f dt - G - U_0 - E. \quad (3)$$

## 3 地球自转位旋转效应

对于惯性系中的任意一点, 由于地球自转现象, 则在该点处的位的时变为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{r}_t) - R(\mathbf{r}_{t+\Delta t})}{\Delta t} = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{r}_t$  和  $\mathbf{r}_{t+\Delta t}$  是惯性系中的同一点由于地球自转反映在地固系中的两个矢量. 进一步有

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_e \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{r}), \quad (5)$$

其中,  $\dot{\mathbf{r}}_e$  是地球引力场对该点处的卫星作用产生的加速度矢量,  $\boldsymbol{\omega}$  是地球自转角速度在惯性系中的矢量表示. 如果忽略地球自转角速度矢量的变化, 这时,

$$\frac{\partial R}{\partial t} dt = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_e \times \mathbf{r}) dt = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_e \times \mathbf{r}), \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{r}_e$  是只有地球引力场对该点处的卫星产生作用时卫星的速度矢量. 如果用惯性系中的实际速度  $\mathbf{r}$  代替  $\mathbf{r}_e$ , 则(6)式与文献[4]的结果一致.

#### 4 近似速度对位旋转效应的影响

式(6)是在惯性系中由矢量表示的地球自转引起的位旋转效应. 如果忽略地球自转角速度矢量的变化且令  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$ , 同时令  $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$ 、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , 则标量形式的位旋转效应为

$$\frac{\partial R}{\partial t} dt = (\dot{x}_e y - y_e \dot{x}), \quad (7)$$

由近似速度引起的位旋转效应误差为

$$\Delta R = r_d v_e, \quad (8)$$

其中,  $r_d = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $v_e$  是速度误差.

#### 5 位旋转效应的近似计算影响

当利用能量守恒定律由 CHAMP、GRACE 卫星观测数据建立能量守恒观测方程时, 通常都是直接采用轨道星历提供的卫星位置和速度信息计算地球自转引起的位旋转效应. 根据(8)式, 对于轨道高度为 460km 的 CHAMP、GRACE 卫星, 当我们需要在卫星轨迹处获得扰动位的精度为  $1\text{m}^2/\text{s}^2$  时, 采用地球自转角速度  $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{rad/s}$ , 则  $\mathbf{r}_e$  的近似精度必须小于 2mm/s 才能满足要求. 下面我们利用 EGM96、EIGEN2 和 EIGEN-CG01C 地球重力场模型分别计算卫星轨迹处  $\mathbf{r}$  对应的速度矢量  $\mathbf{r}_e$ , 通过与  $\mathbf{r}$  的比较, 分析这种差异对位旋转效应的影响.

##### 5.1 速度 $\mathbf{r}_e$

如前所述,  $\mathbf{r}_e$  是只有地球引力场对卫星产生作用时的卫星速度矢量, 它只是一种理论上存在的状态. 在计算地球自转位旋转效应时, 我们需要的是实际卫星轨迹点处的  $\mathbf{r}_e$ . 因此我们针对某一实际卫星星历, 且基于卫星星历提供的卫星坐标, 利用选定的地球重力场模型计算卫星轨迹处对应的速度矢量  $\mathbf{r}_e$ .

##### 5.2 速度差 $|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}|$

我们选取了由 GFZ 数据中心提供的 2003 年 6 月 CHAMP 的快速科学轨道, 该星历是基于星载 GPS

跟踪数据和激光测距数据, 利用动力法计算得到, 其位置精度 10cm 左右, 速度精度 0.2mm/s 左右; 由 TUM 提供的 2002 年 4 月 CHAMP 的约化动力法轨道, 该星历是以非差载波相位作为观测值, 基于变分方程, 利用最小二乘法计算得到, 其位置精度 5cm 左右, 速度精度 0.1mm/s 左右; 由 GFZ 数据中心提供的 2003 年 6 月 CHAMP 的事后科学轨道, 该星历采用完全动力法, 直接用非差观测量, 用动力学积分求解轨道根数和其他动力学参数, 其位置精度 3~4cm, 速度精度优于 0.1mm/s. 根据上面三组轨道, 采用 EGM96、EIGEN2 和 EIGEN-CG01C 地球重力场模型作为参考场模型, 分别计算了在 J2000.0 惯性坐标系中  $\mathbf{r}_e$  和  $\mathbf{r}$  的互差, 计算结果如图 1~3 所示. 为图示清晰起见, 在图 1(a, b, c)、图 2(a, b, c) 和图 3(a, b, c) 中将速度  $x$  分量上移 0.002m/s, 将速度  $z$  分量下移 0.002m/s.

##### 5.3 近似计算分析

由图 1(a, b, c)、图 2(a, b, c) 和图 3(a, b, c) 可知, 当采用 EGM96、EIGEN2 和 EIGEN-CG01C 地球重力场模型作为参考场模型, 同一组轨道计算的  $\mathbf{r}_e$  与星历提供  $\mathbf{r}$  的互差对不同的参考场模型其精度相近, 说明上述几种地球重力场模型对 CHAMP 卫星轨道速度分量均有检核作用. 其中, EGM96、EIGEN-CG01C 为多种数据联合解算模型, 而 EIGEN2 模型是完全采用 CHAMP 卫星跟踪数据获得的, 其轨道数据与重力场模型的自恰性相比更明显一些.

由图 1(d, e, f)、图 2(d, e, f) 和图 3(d, e, f) 可知, GFZ 提供的快速科学轨道、TUM 提供的约化动力法轨道在利用能量守恒定律恢复地球重力场中, 位旋转效应的近似计算对地球重力场模型的解算影响几乎相同, 而 GFZ 提供的事后科学轨道精度优于上述两种轨道精度, 完全满足位旋转效应的计算要求.

无论是 GFZ 提供的快速科学轨道、TUM 提供的约化动力法轨道, 还是 GFZ 提供的事后科学轨道, 其速度精度为 0.2mm/s 或更小, 但速度差  $|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}|$  对 GFZ 快速科学轨道、TUM 约化动力法轨道大致为 2mm/s, 而 GFZ 事后科学轨道速度差却为 0.3mm/s 左右. 可以说明影响速度差  $|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}|$  的主要原因在于提供的卫星星历中  $\mathbf{r}$  的精度. 这也说明当要求扰动位的精度是  $0.5\text{m}^2/\text{s}^2$  时, 必须采用 GFZ 事后科学轨道或相当精度的卫星星历.

比较图 1(a, b, c)、图 2(a, b, c) 和图 3(a, b, c) 还可以看出, 速度差各分量的变化具有很明显的周期性. 通过谱分析得到, 速度差的各分量变化周

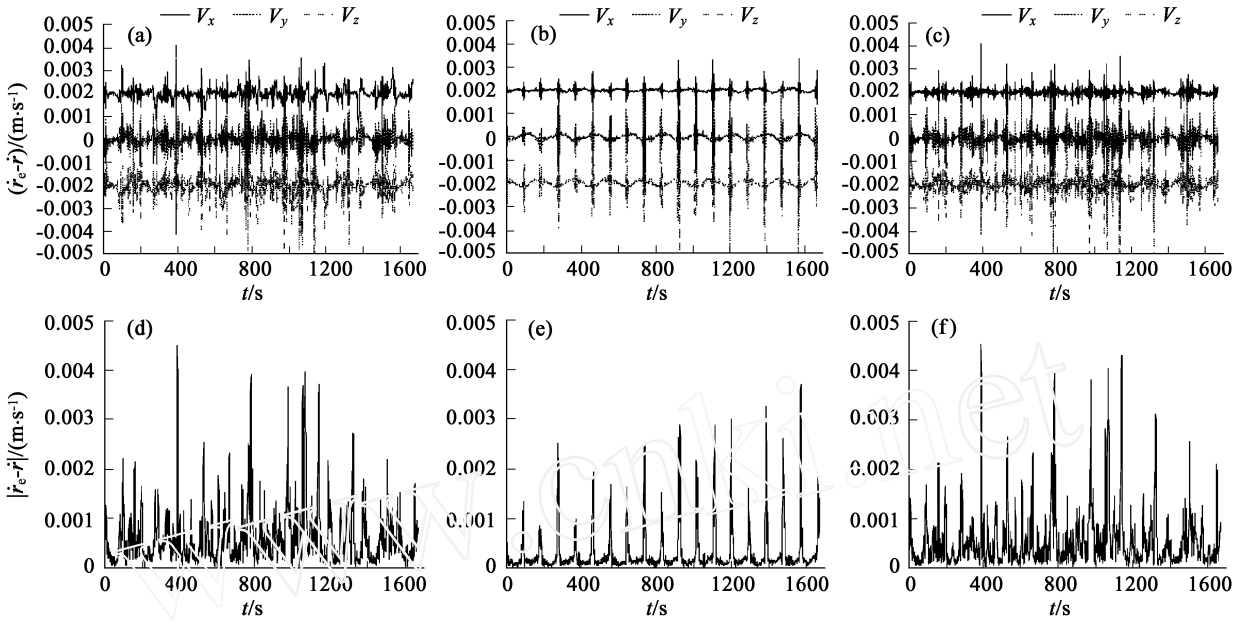


图 1 参考重力场模型轨道与 GFZ 快速科学轨道的速度差 (a, b, c) 及速度差的矢量模 (d, e, f)  
(a, d) EGM96; (b, e) EIGEN2; (c, f) EIGEN-CC11C.

Fig. 1 Velocity differences (a, b, c) and vector moduli of velocity differences (d, e, f) between the GFZ Rapid Science Orbit and the reference gravity field model

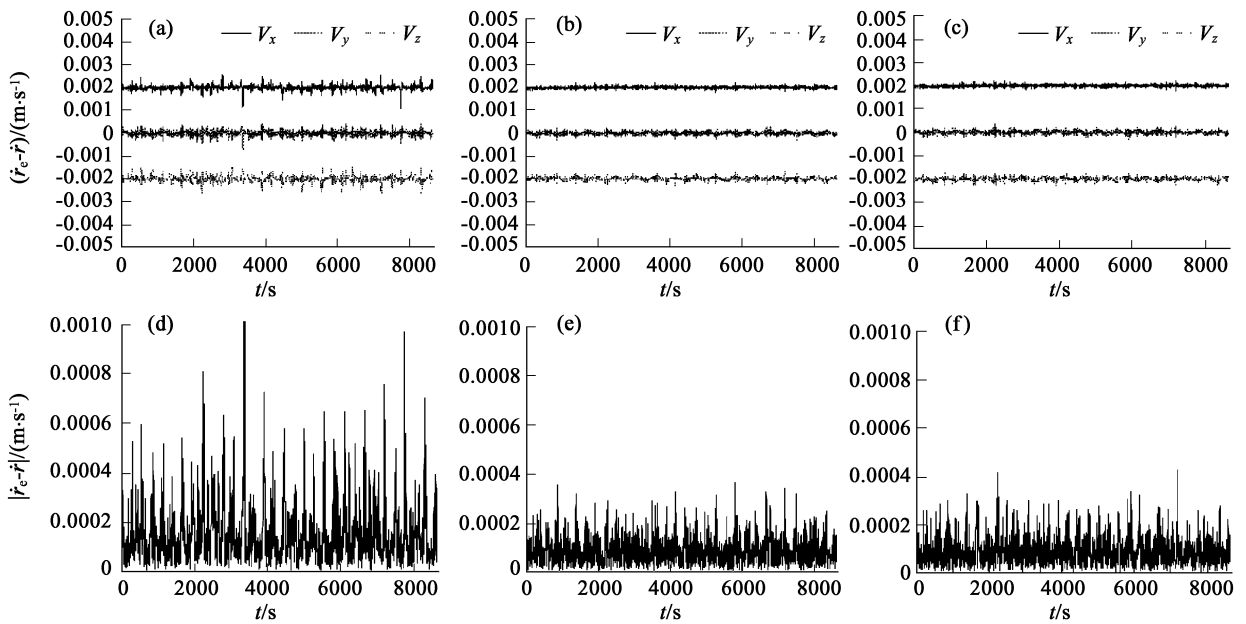


图 2 参考重力场模型轨道与 GFZ 事后科学轨道的速度差 (a, b, c) 及速度差的矢量模 (d, e, f)  
(a, d) EGM96; (b, e) EIGEN2; (c, f) EIGEN-CC11C; 图 (d, e, f) 中纵坐标的刻度是其他图纵坐标刻度的五分之一。

Fig. 2 Velocity differences (a, b, c) and vector moduli of velocity differences (d, e, f) between the GFZ Post-Processed Science Orbit and the reference gravity field model

期与 CHAMP 卫星轨道的运行周期相吻合,其原因也很显然:作用于卫星上的非保守力,特别是大气阻力,对于飞行在 300 ~ 500km 高度的近地卫星,呈现出每圈 1Hz 的特性,这也从侧面反映出利用星载加

速度计分离作用于卫星上的非保守力的有效性。

根据 (8) 式描述的由近似速度引起的位旋转效应误差,我们可以按照恢复重力场的精度要求,采用适当的参考场模型,检核卫星星历的速度分量。由

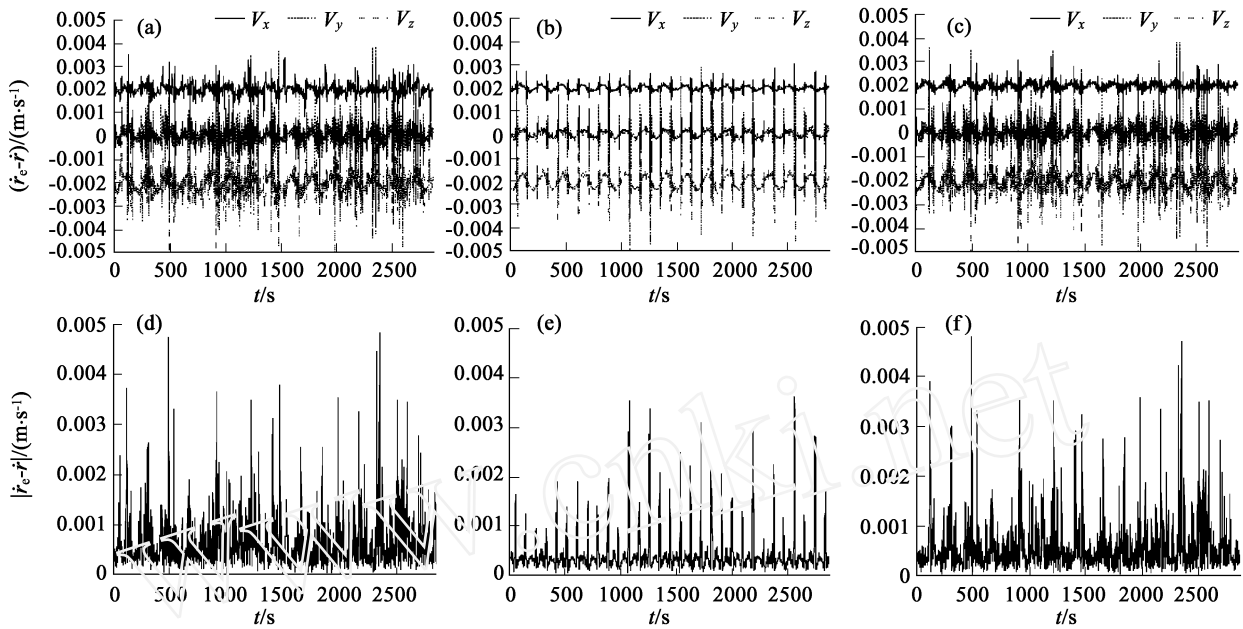


图3 参考重力场模型轨道与 TUM 约化动力学轨道的速度差(a, b, c)及速度差的矢量模(d, e, f)

(a, d) EGM96; (b, e) EIGEN2; (c, f) EIGEN-CG01C. ▣

Fig. 3 Velocity differences(a, b, c) and vector moduli of velocity differences(d, e, f) between the TUM Reduced-Dynamic Orbit and the reference gravity field model

上一节的计算结果,比较图 1(d, e, f)、图 2(d, e, f)和图 3(d, e, f),三种轨道均存在速度变化的不光滑性,这种不光滑变化也呈现出周期性,当利用卫星星历提供的速度  $\dot{r}$  近似为  $\dot{r}_e$  时,利用能量守恒定律恢复地球重力场中的位旋转效应也在这些地方出现周期性跳跃。

## 6 结 语

利用能量守恒定律恢复地球重力场是当前 CHAMP 和 GRACE 卫星应用的主要方法之一。地球自转引起的位旋转效应是地球引力场对惯性空间一点作用的时变反映。当利用卫星星历提供的速度信息近似代替只有地球引力场对卫星产生作用时的卫星速度计算位旋转效应时,应该检核这种近似性对利用能量守恒定律恢复地球重力场的影响。根据本文的计算分析,利用 GFZ 提供的快速科学轨道采用能量守恒定律恢复地球重力场时,当要求在卫星轨迹处获得  $1\text{m}^2/\text{s}^2$  精度的扰动位时,也即要求位旋转效应公式(6)中卫星速度的近似精度小于  $2\text{mm}/\text{s}$  时,需要剔除那些速度精度不满足要求的卫星轨迹点;当要求在卫星轨迹处获得  $0.5\text{m}^2/\text{s}^2$  精度的扰动位时,应当重新估算快速科学轨道的速度信息,或采用精度更高的事后科学轨道。

## 参考文献(References)

- [1] Douglas B C, Gad C C, Morrison F F. Determination of the geopotential from satellite-to-satellite tracking data. *Journal of Geod. Res.*, 1980, **85**(B10): 5471 ~ 5480
- [2] Jekeli C, Rapp R H. Accuracy of the determination of mean anomalies and mean geoid undulations from a satellite gravity field mapping mission. Columbus: Dep. of Geod. Sci. Rep. 307, Ohio State Univ., 1980
- [3] Ilk K H. Regularization for high resolution gravity field recovery by future satellite techniques, inverse problems: Principles and applications in geophysics, technology, and medicine. Proceedings of the International Conference held in Potsdam. *Mathematical Research*, 1993, **74**: 189 ~ 214
- [4] Jekeli C. The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1999, **75**(2): 85 ~ 101
- [5] GFZ Potsdam. GFZ Announcement of Opportunity for CHAMP. Potsdam: GFZ Potsdam, 2001
- [6] Mazanek D D, Kumar R R, Qu M, et al. Aerothermal Analysis and Design of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Spacecraft. NASA/TM-2000-210095. Washington D C: NASA Langley Research Center, 2000
- [7] 周旭华,吴斌,许厚泽等.数值模拟估算低低卫-卫跟踪观测技术反演地球重力场的空间分辨率.地球物理学报,2005, **48**(2): 282 ~ 287  
Zhou X H, Wu B, Xu H Z, et al. Resolution estimation of Earth gravity field recovery through the low-low satellite to satellite

- technology by numerical simulation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(2): 282 ~ 287
- [ 8 ] O'Keefe J A. An application of Jacobi's integral to the motion of an Earth satellite. *The Astronomical Journal*, 1957, **62**(1252): 256 ~ 266
- [ 9 ] Bjerhammar A. On the energy integral for satellite. Technical report, 1967. Stockholm: The Royal Institute of Technology, 1967
- [10] Reigber C. Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen. Reihe C 137. München: Deutsche Geodatische Kommission, 1969
- [11] Austen G, Grafarend E W, Reubelt T. Analysis of the Earth's gravitational field from semi-continuous ephemeris of low Earth orbiting GPS-tracked satellite of type CHAMP, GRACE or COCE. In: Adam J, Schwarz K P ed. *Vistas for Geodesy in the New Millennium*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002. 309 ~ 315
- [12] Reigber C, Balmino G, Schwintzer P, et al. A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1S). *Geophysical Research Letters*, 2002, **29**(14): 371 ~ 374
- [13] Gerlach C, Sneeuw N, Visser P, et al. CHAMP gravity field recovery with the energy balance approach: First result. Proceedings of the 1<sup>st</sup> CHAMP International Science Meeting, Potsdam, 2002. 134 ~ 139
- [14] Han S C, Jekeli C, Shum C K. Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP. *Geophys. Res. Letters*, 2002, **29**(16): 1789
- [15] Howe E, Tscherning C C. Preliminary analysis of CHAMP state vector and accelerometer data for the recovery of the gravity potential. In: Reigber C, Luehr H, Schwintzer P eds. *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*. Springer Verlag, 2003. 140 ~ 145
- [16] Reigber C, Schwintzer P, Neumayer K H, et al. The CHAMP—only Earth gravity field model EIGEN-2. *Advances in Space Research*, 2003, **31**(18): 1883 ~ 1888
- [17] Foldvary L, Svehla D, Gerlach C, et al. Gravity model TUM-2Sp based on the energy balance approach and kinematic CHAMP orbit. In: Reigber C, ed. *Earth Observation with Champ: Results from Three Years in Orbit*. Springer Verlag, 2004. 16 ~ 19
- [18] Gerlach C, Sneeuw N, Visser P, et al. CHAMP gravity field recovery with the energy balance approach. *Advances in Geosciences*, 2003, **1**: 73 ~ 80.
- [19] Han S C, Shum C K, Jekeli C, et al. CHAMP gravity field solutions and geophysical constraint studies. In: Reigber C ed. *Earth Observation with Champ: Results from Three Years in Orbit*. Springer Verlag, 2004. 108 ~ 114
- [20] Visser P N A M, Sneeuw N, Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates. *Journal of Geodesy*, 2003, **77**: 207 ~ 216
- [21] Ilk K H, Mayer-Gurr T, Feuchtinger M. Gravity field recovery by analysis of short arcs of CHAMP. In: Reigber C ed. *Earth Observation with Champ: Results from Three Years in Orbit*. Springer Verlag, 2004. 127 ~ 132
- [22] Han S C. Efficient determination of global gravity field from satellite-to-satellite tracking mission. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, **88**: 69 ~ 73
- [23] 徐天河, 杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型. *地球物理学报*, 2005, **48**(2): 288 ~ 293  
Xu T H, Yang Y X. CHAMP gravity field recovery using kinematic orbits. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(2): 288 ~ 293
- [24] Jekeli C. An analysis of geopotential difference determination from satellite-to-satellite tracking. *Bolletino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 1999, **40**(3-4): 267 ~ 269

(本文编辑 胡素芳)