

文章编号: 1002-0446(2001)01-0036-04

一种机器人轨迹跟踪控制的迭代学习方法

安 刚 张 蕾 刘景泰 卢桂章

(南开大学机器人与信息自动化研究所 天津 300071)

摘 要: 本文提出了一种新的迭代学习策略并详细报告了在 1 台实验用机器人上的实验结果. 这个方法的特点是对于动力学参数未知的系统, 可以通过实验方便地确定满足收敛条件的学习控制器参数. 因此, 它具有实用价值, 并有可能将其使用范围推广到除机器人轨迹控制外的其它控制领域.

关键词: 迭代学习; 轨迹控制; 机器人; 算法; 实验

中图分类号: TP24 文献标识码: B

A SORT OF ITERATIVE LEARNING ALGORITHM FOR TRACKING CONTROL OF ROBOT TRAJECTORY

AN Gang ZHANG Lei LIU Jing-tai LU Guizhang

(Institute of Robotics and Information Automation, Nankai University 300071)

Abstract: A new iterative learning algorithm is introduced for the robot trajectory control. The sufficient and necessary conditions for its convergence are established. In addition, a method to determine the learning gains through the experiment is also proposed based on a stability analysis of the system. The experiment shows the fast convergence of the proposed algorithm.

Keywords: iterative learning, trajectory control, robot, algorithm, experiment

1 引言(Introduction)

对于一个动力学参数未知的系统, 让其沿着一条给定的轨迹反复运行, 每次运行时根据前几次运行所产生的状态或输出偏差 e , 按照某种策略 $f(\cdot)$, 对上一轮的输入量 u_i 进行修正, 将修正结果 $u_{i+1} = f(u_i, e)$ 用做本次的控制输入. 经过多次这样的学习过程, 使输出的偏差逐渐减少到允许的程度. 这种迭代学习的概念由日本学者 S. Uchiyama 在 1978 年首先提出, 以后日本的 S. Arimoto 及韩国 Z. Bien 等人对这种方法进行了多方面的深入探讨. 需要大量计算机内存和要求初始偏差为零是当前各种方法普遍存在的两个问题. 本文提出的方法所需内存要少一些并且在理论上只要初始偏差在每次运行时保持恒定, 就可以保证当学习次数 $i \rightarrow \infty$ 时, 轨迹跟踪偏差 $e \rightarrow 0$.

2 迭代学习方法 (Algorithm)

n 阶线性时变系统的离散时间模型

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k) \quad (1)$$

其中, 系统矩阵 $A(k) \in R^{n \times n} (n \geq 2)$, 输入矩阵 $B(k) \in R^{n \times m}$, 输出矩阵 $C(k) \in R^{p \times n}$, 状态矢量 $x(k) \in R^n$, 输入矢量 $u(k) \in R^m$, 输出矢量 $y(k) \in R^p$. 当用于迭代学习控制时, 方程(1)表达为

$$x_i(k+1) = A(k)x_i(k) + B(k)u_i(k)$$

$$y_i(k) = C(k)x_i(k) \quad (2)$$

i 表示第 i 次迭代学习. 机器人跟踪给定轨迹是在有限的时间内完成的, 定义 $t = kT \in [0, NT]$, T 为采样周期. 又由于学习过程沿着同一条轨迹反复进行, 我们假设^[1,3]

$$A_{i+1}(k) = A_i(k) = A(k)$$

$$B_{i+1}(k) = B_i(k) = B(k) \quad (3)$$

$$C_{i+1}(k) = C_i(k) = C(k)$$

本文提出的学习策略

$$u_{i+1}(k) = u_i(k) + F(k)\theta_{i+1}(k) + G(k)\theta_{i-1}(k) \quad (4)$$

其中学习增益 $G(k), F(k) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $u_0(k) = 0$, 输出偏差及其微分

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}(k) &= y_d(k) - y_{i+1}(k) \\ \dot{\theta}_{i+1}(k) &= \dot{y}_d(k) - \dot{y}_{i+1}(k) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $y_d(k)$ 为理想输出, 它对应于理想输入 $u_d(k)$ 并与状态变量 $x_d(k)$ 一起, 满足

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A(k)x_d(k) + B(k)u_d(k) \\ y_d(k) &= C(k)x_d(k) \end{aligned} \quad (6)$$

至此, 问题可表达为: 对于具有未知参数的控制对象 (2) 和一条可达到的给定轨迹, $y_d(k)$ 我们希望通过用控制策略 (4) 的不断学习过程, 能够找到一个控制输入 $u^*(k)$, 使相应的状态跟踪偏差逐点收敛到给定的范围 ϵ 以内, 即 $\|e^*(k)\| = \|x_d(k) - x^*(k)\| \leq \epsilon$ ($1 \leq k \leq N$). 这里 $\|\cdot\|$ 表示一种矩阵范数.

3 方法的敛散性 (Convergency issue)

定理 对于 (2) 表示的线性时变对象, 在 (3) 的假定及 y_d 连续可微的假定下, 要使迭代学习策略 (4) 在 $k \in [1, N]$ 范围内逐点收敛到由初始偏差 $e_i(0)$ 和 $e_{i+1}(0)$ 所决定的固定点上, 必须且只需使学习增益 $G(k)$ 满足

$$\begin{aligned} \max_k \rho\{[I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}\} &< 1 \\ (0 \leq k \leq N-1) \end{aligned} \quad (7)$$

上式中 $\rho\{\cdot\}$ 表示 \cdot 的谱半径.

证明 由 (2)、(6) 式得到

$$\begin{aligned} B(k)u_i(k) &= -e_i(k+1) + \\ &A(k)e_i(k) + B(k)u_d(k) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $i = 1, 2, \dots$, $u_0(k) = 0$, e_i 为第 i 次学习时的状态偏差.

由于控制对象是不小于 2 阶的系统及连续可微的假设, 用 $\hat{\theta}_{i+1}(k) = \frac{1}{T}[\theta_{i+1}(k+1) - \theta_{i+1}(k)]$ 代入 (4), 然后再用 $B(k)$ 左乘, 得到

$$\begin{aligned} B(k)u_{i+1}(k) &= B(k)u_i(k) + B(k)F(k)\theta_{i+1}(k) \\ &+ B(k)G(k)\frac{1}{T}[\theta_{i+1}(k+1) - \theta_{i+1}(k)] \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$M = \begin{pmatrix} S(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R(1)S(0) - T(1) & S(1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R(2)R(1)S(0) - T(1) & R(2)S(1) - T(2) & S(2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & R(N-1)S(N-2) - T(N-1) & S(N-1) \end{pmatrix}$$

由 (8)(9)(5) 式得到

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= A(k)e_i(k) - B(k)F(k)\theta_i(k) \\ &- B(k)G(k)\theta_i(k+1) + B(k)G(k)\theta_i(k) \\ &+ e_{i-1}(k+1) - A(k)e_{i-1}(k) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $G(k) = \frac{1}{T}G(k)$, T 为采样周期. 用 (5)、(7)、(2)、(10) 式代入并整理, 得到

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}[A(k) \\ &- B(k)F(k)C(k) + B(k)G(k)C(k)]e_i(k) \\ &+ [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}e_{i-1}(k+1) \\ &- [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}A(k)e_{i-1}(k) \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\begin{aligned} R(k) &= [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}[A(k) \\ &- B(k)F(k)C(k) + B(k)G(k)C(k)] \\ S(k) &= [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1} \\ T(k) &= [I + B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}A(k) \end{aligned} \quad (12)$$

于是得到

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= R(k)e_i(k) + S(k)e_{i-1}(k+1) \\ &- T(k)e_{i-1}(k) \end{aligned} \quad (13)$$

将上式从 $k=0$ 到 $k=N-1$ 展开

$$\begin{aligned} e_i(1) &= [R(0)e_i(0) - T(0)e_{i-1}(0)] + S(0)e_{i-1}(1) \\ e_i(2) &= R(1)[R(0)e_i(0) - T(0)e_{i-1}(0)] \\ &+ [R(1)S(0) - T(1)]e_{i-1}(1) \\ &+ S(1)e_{i-1}(1) + S(1)e_{i-1}(2) \\ &\vdots \\ e_i(N) &= R(N-1)R(N-2)\dots R(1)[R(0)e_i(0) \\ &- T(0)e_{i-1}(0)] + R(N-1)R(N-1)\dots \\ &R(2)[R(1)S(0) - T(1)]e_{i-1}(1) + \\ &+ R(N-1)R(N-2)[R(N-3)S(N-4) \\ &- T(N-3)]e_{i-1}(N-3) + \\ &R(N-1)[R(N-2)S(N-3) \\ &- T(N-2)] \times e_{i-1}(N-2) + \\ &[R(N-1)S(N-2) - T(N-1)]e_{i-1} \\ &+ S(N-1)e_{i-1}(N) \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(2)R(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R(N-1)R(N-2)\dots R(1) \end{pmatrix}$$

得到迭代方程

$$\bar{e}_i = M\bar{e}_{i-1} + P[R(0)e_i(0) - T(0)e_{i-1}(0)] \quad (14)$$

其中

$$\bar{e}_i = [e_i(1), e_i(2), \dots, e_i(N)]^T \quad (15)$$

M 是下三角块矩阵, 因此, 其特征值就是它的 N 个主对角块矩阵特征值的集合^[5]. 根据矩阵迭代理论^[4], 迭代方程收敛的充要条件是其迭代矩阵 M 的谱半径小于 1, 即 $\rho(M) < 1$. 对于(14)式它等价于

$$\rho(M) = \max_{0 \leq k \leq N-1} \rho[S(k)] = \max_{0 \leq k \leq N-1} \rho\{[I + B(k)GC(k+1)]^{-1}\} < 1 \quad (16)$$

证毕

当(14)收敛时, 收敛的固定点根据(14)是

$$\bar{e}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{e}_i = (I - M)^{-1}P[R(0)e_i(0) - T(0)e_{i-1}(0)] \quad (17)$$

由此得到以下两个有实用意义的推论

推论 1.

由(17)知, 当迭代系统(2)(4)满足(7)且 $e_i(0) = 0$, 即初始偏差为零时, 迭代学习的最终状态偏差 $\bar{e}^* = 0 (i \rightarrow \infty)$

推论 2.

由(17)知, 当迭代系统(2)(4)满足(7)且 $e_i(0) = e_{i-1}(0)$ 时, 如果学习增益满足

$$F(k) = \frac{1}{T}G(k) \quad (18)$$

则迭代学习的最终状态偏差 $\bar{e}^* = 0 (i \rightarrow \infty)$.

4 稳定性分析 (Stability analysis)

由(4)可看出, 在一次学习过程中, 总是前面输出的结果立即参加后面的迭代, 因此它属于塞德尔迭代^[4], 通常可获得较快的收敛速度. 但是, 方程(4)中的 $F(k)$ 和 $G(k)$ 不仅是学习增益, 同时也是 PD 调节器的参数. 因此, 还应该考察当满足收敛条件(7)时闭环系统的稳定性. 为此, 由方程(2)和(4)导出闭环系统方程

$$x_i(k+1) = [I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}[A(k) - B(k)F(k)C(k) + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k)] \times$$

$$\begin{aligned} & \times x_i(k) + B(k)[u_{i-1}(k) + \frac{1}{T}G(k)y_d(k+1) \\ & - \frac{1}{T}G(k)y_d(k) + F(k)y_d(k)] \quad (19) \end{aligned}$$

将(18)代入, 得到

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & [I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1} \\ & [A(k)x_i(k) + B(k)[u_{i-1}(k) \\ & + \frac{1}{T}G(k)y_d(k+1)] \quad (20) \end{aligned}$$

根据冻结系数法, 如果系统矩阵的特征值在任一时刻都处于复平面的单位圆内, 则该系统是稳定的. 对于(19), 这一条件可表达为

$$\max_{0 \leq k \leq N-1} \rho\{[I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}A(k)\} < 1 \quad (21)$$

由 $\rho(\cdot) \leq \|\cdot\|$, 得到较强的稳定性条件

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq N-1} \|[I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}A(k)\| \\ & \leq \max_{0 \leq k \leq N-1} \|[I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}\| \cdot \|A(k)\| < 1 \quad (22) \end{aligned}$$

同理, 比(7)较强的收敛条件可表达为

$$\max_{0 \leq k \leq N-1} \|[I + \frac{1}{T}B(k)G(k)C(k+1)]^{-1}\| < 1 \quad (23)$$

比较(22)和(23)式可知, 由(2)、(4)表达的学习控制系统其稳定性条件与其收敛性条件是相容的. 如果控制对象不稳定, 即如果 $\|A(k)\| \geq 1$, 那么, 通过选择(22)中的 $G(k)$ 使其稳定时, 收敛条件(23)也自然得到了满足.

5 实验 (Experiment)

作者在一实验用三关节机器人上对提出的方法进行了实验研究. 实验中采用了两种不同轨迹和不同负载来考察方法的有效性和鲁棒性. 学习增益 F 和 G 按照上面的讨论根据稳定的要求加以选择, 并在整个实验中保持恒定(见表 1). 采样周期为 3ms. 实验结果见图 1 到图 3 及表 2 表 3. 其中, 第 i 次学习关节位置误差(5)的最大值定义为 $\max_{1 \leq k \leq N} |\theta_i|$

(k) , 平均关节位置误差 $Avg_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\theta_i(k)|$ 图 1、图 2 示出了关节 2 在不同实验条件下角度误差的收敛情况。

表 1 实验中采用的学习增益

Tab. 1 Learning gains in experiment

	关节 1	关节 2	关节 3
F	3.000	2.500	4.00
G	120.0	85.00	55.00

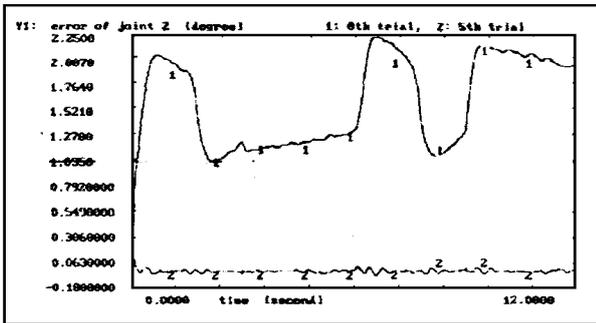


图 1 矩形, 关节 2, 1kg 负载

Fig.1 Square, joint2, 1kg load

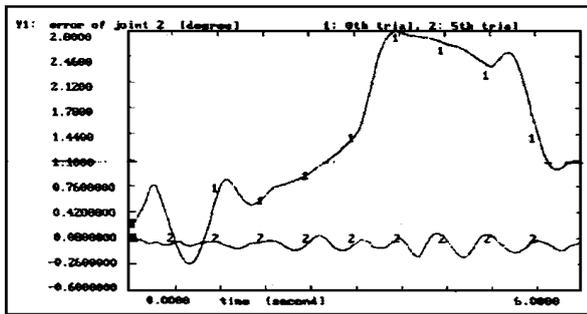


图 2 圆形, 关节 2, 1.5kg 负载

Fig. 2 Circle, joint2, 1.5kg load

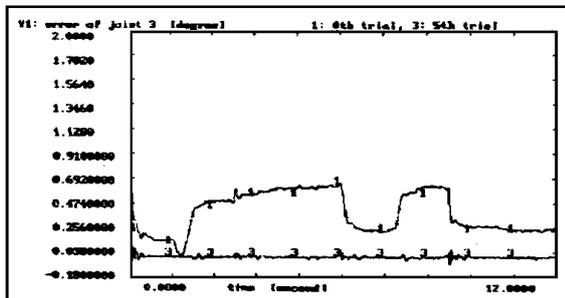


图 3 矩形, 关节 3, 0kg 负载

Fig. 3 Square, joint3, 0kg load

实验中采用的矩形轨迹在拐角处速度是不连续的, 这造成了关节 1 和关节 3 的速度在这些点上的不连续. 由此产生的影响可从图 3 上看到. 各种情况下的实测数据见表 1 和表 2.

表 2 圆形轨迹

Tab. 2 Circle trajectory

	关节 1		关节 2		关节 3	
	0kg	1.5kg	0kg	1.5kg	0kg	1.5kg
m ax 0	1.0936	1.6085	2.3505	2.7870	0.9451	1.5617
m ax 2	0.1601	0.0335	0.1511	0.2085	0.1059	0.5046
m ax 5	0.1340	0.3167	0.1109	0.1739	0.0492	0.1650
Avg 0	0.4148	0.5352	1.1059	1.4164	0.4946	0.8066
Avg 2	0.0346	0.1370	0.0433	0.0760	0.0176	0.0576
Avg 5	0.0335	0.1359	0.0357	0.0497	0.0129	0.0388

表 3 矩形轨迹

Tab. 3 Square trajectory

	关节 1		关节 2		关节 3	
	0kg	1.5kg	0kg	1.5kg	0kg	1.5kg
m ax 0	0.4716	0.5291	1.9479	2.2017	0.6528	0.8883
m ax 2	0.0702	0.0713	0.1769	0.1863	0.1328	0.1332
m ax 5	0.0625	0.9697	0.0688	0.0784	0.1387	0.0928
Avg 0	0.3426	0.2540	1.3360	1.5750	0.3945	0.5544
Avg 2	0.0109	0.0126	0.0144	0.0267	0.0078	0.0144
Avg 5	0.0098	0.0115	0.0084	0.0117	0.0059	0.0087

6 结论 (Conclusions)

本文提出了一种迭代学习控制策略并进行了理论分析和实验研究. 所需存储空间较小和学习增益选择比较方便是这个方法的两个主要特点.

参考文献 (References)

- 1 Suguro A rim oto. Mathematical Theory of Learning with Applications to Robot Control. In Proc of 4th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems. New Haven, Connecticut, May 1985. 379- 388
- 2 Tso S K, L Y X Ma. Discrete Learning Control for Robots: Strategy, Convergence and Robutness. INT J Control, 1993, 57 (2): 273- 291
- 3 Hwang D-H, Bie n Z, Oh S R. Iterative Learning Control Method for Discretetime Dynam ic System. IEE Proc. -D, 1991, 138(2): 139- 144
- 4 杨凤翔, 陆君良. 数值分析. 1985 年第一版. 天津大学出版社
- 5 Roger A Horn, Charlels R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1990, 62
- 6 Friedrich Lange, Gerhard H irzinger. Learning Force Control w ith Position Controlled Robots. IEEE Int Conf On Robotics and Automation, 1996. 2282- 2288
- 7 Giuseppe Oriolo, Stefano Panzieri, Giovanni Ulivi An Iterative Learning Controller for Nonholonomic Robots. IEEE Int Conf On Robotics and Automation, 1996. 2676- 2681

作者简介:

安 刚 (1954-), 男, 工学硕士. 研究领域: 机器人运动学, 多机器人协调控制.