第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0795-08 **文献标识码**: A

一类 Sierpinski 垫的 Hausdorff 测度

王 明 华

(重庆文理学院数学与计算机科学系, 重庆 永川 402168)
(E-mail: wmhxx@tom.com)

摘 要: 设 S_λ 为压缩比为 $\lambda\ (\lambda \le \frac{1}{3})$ 的一类 Sierpinski 垫, $s = -\log_\lambda 3$ 为 S_λ 的 Hausdorff 维数, N 为产生 S_λ 的所有基本三角形的集合. 本文使用网测度方法, 获得了 S_λ 的 s- 维 Hausdorff 测度的精确值 $H^s(S_\lambda)=1$, 同时证明了 $H^s(S_\lambda)$ 可由 S_λ 关于网 N 的 s- 维 Hausdorff 测度 $H^s_N(S_\lambda)$ 确定, 获得了 S_λ 的非平凡的最佳覆盖.

关键词: 自相似集; Sierpinski 垫; Hausdorff 测度.
MSC(2000): 28A80; 28A78
中图分类: O174.12

在分形几何里, 计算或估计分形集的 Hausdorff 测度是其重要而基本的问题. 但计算或估计分形集的 Hausdorff 测度却是一件十分困难的事, 即使是对一些构造简单的分形集. 至今, 关于分形集的 Hausdorff 测度计算或估计的结果进展甚微, 文献 [1–3] 给出了三分 Cantor 集的 Hausdorff 测度为 1; 利用质量分布原理, 文献 [4] 获得了 Sierpinski 毯的 Hausdorff 测度为 $\sqrt{2}$; 文献 [5] 则证明了一类 Sierpinski 毯的 Hausdorff 测度为 $2^{\frac{s}{2}}$; 对于 Sierpinski 垫, 文献 [6–7] 给出了其 Hausdorff 测度的上界估计, 而文献 [8] 则给出了 Sierpinski 垫的 Hausdorff 测度的一个下界估计. 在本文里, 我们讨论一类 Sierpinski 垫 S_λ , 使用网测度方法, 获得了 S_λ 的 Hausdorff 测度精确值 $H^s(S_\lambda)=1$, 并且表明, S_λ 的 Hausdorff 测度可由关于生成 S_λ 的所有基本三角形构成集合 N 的网测度 $H^s_N(S_\lambda)$ 确定, 同时获得了 S_λ 非平凡的最佳覆盖 [9].

1 Sierpinski 垫的构造

本文所涉及的定义和术语可参见文献 [1–3].

设 S_0 为平面上单位正三角形, $\lambda\ (0<\lambda\le\frac{1}{3})$ 为实数. 在 S_0 的三个角上取边长为 λ 的正三角形, 去掉其余部分, 得到由 3 个边长为 λ 的正三角形构成的集合, 记为 S_1. 对 S_1 中每个正三角形重复上述过程, 得到由 3^2 个边长为 λ^2 的正三角形构成的集合, 记为 S_2. 上述过程无限进行下去, 得到一列 $S_k(k=1,2,\ldots): S_0\supset S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset\cdots$ (见图 1). 令 $S_\lambda=\bigcap_{k=0}^{\infty}S_k$, 由于每个 S_k 都是非空紧集, 则 S_λ 是紧的, 并且 $S_\lambda\ne\varnothing$, 称 S_λ 为 Sierpinski 垫. S_λ 是由 3 个与 S_λ 相似的, 其相似因子为 λ 的部分组成的自相似集, 满足开集条件, 因而其 Hausdorff 维数等于其相似维数 $s=-\frac{\lg 3}{\lg\lambda}=-\log_\lambda^3$.

构成 S_k 的 3^k 个边长为 λ^k 的正三角形称为 k 阶基本三角形, 记作 Δ_k, 显然 Δ_k 的直径为 $|\Delta_k|=\lambda^k$. 用 N_k 表示所有 k 阶基本三角形作成的集合, 用 N 表示所有的基本三角形作成的

收稿日期: 2005-06-22; **接受日期**: 2006-01-20
基金项目: 重庆市教育委员会科学技术研究项目 (KJ051206).

集合 $N=\bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$, 显然, N 是 S_λ 的一个网, 并且网 N 中任意两个基本三角形, 要么不相交, 要么一个包含在另一个里.

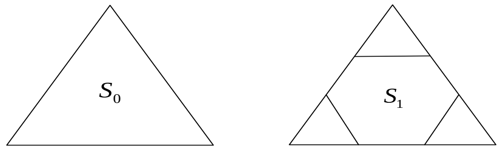

图 1

设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 以 $|U|$ 记其直径. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, $\delta>0$, $\{U_i\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的可列 (或有限) 子集族, 如果 $E\subset\bigcup_i U_i$, 并且 $|U_i|\le\delta$, 我们称 $\{U_i\}$ 为 E 的一个 δ- 覆盖.

设 $E\subset\mathbf{R}^n, s\ge 0, \delta>0$, 令

$$H_\delta^s(E)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s,\ H^s(E)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^s(E),$$

其中 inf 表示对 E 的所有的 δ- 覆盖取下确界. 则称 $H^s(E)$ 为 E 的 s- 维 Hausdorff 测度.

设 $E\subset\mathbf{R}^n$, F 为 E 的一个网, 并设 $s\ge 0, \delta>0$, 令

$$H_F^s(E)=\lim_{\delta\to 0}\inf\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s,$$

其中 inf 表示对 E 的所有的由网 F 中元素构成的 δ- 覆盖取下确界. 则称 $H_F^s(E)$ 为 E 关于网 F 的 s- 维 Hausdorff 测度.

后面, 我们总是记 $s=-\frac{\lg 3}{\lg\lambda}=-\log_\lambda^3$, $H^s(S_\lambda)$ 为 S_λ 的 s- 维 Hausdorff 测度, $H_N^s(S_\lambda)$ 为 S_λ 关于网 N 的 s- 维 Hausdorff 测度.

2 几个引理

引理 1 设 ΔABC 是边长 (直径) 为 d 的正三角形, 平面点集 U 包含在 ΔABC 中, 且与 ΔABC 的三边相交, 则 U 的直径 $|U|\ge\frac{d}{2}$.

证明 如图 2. 分别取 U 与 ΔABC 的三边的交点 D,E,F, 若 U 与 ΔABC 的一边的交点多于一点, 则任取其中之一, 显然 $|U|\ge|\Delta DEF|$. 因 ΔDEF 是内接于正三角形 ΔABC 的凸集, 由文 [8] 之命题 1.3 知, 三角形 ΔDEF 的直径 $|\Delta DEF|\ge\frac{d}{2}$, 故 $|U|\ge\frac{d}{2}$. 引理得证.

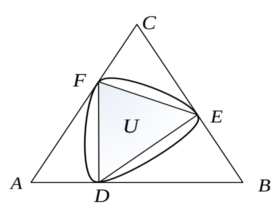

图 2

引理 2 设 $f(\lambda)=(1-p(\lambda))^s, \lambda\in(0,\frac{1}{3}]$, 其中 $p(\lambda)$ 为 λ 的正系数多项式, 且 $p(\lambda)<1, \lambda\in(0,\frac{1}{3}], s=s(\lambda)=-\log_\lambda^3$, 则 $f(\lambda)\ge 1-p(\frac{1}{3}), \lambda\in(0,\frac{1}{3}]$.

证明　因 $s' = s'(\lambda) = \frac{\ln 3}{\lambda(\ln\lambda)^2} > 0, \lambda \in (0, \frac{1}{3}]$, 从而

$$f'(\lambda) = (1-p(\lambda))^s[s'(\lambda)\ln(1-p(\lambda)) + s(\lambda)\frac{-p'(\lambda)}{1-p(\lambda)}] < 0, \lambda \in (0, \frac{1}{3}],$$

故 $f(\lambda)$ 在 $(0, \frac{1}{3}]$ 上单调减少，从而 $f(\lambda) \geq f(\frac{1}{3}) = 1 - p(\frac{1}{3}), \lambda \in (0, \frac{1}{3}]$. 引理得证.

引理 3　$H^s(S_\lambda) \leq 1$.

由于 S_λ 可以被 3^k 个边长（直径）为 λ^k 的 k 阶基本三角形覆盖，根据 Hausdorff 测度的定义，注意到 $\lambda^s = \frac{1}{3}$, 容易看出引理 3 成立.

引理 4　设 Δ_k 为任一 k 阶基本三角形，则对任一正整数 $m(m > k)$, 有

$$|\Delta_k|^s = \sum_{\Delta_m \subset \Delta_k} |\Delta_m|^s.$$

证明　从 S_k 的构造可以看出, 共有 3^k 个 k 阶基本三角形，3^m 个 m 阶基本三角形, 从而任一 k 阶基本三角形中均包含 $\frac{3^m}{3^k} = 3^{m-k}$ 个 $m(m > k)$ 阶基本三角形，而 $|\Delta_k| = \lambda^k, |\Delta_m| = \lambda^m$, 故 $\sum_{\Delta_m \subset \Delta_k} |\Delta_m|^s = 3^{m-k}(\lambda^m)^s = 3^{-k} = |\Delta_k|^s$. 引理得证.

3　Sierpinski 垫的 Hausdorff 测度

定理 1　设 $\alpha = \{U_i\}$ 是 S_λ 的任一由基本三角形构成的覆盖，其中每一个基本三角形不包含在另一个基本三角形内．则

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^s = |S_\lambda|^s = 1. \tag{1}$$

证明　设 n 为 α 中所有基本三角形的阶数中的最小者，　m 为 α 中所有基本三角形的阶所作成数集的上确阶．显然 $m \geq n$, 或者 $m = +\infty$.

若 $m = n$, 因 α 是 S_λ 的覆盖，则 α 一定由所有 n 阶基本三角形组成，即 $\alpha = N_n$, 故

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^s = \sum_{U_i \in N_n} |U_i|^s = 3^n(\lambda^n)^s = 1.$$

若 $n < m < +\infty$, 设 α 中有 l_k 个 k 阶基本三角形 Δ_k, $k = n, n+1, \ldots, m$. 由于每个 Δ_k 包含 3^{m-k} 个 m 阶基本三角形，因而 α 中共包含 $l_n 3^{m-n} + l_{n+1}3^{m-n-1} + \cdots + l_m$ 个 m 阶基本三角形．因为 α 是 S_λ 的覆盖，故有

$$l_n 3^{m-n} + l_{n+1}3^{m-n-1} + \cdots + l_m = 3^m.$$

由引理 4, 有

$$\begin{aligned}\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^s &= l_n|\Delta_n|^s + l_{n+1}|\Delta_{n+1}|^s + \cdots + l_m|\Delta_m|^s \\ &= l_n 3^{m-n}|\Delta_m|^s + l_{n+1}3^{m-n-1}|\Delta_m|^s + \cdots + l_m|\Delta_m|^s \\ &= (l_n 3^{m-n} + l_{n+1}3^{m-n-1} + \cdots + l_m)|\Delta_m|^s = 3^m(\lambda^m)^s = 1.\end{aligned}$$

若 $m = +\infty$, 设 α 中有 l_k 个 k 阶基本三角形 Δ_k, $k = n, n+1, \ldots$, 则

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^s = \sum_{k=n}^{+\infty} l_k|\Delta_k|^s. \tag{2}$$

用 m_p 记不包含在 α 中任何 $q\,(q<p+1)$ 阶基本三角形中的所有的 $p+1$ 阶基本三角形的个数. 根据情形 $n<m<+\infty$, 对任何 $p\,(p\geq n)$, 有

$$\sum_{k=n}^{p} l_k|\Delta_k|^s + m_p|\Delta_{p+1}|^s = 1, \tag{3}$$

可以证明

$$\lim_{p\to\infty} m_p|\Delta_{p+1}|^s = 0.$$

事实上, 若 $\lim_{p\to\infty} m_p|\Delta_{p+1}|^s \neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对任何自然数 P, 都存在 $p_0>P$, 使得 $m_{p_0}|\Delta_{p_0+1}|^s \geq \varepsilon_0$, 从而存在自然数的无限子集 N_{ε_0}, 当 $p\in N_{\varepsilon_0}$ 时, 都有 $m_p|\Delta_{p+1}|^s\geq\varepsilon_0$. 现对每一 $p\in N_{\varepsilon_0}$, 用 M_p 记不包含在 α 中的任何 $q\,(q<p+1)$ 阶基本三角形中的所有的 $p+1$ 阶基本三角形的并集. 显然, M_p 为非空紧集, 且 $M_j\supset M_i, i>j$. 因而 $\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p\neq\emptyset$, 且 $\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p\subset S_\lambda$. 另一方面, 据 M_p 的定义, 易知 $(\bigcup_{U_i\in\alpha} U_i)\cap(\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p)=\emptyset$, 这与 $\emptyset\neq\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p\subset S_\lambda\subset\bigcup_{U_i\in\alpha} U_i$ 矛盾. 因而 $\lim_{p\to\infty} m_p|\Delta_{p+1}|^s=0$. 由此, 由 (3) 式得到 $\sum_{k=n}^{+\infty} l_k|\Delta_k|^s=1$, 进而由 (2) 式得到 $\sum_{U_i\in\alpha}|U_i|^s=1$. 定理得证.

推论 1 $H_N^s(S_\lambda)=|S_\lambda|^s=1$.

证明 据网测度的定义, 需要考虑由 S_λ 的网 N 中的基本三角形所构成的 S_λ 的所有覆盖, 但由于网测度定义中取下确界的缘故, 只需要考虑其中这样的覆盖, 它的每一个基本三角形不包含在另一个基本三角形内, 从而根据定理 1, 即知推论 1 成立.

定理 2 设 U 为平面中的开集, N_U 为 U 包含的所有基本三角形 Δ_σ 的集合, 其中每一个基本三角形不包含在另一个基本三角形内, 则

$$\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq|U|^s. \tag{4}$$

证明 据定理 1, 显然 $\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq 1$, 因而当 $|U|\geq 1$ 时, 定理结论自然成立. 下面, 均设 $|U|<1$, 则一定存在整数 $k\geq 0$, 使得 $\lambda^{k+1}\leq|U|<\lambda^k$. 由于 $\lambda\leq\frac{1}{3}$, 易知开集 U 至多可以和一个 k 阶基本三角形相交, 记此 k 阶基本三角形为 Δ, 显然 U 不能包含 Δ.

由于 Δ 包含 3 个 $k+1$ 阶基本三角形, 下面分三种情况证明. 为叙述方便, 分别用 $\Delta_m^l, \Delta_m^r, \Delta_m^u$ 记 Δ 中左下角, 右下角, 顶角的 $m\,(m>k)$ 阶基本三角形.

1). 若 U 与 Δ 中一个 $k+1$ 阶基本三角形相交, 那么

$$\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq|\Delta_{k+1}|^s=(\lambda^{k+1})^s.$$

而 $|U|\geq\lambda^{k+1}$, 故 (4) 式成立.

2). 若 U 与 Δ 中两个 $k+1$ 阶基本三角形相交, 不妨设 U 与 $\Delta_{k+1}^l, \Delta_{k+1}^r$ 相交 (见图 3). 因 U 是开集, $|\overline{U}|=|U|<\lambda^k$, $\overline{U}, U$ 均不能同时包含 Δ 的左下角顶点 A 和右下角顶点 B, 为此, 分两种情况证明.

2.1). 若 A, B 均不含于 $\overline{U}$ 内, 则一定存在正整数 n, m, 使得

$$U\cap\Delta_{k+n}^l\neq\emptyset, U\cap\Delta_{k+n+1}^l=\emptyset; U\cap\Delta_{k+m}^r\neq\emptyset, U\cap\Delta_{k+m+1}^r=\emptyset.$$

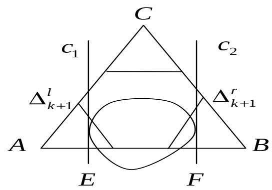

图 3

2.1.1). 若 n,m 不全为 1. 易知 $|U|\geq|\Delta|-|\Delta_{k+n}^l|-|\Delta_{k+m}^r|=(1-\lambda^n-\lambda^m)\lambda^k$, 而 Δ_{k+1}^l 包含 3^n 个 $k+n+1$ 阶基本三角形， Δ_{k+1}^r 包含 3^m 个 $k+m+1$ 阶基本三角形，因而

$$\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq(3^n-1)|\Delta_{k+n+1}|^s+(3^m-1)|\Delta_{k+m+1}|^s=(\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{m+1}})(\lambda^k)^s.$$

令 $f(\lambda)=(1-\lambda^n-\lambda^m)^s$, 由引理 2 知 $f(\lambda)\geq1-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^m},\lambda\in(0,\frac{1}{3}]$, 当 n,m 不全为 1 时，有 $1-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^m}>\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{m+1}}$, 所以 $(1-\lambda^n-\lambda^m)^s(\lambda^k)^s\geq(\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{m+1}})(\lambda^k)^s$, 故 (4) 式成立.

2.1.2). 若 $n=m=1$. 作垂直于 Δ 底边的直线 c_1,c_2, 使其与 U 的边界相交，且 U 在 c_1,c_2 之间，记 c_1 与 Δ_{k+1}^l 右下角顶点 E 的距离为 a, c_2 与 Δ_{k+1}^r 左下角顶点 F 的距离为 b (见图 3), 则 $|U|=(|\Delta|-|\Delta_{k+1}^l|-|\Delta_{k+1}^r|)+a+b=(\lambda^k-2\lambda^{k+1})+a+b$.

若 $0<a\leq\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2}),0<b\leq\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2})$, 则 $|U|>\lambda^k-2\lambda^{k+1}=(1-2\lambda)\lambda^k$, 而 U 分别只与 $\Delta_{k+1}^l,\Delta_{k+1}^r$ 中一个 Δ_{k+2} 相交，从而 $\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq2|\Delta_{k+2}|^s=\frac{2}{9}(\lambda^k)^s$. 令 $f(\lambda)=(1-2\lambda)^s$, 由引理 2 易知 $f(\lambda)>\frac{2}{9}$, 从而 (4) 式成立.

若 $0<a\leq\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2}),b>\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2})$, 则 $|U|>(1-\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2)\lambda^k$, 而 $\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq 3|\Delta_{k+2}|^s=\frac{1}{3}(\lambda^k)^s$. 令 $f(\lambda)=(1-\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2)^s$, 由引理 2 易知 $f(\lambda)>\frac{1}{3}$, 从而 (4) 式成立.

若 $a>\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2}),b>\frac{1}{2}(\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2})$, 则 $|U|>(1-\lambda-\lambda^2)\lambda^k$, 而 $\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq 4|\Delta_{k+2}|^s=\frac{4}{9}(\lambda^k)^s$. 令 $f(\lambda)=(1-\lambda-\lambda^2)^s$, 由引理 2 易知 $f(\lambda)>\frac{4}{9}$, 从而 (4) 式成立.

2.2). 若 A,B 之一含于 $\overline{U}$ 内, 不妨设 $A\notin\overline{U},B\in\overline{U}$, 则一定存在正整数 n, 使得 $U\cap\Delta_{k+n}^l\neq\emptyset,U\cap\Delta_{k+n+1}^l=\emptyset$. 易知 $|U|\geq|\Delta|-|\Delta_{k+n}^l|=(1-\lambda^n)\lambda^k$, 且

$$\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq(3^n-1)|\Delta_{k+n+1}|^s+|\Delta_{k+1}^r|^s=(\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n+1}})(\lambda^k)^s.$$

令 $f(\lambda)=(1-\lambda^n)^s$, 由引理 2 易知 $f(\lambda)>\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}$, 从而 (4) 式成立.

3). 若 U 与 Δ 中三个 $k+1$ 阶基本三角形相交 (见图 4). 因 $|\overline{U}|=|U|<\lambda^k$, $\overline{U},U$ 均不能同时包含 Δ 的左下角顶点 A, 右下角顶点 B 和上顶点 C 中的两个，为此，分两种情况证明.

3.1). 若 A,B,C 均不含于 $\overline{U}$ 内，则一定存在正整数 n,m,l, 使得

$$U\cap\Delta_{k+n}^l\neq\emptyset,U\cap\Delta_{k+n+1}^l=\emptyset;U\cap\Delta_{k+m}^r\neq\emptyset,U\cap\Delta_{k+m+1}^r=\emptyset;$$

$$U\cap\Delta_{k+l}^u\neq\emptyset,U\cap\Delta_{k+l+1}^u=\emptyset.$$

作平行于 Δ 三边的直线，使其与 U 的边界相交，且 U 在其界定的正三角形区域内，记此正三角形区域围为 V (见图 4), 其直径 (边长) 为 $|V|$, 由引理 1 知 $|U|\geq\frac{|V|}{2}$.

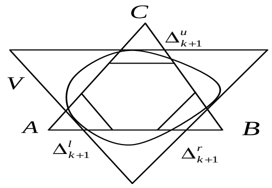

图 4

注意到 V 的每边由三部分组成，容易看出

$$|V| \geq (\lambda^k - \lambda^{k+n} - \lambda^{k+m}) + \lambda^{k+m} + (\lambda^k - \lambda^{k+m} - \lambda^{k+l}) = 2\lambda^k - (\lambda^{k+n} + \lambda^{k+m} + \lambda^{k+l}). \quad (5)$$

下面，分四种情况讨论.

3.1.1). 若 U 分别只与 $\Delta^l_{k+n}, \Delta^r_{k+m}, \Delta^u_{k+l}$ 中一个 $\Delta_{k+n+1}, \Delta_{k+m+1}, \Delta_{k+l+1}$ 相交，那么

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta_\sigma \in N_U} |\Delta_\sigma|^s &\leq (3^n - 2)|\Delta_{k+n+1}|^s + (3^m - 2)|\Delta_{k+m+1}|^s + (3^l - 2)|\Delta_{k+l+1}|^s \\ &= (1 - \frac{2}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^{m+1}} - \frac{2}{3^{l+1}})(\lambda^k)^s,\end{aligned}$$

而 $|U| \geq \frac{|V|}{2} \geq (1 - \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^m + \lambda^l))\lambda^k$. 令 $f(\lambda) = (1 - \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^m + \lambda^l))^s$, 由引理 2 易知 $f(\lambda) > 1 - \frac{2}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^{m+1}} - \frac{2}{3^{l+1}}$, 从而 (4) 式成立.

3.1.2). 若 U 与 Δ^l_{k+n} 中两个 Δ_{k+n+1} 相交, 且分别只与 $\Delta^r_{k+m}, \Delta^u_{k+l}$ 中一个 $\Delta_{k+m+1}, \Delta_{k+l+1}$ 相交. 对此，分两种情况讨论.

若存在整数 $t \geq 2$, 使得 U 与位于 Δ^l_{k+n} 顶角和右下角的两个 $k+n+1$ 阶基本三角形的左下角的两个 $k+n+t$ 阶基本三角形不相交，当然，如果这样的 t 存在，则任何整数 $t'(t' > t)$ 均满足上述条件，我们取其中最小的作为 t. 那么 U 至少与满足上述条件的两个 $k+n+t-1$ 阶基本三角形中的一个相交，因而

$$\begin{aligned}|V| &\geq 2\lambda^k - (\lambda^{k+n} + \lambda^{k+m} + \lambda^{k+l}) + (|\Delta_{k+n+1}| - |\Delta_{k+n+t-1}|), \\ |U| &\geq \frac{|V|}{2} \geq \lambda^k - \frac{1}{2}(\lambda^{k+n} + \lambda^{k+m} + \lambda^{k+l}) + \frac{1}{2}(|\Delta_{k+n+1}| - |\Delta_{k+n+t-1}|) \\ &= (1 - \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^m + \lambda^l) + \frac{1}{2}(\lambda^{n+1} - \lambda^{n+t-1}))\lambda^k,\end{aligned}$$

而此时有

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta_\sigma \in N_U} |\Delta_\sigma|^s &\leq (3^n - 1)|\Delta_{k+n+1}|^s - 2|\Delta_{k+n+t}|^s + (3^m - 2)|\Delta_{k+m+1}|^s + (3^l - 2)|\Delta_{k+l+1}|^s \\ &= (1 - \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^{m+1}} - \frac{2}{3^{l+1}} - \frac{2}{3^{n+t}})(\lambda^k)^s.\end{aligned}$$

令 $f(\lambda) = (1 - \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^m + \lambda^l) + \frac{1}{2}(\lambda^{n+1} - \lambda^{n+t-1}))^s$, 与引理 2 类似证明易知 $f(\lambda) \geq f(\frac{1}{3}) > 1 - \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^{m+1}} - \frac{2}{3^{l+1}} - \frac{2}{3^{n+t}}$, 从而 (4) 式成立.

若上述 t 不存在，则有 $|V| \geq 2\lambda^k - (\lambda^{k+n} + \lambda^{k+m} + \lambda^{k+l}) + |\Delta_{k+n+1}|$, 从而

$$|U| \geq \frac{|V|}{2} \geq (1 - \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^m + \lambda^l) + \frac{1}{2}\lambda^{n+1})\lambda^k,$$

而此时有

$$\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s\leq(3^n-1)|\Delta_{k+n+1}|^s+(3^m-2)|\Delta_{k+m+1}|^s+(3^l-2)|\Delta_{k+l+1}|^s$$
$$=(1-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{2}{3^{m+1}}-\frac{2}{3^{l+1}})(\lambda^k)^s.$$

令 $f(\lambda)=(1-\frac{1}{2}(\lambda^n+\lambda^m+\lambda^l)+\frac{1}{2}\lambda^{n+1})^s$, 与引理 2 类似证明易知 $f(\lambda)\geq f(\frac{1}{3})>1-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{2}{3^{m+1}}-\frac{2}{3^{l+1}}$, 从而 (4) 式成立.

3.1.3). 若 U 分别与 $\Delta^l_{k+n},\Delta^r_{k+m}$ 中两个 $\Delta_{k+n+1},\Delta_{k+m+1}$ 相交，只与 Δ^u_{k+l} 中一个 Δ_{k+l+1} 相交.

3.1.4). 若 U 分别与 $\Delta^l_{k+n},\Delta^r_{k+m},\Delta^u_{k+l}$ 中两个 $\Delta_{k+n+1},\Delta_{k+m+1},\Delta_{k+l+1}$ 相交.

由于 $\Delta^l_{k+1},\Delta^r_{k+1},\Delta^u_{k+1}$ 的对称性，由 3.1.2) 的证明可以看出， 3.1.3) 和 3.1.4) 完全类似 3.1.2) 可以证明 (4) 式成立.

3.2). 若 A,B,C 之一包含在 $\overline{U}$ 内，不妨设 $C\in\overline{U}$, 则一定存在正整数 n,m, 使得

$$U\cap\Delta^l_{k+n}\neq\emptyset,U\cap\Delta^l_{k+n+1}=\emptyset;\ U\cap\Delta^r_{k+m}\neq\emptyset,U\cap\Delta^r_{k+m+1}=\emptyset.$$

在这种情况下 $|V|\geq 2\lambda^k-(\lambda^{k+n}+\lambda^{k+m})$, 其右端较 (5) 式右端增加 λ^{k+l}, 从而 $|U|\geq\frac{|V|}{2}\geq(1-\frac{1}{2}(\lambda^n+\lambda^m))\lambda^k$ 右端较 3.1) 的情形增加 $\frac{\lambda^{k+l}}{2}$, 而此时 $\sum_{\Delta_\sigma\in N_U}|\Delta_\sigma|^s$ 较 3.1) 的情形至多增加 $|\Delta^u_{k+l+1}|^s=\frac{(\lambda^k)^s}{3^{l+1}}$. 注意到 $\frac{1}{2}\frac{1}{3^l}>\frac{1}{3^{l+1}}$, 3.2) 完全类似 3.1) 可以证明 (4) 式成立.

下面，是本文的主要结果.

定理 3 $H^s(S_\lambda)=H^s_N(S_\lambda)=1$.

证明 由引理 3 和推论 1, 显然 $H^s(S_\lambda)\leq H^s_N(S_\lambda)=1$. 为了证明相反的不等式，需要考虑 S_λ 的所有 δ- 覆盖，但由于所有子集构成的类，与开集类是强等价的 [3], 因而仅考虑开集类就足够了. 设 $\Omega=\{U_i\}$ 是 S_λ 的任一 δ- 开覆盖，对任一开集 $U_i\in\Omega$, 用 N_{U_i} 记 U_i 包含的所有基本三角形 Δ_σ 的集合，其中每个基本三角形不包含在另一个基本三角形内. 据定理 2, 有 $|U_i|^s\geq\sum_{\Delta_\sigma\in N_{U_i}}|\Delta_\sigma|^s$, 从而

$$\sum_{U_i\in\Omega}|U_i|^s\geq\sum_{U_i\in\Omega}\sum_{\Delta_\sigma\in N_{U_i}}|\Delta_\sigma|^s. \tag{6}$$

因为 S_λ 是紧的，可以使得 $S_\lambda\subset\bigcup_{U_i\in\Omega}\bigcup_{\Delta_\sigma\in N_{U_i}}\Delta_\sigma$. 据 Hausdorff 测度和网测度的定义，由 (6) 式易知 $H^s(S_\lambda)\geq H^s_N(S_\lambda)$. 定理得证.

文献 [9] 提出了关于 Hausdorff 测度精确值的八个开问题，其中第一个开问题是:

问题 1 在什么条件下，存在 E 的覆盖 $\alpha=\{U_i\}$, 使得 $H^s(E)=\sum_{U_i\in\alpha}|U_i|^s$?

作者称这样的覆盖 $\alpha=\{U_i\}$ 为 E 的最佳覆盖. 由文献 [2, 4, 5] 可以看出，三分 Cantor 集和 Sierpinski 毯是它们自己的最佳覆盖，并且构成它们的 k 阶基本区间 (k 阶基本正方行) 组成的集合都是它们的最佳覆盖.

根据定理 1 和定理 3, 对 Sierpinski 垫，我们进一步有如下结论.

推论 2 设 $\alpha=\{U_i\}$ 是任一由 S_λ 的基本三角形构成的 S_λ 的覆盖，其中每一个基本三角形不包含在另一个基本三角形内. 则 $\alpha=\{U_i\}$ 是 S_λ 的最佳覆盖. 并且 $\{S_\lambda\}$ 也是 S_λ 的最佳覆盖.

注意，这里 $\alpha=\{U_i\}$ 可以是无限集，因而它是非平凡的.

参考文献:

[1] FALCONER K J. *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications* [M]. New York, Wiley, 1990.
[2] FALCONER K J. *The Geometry of Fractal Sets* [M]. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
[3] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海：上海科技教育出版社， 2000.
WEN Zhi-ying. *Mathematical Foundations of Fractal Geometry* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000. (in Chinese)
[4] ZHOU Zuo-ling, WU Min. *The Hausdorff measure of a Sierpiński carpet* [J]. Sci. China Ser. A, 1999, **42**(7): 673–680.
[5] 黄春朝. Sierpińnski 地毯 Hausdorff 测度的一个初等证明 [J]. 数学学报， 2000, **43**(4): 599–604.
HUANG Chun-chao. *An elementary proof for Hausdorff measure of Sierpiński carpet* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2000, **43**(4): 599–604. (in Chinese)
[6] ZHOU Zuo-ling. *Hausdorff measure of Sierpiński gasket* [J]. Sci. China Ser. A, 1997, **40**(10): 1016–1021.
[7] ZHOU Zuo-ling, FENG Li. *A new estimate of the Hausdorff measure of the Sierpiński gasket* [J]. Nonlinearity, 2000, **13**(3): 479–491.
[8] JIA Bao-guo, ZHOU Zuo-ling, ZHU Zhi-wei. *A lower bound for the Hausdorff measure of the Sierpiński gasket* [J]. Nonlinearity, 2002, **15**(2): 393–404.
[9] ZHOU Zuo-ling, FENG Li. *Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: a brief survey of recent results* [J]. Nonlinearity, 2004, **17**(2): 493–502.

The Hausdorff Measure of a Class of Sierpinski Gaskets

WANG Ming-hua
(Department of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402168, China)

Abstract: Let S_λ be a class of Sierpinski gaskets with compression ratio λ ($\lambda\leq\frac{1}{3}$), $s=-\log_\lambda^3$ be the Hausdorff dimension of S_λ, and N be the set of all the basic triangles to produce S_λ. In the paper, by the method of net measure, the exact value of the Hausdorff measure of S_λ, $H^s(S_\lambda)=1$, is obtained, the fact that the Hausdorff measure of S_λ can be determined by net measure $H^s_N(S_\lambda)$ is shown, and the best coverings of S_λ that are nontrivial are obtained.

Key words: self-similar set; Sierpinski gasket; Hausdorff measure.