

文章编号: 1002-0446(2000)06-0457-08

## 基于 AutoCAD 平台的六自由度并联机器人 位置工作空间的解析求解方法\*

刘辛军<sup>1</sup> 张立杰<sup>2</sup> 高峰<sup>3</sup>

(1. 清华大学精仪系 北京 100084; 2. 燕山大学机械工程学院机电系 秦皇岛 066004;  
3. 河北工业大学机器人研究中心 300130)

摘要: 本文研究基于 AutoCAD 平台的六自由度并联机器人在姿态给定情况下工作空间(即位置工作空间)的几何确定方法, 该方法以机器人的运动学反解为基础, 得出 Stewart 并联机器人和 6-RTS 并联机器人位置工作空间的边界方程, 从而得出 Stewart 并联机器人的位置工作空间是 6 个球体的交集, 6-RTS 并联机器人在姿态给定时其工作空间是 6 个相同的规则曲面体的交集. 基于 AutoCAD 平台, 其交集以及交集的容积可以很容易的得出, 该方法是确定六自由度并联机器人工作空间的一种简单、有效方法.

关键词: 并联机器人; 运动学反解; 工作空间; 几何法; CAD

中图分类号: TP24 文献标识码: B

### 1 引言

从结构上看, 并联机器人的运动平台通过相互关联的多个运动链与下平台相联接, 这使并联机器人具有高的刚性、承载能力和精度等特性, 从而使之成为国内外研究热点. 1979 年, MacCallion 和 Pham<sup>[1]</sup>建议把一并联装置用于装配线上; 1983 年, Hunt<sup>[2]</sup>系统地考查了各种并联机器人的可能运动, 提出了并联装置的各种新结构形式; 之后, 这些并联结构得到了详细地的研究, 如 Yang 和 Lee<sup>[3]</sup>、Mohamed 与 Duffy<sup>[4]</sup>、Fichter<sup>[5]</sup>、Merlet<sup>[6]</sup>以及 Huang<sup>[7,8]</sup>分别研究了空间六自由度并联机器人的运动学、力控制和动力学, Gosselin 和 Angeles<sup>[9,10]</sup>讨论了平面、球面三自由度并联机器人的优化设计问题, Lee 和 Shah<sup>[11]</sup>研究了一空间三自由度并联机器人的设计, 另一方面, Inoue<sup>[12]</sup>在平行四边形机构的基础上, 提出一种六自由度并联机器人.

一般来说, 同串联机器人相比, 并联机器人的运动学和几何特性要复杂的多, 并联机器人的奇异性和工作空间的确定也是一个具有挑战性的方向, 而工作空间在机器人的设计和轨迹规划方面是不可缺少的. 从优化设计的角度出发, 对于给定的机器人机构参数, 能够预测其工作空间的大小和形状是很重要的. 对于并联机器人特别是并联六自由度机器人工作空间的研究工作大多集中在数值分析方法<sup>[3,5,6]</sup>, 而采用几何方法的并不多见<sup>[13,14]</sup>.

本文采用几何方法在 AutoCAD 平台上得出了六自由度并联机器人定姿态的工作空间及其截面. 六自由度并联机器人的工作空间存在一六维空间内, 因此我们很难来表达它, 本文研究并联机器人的位置工作空间, 也就是在姿态给定情况下机器人的三维工作区域. 只要是姿态给定, 我们都可以采用该几何方法在 AutoCAD 平台上确定六自由度并联机器人如 Stewart

\* 收稿日期: 1999-10-25

并联机器人和 6-RTS 并联机器人的工作空间及其截面. 首先, 本文介绍了这两种并联机器人的运动学反解问题, 位置工作空间及其截面的几何法是以该运动学反解为基础的. 最后, 在 AutoCAD 平台上具体分析了一 6-RTS 并联机器人的位置工作空间, 并对六自由度并联机器人的可达工作空间依赖于位置解的结果<sup>[15]</sup>做出了解析.

## 2 六自由度并联机器人的运动学反解

### 2.1 Stewart 并联机器人

Stewart 并联机器人如图 1(a) 所示, 它以作为飞行模拟器、数控加工中心的本体机构而闻名, 该机器人的上平台通过六个相同的分支与下平台相联接, 每个分支有一个移动副、两个球面副. 为了分析该并联机器人的运动学反解, 建立如图 1(b) 所示的坐标系  $R: o-xyz$  坐标系固定在下平台(定平台)上; 坐标系  $R': o'-x'y'z'$  建立在上平台(运动平台)上. 联接上平台的球铰记为  $P_i (i=1, \dots, 6)$ , 该点的坐标向量用  $[p_i]$  来表示; 联接下平台的球铰记为  $B_i$ , 其坐标向量定义为  $[b_i]$ ; 上平台的位置向量定义为  $[r]_R$ , 即

$$[r]_R = [x, y, z]^T \quad (1)$$

上平台对下平台的姿态用三个欧拉角  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$  表示, 其方向余弦矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} q_{11} &= -\sin\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_3 + \cos\mathcal{Q}_1\cos\mathcal{Q}_2\cos\mathcal{Q}_3 \\ q_{12} &= -\sin\mathcal{Q}_1\cos\mathcal{Q}_3 - \cos\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_2\cos\mathcal{Q}_3 \\ q_{13} &= \cos\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_3 \\ q_{21} &= \cos\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_3 + \sin\mathcal{Q}_1\cos\mathcal{Q}_2\cos\mathcal{Q}_3 \\ q_{22} &= \cos\mathcal{Q}_1\cos\mathcal{Q}_3 - \sin\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_2\cos\mathcal{Q}_3 \\ q_{23} &= \sin\mathcal{Q}_1\sin\mathcal{Q}_3 \\ q_{31} &= -\cos\mathcal{Q}_3\sin\mathcal{Q}_2 \\ q_{32} &= \sin\mathcal{Q}_3\sin\mathcal{Q}_2 \\ q_{33} &= \cos\mathcal{Q}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

则  $P_i$  点在定坐标系  $R$  中的坐标可以由以下向量确定,

$$[P_i]_R = [r]_R + Q[p_i]_{R'} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

式中

$$[p_i]_{R'} = [x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}]^T \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5)$$

$B_i$  点在定坐标系  $R$  中的坐标向量为

$$[b_i]_R = [x_{bi}, y_{bi}, z_{bi}]^T \quad i = 1, \dots, 6 \quad (6)$$

Stewart 并联机器人的运动学反解可以写为

$$\| [p_i - b_i]_R \| = \rho_i^2 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7)$$

### 2.2 6-RTS 并联机器人

6-RTS 并联机器人如图 2 所示, 该机器人上平台也是通过 6 个相同的运动链与下平台相

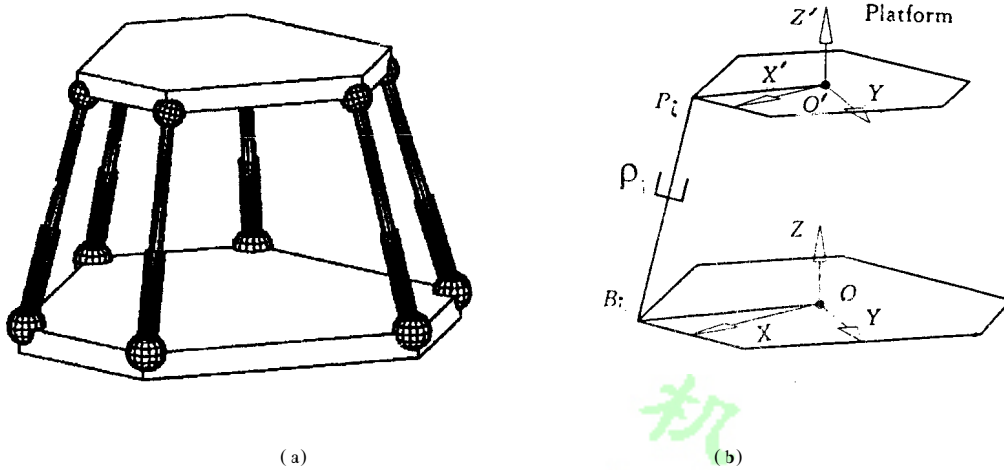


图 1 Stewart 并联机器人及其结构参数

联接, 每个运动链含有一个转动副、两个球面副, 为了避免自转运动, 很多设计者往往用万向铰来代替其中之一球铰(如与连架杆相联接的球铰), 这组成了一 6-RTS 结构系统. 联接上平台的铰链为球铰, 记为  $P_i (i=1, \dots, 6)$ , 与连架杆联接的铰链为万向铰, 记为  $B_i (i=1, \dots, 6)$ , 则该并联机器人的结构参数为:  $O'P_i = r_3, P_iB_i = r_2, OB_i = r_1$ , 以及如图 2(b) 所示的  $\phi$  角. 采用

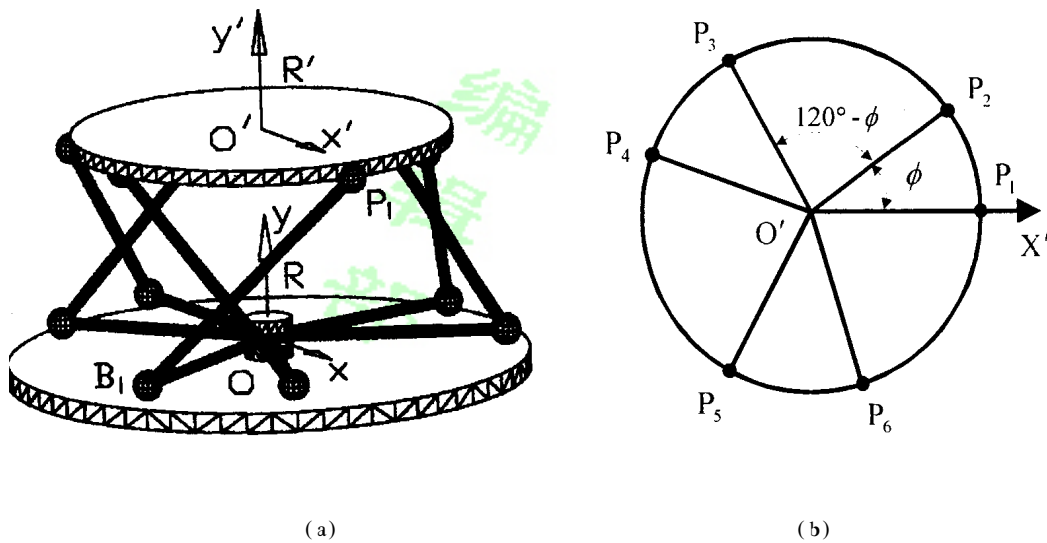


图 2 6-RTS 并联机器人及其结构参数

与 Stewart 并联机器人类似的坐标系及坐标向量定义, 则  $P_i$  点在定坐标系  $R$  中的坐标可以由以下向量确定

$$[p_i]_R = [r]_R + Q[p_i]_{R'} \tag{8}$$

式中

$$[p_i]_R' = \begin{vmatrix} r_3 \cos \eta_i \\ r_3 \sin \eta_i \\ 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

其中

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi \\ 2\pi/3 \\ 2\pi/3 + \varphi \\ -2\pi/3 \\ \varphi - 2\pi/3 \end{vmatrix} \quad (10)$$

由图 2 可得各向量  $[b_i]_R$ :

$$[b_i]_R = \begin{vmatrix} r_1 \cos \theta_i \\ r_1 \sin \theta_i \\ 0 \end{vmatrix} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (11)$$

式中  $\theta_i$  为各原动件  $OB_i (i = 1, \dots, 6)$  的输入角度. 则该机器人的运动学反解可由下式得出

$$\| [p_i - b_i]_R \| = r_2, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

即

$$\| [r]_R + Q[p_i]_R' - [b_i]_R \| = r_2, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (13)$$

### 3 六自由度并联机器人位置工作空间的解析求解

#### 3.1 Stewart 并联机器人

所谓机器人的位置工作空间是指机器人在姿态给定情况下的工作空间, 下面我们具体分析 Stewart 并联机器人的位置工作空间的几何确定方法. 由式(1)~(7)得

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = \rho_i^2 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (14)$$

式中

$$x_i = x_{bi} - q_{11}x_{pi} - q_{12}y_{pi} - q_{13}z_{pi} \quad (15)$$

$$y_i = y_{bi} - q_{21}x_{pi} - q_{22}y_{pi} - q_{23}z_{pi} \quad (16)$$

$$z_i = z_{bi} - q_{31}x_{pi} - q_{32}y_{pi} - q_{33}z_{pi} \quad (17)$$

事实上式(14)是六簇球面的方程, 其半径为  $\rho_i$ , 球心为  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ , 该球心坐标由方向余弦矩阵  $Q$  以及坐标向量  $[p_i]_R'$  和  $[b_i]_R$  确定, 而坐标向量  $[p_i]_R'$  和  $[b_i]_R$  与 Stewart 并联机器人结构参数有关, 给定该机器人的结构参数, 坐标向量  $[p_i]_R'$  和  $[b_i]_R$  确定, 那么球面方程只与上平台对于下平台的姿态即方向余弦矩阵  $Q$  有关. 如果假设电机的驱动范围为

$$\rho_{\min} < \rho_i < \rho_{\max}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (18)$$

那么, 如果给定 Stewart 并联机器人的一个姿态, 则式(14)表示的是六簇无穷个球心为  $O_i(x_i, y_i, z_i)$  的球面, 这无穷个球面组成一内径为  $\rho_{\min}$  外径为  $\rho_{\max}$  的空心球体, 因此 Stewart 并联机器人的位置工作空间是六个相同的内径为  $\rho_{\min}$  外径为  $\rho_{\max}$  的空心球体的交集<sup>[13]</sup>. 这六个空心球体的参数为:

- 球心:  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ ;

- 内径:  $r = \rho_{\min}$ ;
- 外径:  $R = \rho_{\max}$ .

球心坐标与机器人的结构参数有关. 只要给出 Stewart 并联机器人的结构参数和电机的驱动范围, 我们就可以确定这六个空心球体, 从而得出这六个空心球体的交集, 该交集即为 Stewart 并联机器人的位置工作空间. 该交集可以用 AutoCAD 平台很方便的得到, 其截面也可以很容易的得出.

### 3.2 6-RTS 并联机器人

用几何法确定该机器人的工作空间非常困难, 但当该机器人的结构参数和姿态给定时可以用几何的方法确定其工作空间. 当机器人的姿态给定时, 式(3)确定, 式(13)可以改写为:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_2^2 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (19)$$

式中

$$x_i = r_1 \cos\theta_i - q_{11} r_3 \cos\eta_i - q_{12} r_3 \sin\eta_i \quad (20)$$

$$y_i = r_1 \sin\theta_i - q_{21} r_3 \cos\eta_i - q_{22} r_3 \sin\eta_i \quad (21)$$

$$z_i = -q_{31} r_3 \cos\eta_i - q_{32} r_3 \sin\eta_i \quad (22)$$

由式(19)可知, 该方程在三维空间内表示的是六簇半径为  $r_2$  的球面, 其球心坐标为  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ . 注意到式(20)和(21), 我们可以看出  $x_i$  和  $y_i$  是随着  $\theta_i$  的变化而改变的. 由式(20)和(21)得

$$r_q \cos\theta_i = x_i + x_{oi} \quad (23)$$

$$r_q \sin\theta_i = y_i + y_{oi} \quad (24)$$

由于  $\theta_i$  是任意的, 所以有

$$(x_i + x_{oi})^2 + (y_i + y_{oi})^2 = r_1^2 \quad (25)$$

式中

$$x_{oi} = q_{11} r_3 \cos\eta_i + q_{12} r_3 \sin\eta_i \quad (26)$$

$$y_{oi} = q_{21} r_3 \cos\eta_i + q_{22} r_3 \sin\eta_i \quad (27)$$

$x_{oi}, y_{oi}$  仅仅与各个分支的角度参数  $\eta_i$  有关, 当  $\eta_i$  已知, 式(25)所表示的圆就可以确定, 该圆的圆心为  $O_{oi}(-x_{oi}, -y_{oi})$ , 半径为  $r_1$ . 因此对于单个分支来说, 式(19)所表示的一簇球面的球心坐标是在高度为  $z_i$ 、半径为  $r_2$ 、圆心为  $O_{oi}(-x_{oi}, -y_{oi})$  的圆周上. 由式(22)知, 当该并联机器人的姿态给定时,  $z_i$  可以确定, 因此对于单个分支来说:

1、当  $r_1 \geq r_2$  时, 式(19)表达的事实上是一个圆环体, 如图 3 所示, 而 6-RTS 并联机器人的姿态给定时, 其可达工作空间就是 6 个圆环体的交集, 该圆环体的确定参数为:

- 中心坐标:  $O_{ii}(-x_{oi}, -y_{oi}, z_i)$ ;
- 外径:  $R_{oi} = r_1 + r_2$ ;
- 内径:  $R_{ii} = r_1 - r_2$ .

2、当  $r_1 < r_2$  时, 式(19)表达的事实上是一个如图 4(a) 所示的封闭圆弧  $abcd$  绕  $Z''$  轴旋转形成的曲面体, 图 4(b) 为剖开的二分之一该曲

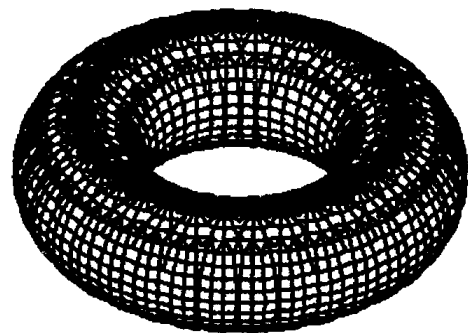


图 3  $r_1 \geq r_2$  时, 每个分支工作空间是一个圆环体

面体, 而 6-RTS 并联机器人的姿态给定时, 其可达工作空间就是 6 个曲面体的交集, 该曲面体的确定参数为

- 旋转中心坐标:  $O_{Hi}(-x_{oi}, -y_{oi}, z_i)$ ;
- $r_1, r_2$  以及  $z' = \sqrt{r_2^2 - r_1^2 - z_i^2}$ .

借助于 AutoCAD 平台, 当 6-RTS 并联机器人的结构参数  $r_1, r_2, r_3$  以及  $\varphi$  和姿态(3 个欧拉角  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ) 给定时, 其工作空间及其体积可以很容易的得出.

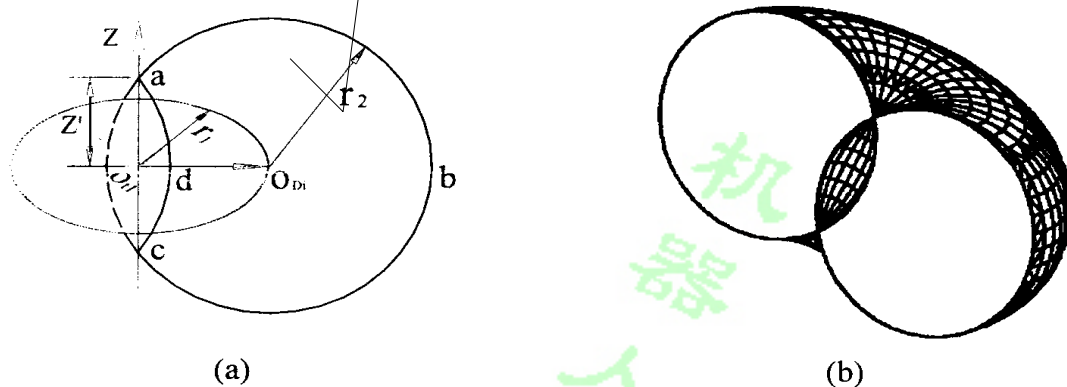


图 4  $r_1 < r_2$  时每个分支工作空间是一个封闭圆弧  $abcd$  绕  $Z'$  轴旋转形成的曲面体

#### 4 举例

这一部分, 我们仅仅以一 6-RTS 并联机器人为例, 说明六自由度并联机器人位置工作空间的在 AutoCAD 平台上的几何确定方法.

由 2.2 的分析可知, 6-RTS 并联机器人在姿态给定情况下, 其工作空间是 6 个规则曲面体的交集. 下面我们以一个 6-RTS 并联机器人为例, 在 AutoCAD 平台上具体分析其位置工作空间, 其 3 个无量纲结构参数为:

$$r_1 = 0.8, \quad r_2 = 1.2, \quad r_3 = 1.0 \quad (28)$$

角度参数为  $\varphi = 0.0$ . 分析的姿态为上平台平行于下平台的姿态, 即

$$\varphi_1 = 0.0, \quad \varphi_2 = 0.0, \quad \varphi_3 = 0.0 \quad (29)$$

由于  $r_1 < r_2$ , 所以该姿态下 6-RTS 并联机器人的工作空间是 6 个曲面体的交集, 由于  $\varphi = 0.0$ , 6 个曲面体两两重合, 所以该姿态下 6-RTS 并联机器人的工作空间是 3 个曲面体的交集, 中心坐标分别为:

$$\begin{aligned} O_{H1} &(-0.98 \quad -0.17 \quad 0.0) \\ O_{H2} &(0.64 \quad -0.77 \quad 0.0) \\ O_{H3} &(0.34 \quad 0.94 \quad 0.0) \end{aligned} \quad (30)$$

如图 5 所示, 第五、第六分支的工作空间即为封闭圆弧  $abcd$  绕  $Z'$  轴旋转形成的曲面体, 该姿态下 6-RTS 并联机器人的工作空间就是这样 3 个曲面体的交集, 如图 6(a) 所示, 图 6(b) 为该机器人  $z = 0.0$  时位置工作空间的截面. 其体积和可由 AutoCAD 的下拉菜单“TOOLS- IN-QUIRY- MASS PROPERTIES”得到, 体积为  $V = 4.65$ , 截面面积可由下拉菜单“TOOLS- IN-QUIRY- AREA”得到, 为  $A = 2.6$ .

由此可见,当 6-RTS 机器人的结构参数给出后,用该几何方法在 AutoCAD 平台上求该机器人定姿态下的工作空间很方便、直观.

Stewart 并联机器人的位置工作空间也可根据 2.1 所述的几何法在 AutoCAD 平台上直接得到,而用不着在分析无数位置工作空间的截面的基础上得出其位置工作空间<sup>[13]</sup>.

我们来看一下六自由度并联机器人的可达工作空间,对于 6-RTS 并联机器人,由式(22)、

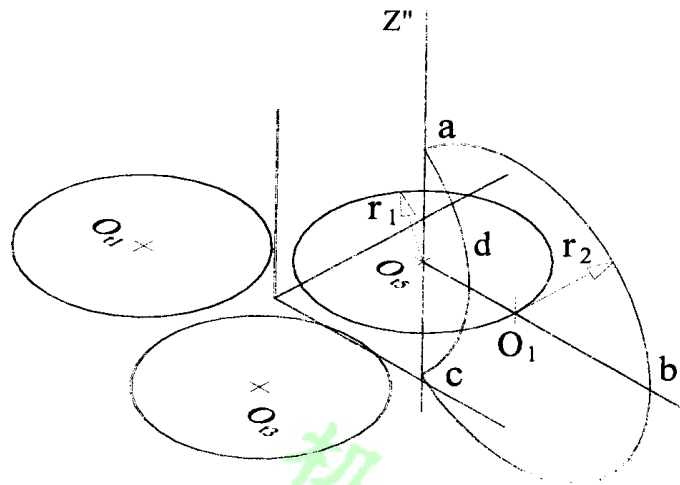


图 5 6-RTS 并联机器人位置工作空间求解图例

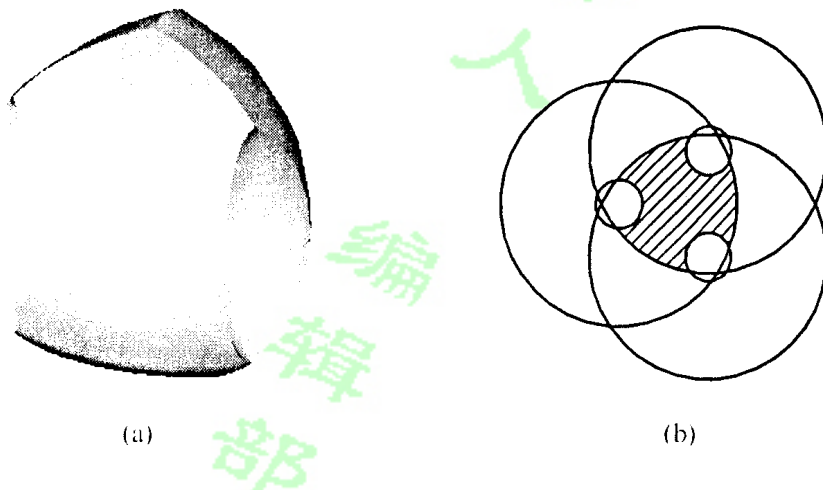


图 6 6-RTS 并联机器人的位置工作空间及其截面

(26)和(27)得:

$$x_{oi}^2 + y_{oi}^2 + z_i^2 = r_3^2 \tag{30}$$

这是一个球面的方程,这意味着点  $O_{oi}(-x_{oi}, -y_{oi}, z_i)$  分布在以原点  $O$  为球心以  $r_3$  为半径的球面上,该球面的大小和位置与  $\eta_i$  或  $\varphi$  无关.但由于 3 个欧拉角  $\varphi, \vartheta, \varphi_3$  不能任意取值,即该并联机器人的姿态不能是任意的,所以点  $O_{oi}(-x_{oi}, -y_{oi}, z_i)$  的轨迹是球面的子集,该子集与该并联机器人的姿态有关,由于我们不考虑杆件之间的相互干涉并且假设  $\theta_i$  是任意,由该并联机器人的结构特性可知,该子集或该机器人的姿态与  $\eta_i$  或  $\varphi$  无关,所以 6-RTS 并联机器人的可达工作空间与  $\eta_i$  或  $\varphi$  无关.由于点  $O_{oi}(-x_{oi}, -y_{oi}, z_i)$  的轨迹或决定 6-RTS 并联机器人的可达工作空间的球面子集的大小取决于该并联机器人的姿态,而姿态取决于该机器人位置反解的结果,所以 6-RTS 并联机器人的可达工作空间取决于该机器人位置反解的结果,采用几何很难得出,我们能够得出的结果是: 6-RTS 并联机器人的可达工作空间是其任何一个位

置工作空间以以原点  $O$  为球心  $r_3$  为半径的部分球面为基面的包络。

对于 Stewart 并联机器人也有相同的结果, 因此六自由度并联机器人的可达工作空间取决于位置反解的结果, 很难用几何法来求解。

## 5 结 论

本文在 AutoCAD 平台上研究了六自由度并联机器人在姿态给定情况下的工作空间的几何确定方法。该方法以并联机器人的运动学反解为基础, 得出 Stewart 并联机器人在姿态给定时的的工作空间是六个实心或空心球体的交集; 6-RTS 并联机器人的位置工作空间是 6 个相同的曲面体的交集。该交集或其截面以及其容积可以在 AutoCAD 平台上很方便地得到, 该方法是确定 6 自由度并联机器人位置工作空间的一种简单、有效方法。

## 参 考 文 献

- 1 MacCallion H, Pham DT. The Analysis of a Six Degree of Freedom Workstation for Mechanized Assembly. Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, July 1979
- 2 Hunt KH. Structural Kinematic of In-parallel-actuated Robot-arms. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105: 705- 712
- 3 Yang DCH, Lee TW. Feasibility Study of a Platform Type of Robot Manipulators Form a Kinematic Viewpoint. ASME J Mech Transm Autom Des, 1984, 106(2): 191- 198
- 4 Mohamed MG. Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators. ASME J Mech Transm Autom Des, 1985, 107(2): 226- 229
- 5 Fichter EF. A Stewart Platform-based Manipulator: General Theory and Practical Construction. The International Journal of Robotics Research, 1986, 5(2): 157- 182
- 6 Merlet J-P. Force-feedback Control of Parallel Manipulators. Proceedings of the IEEE Int Conf On Robotics and Automation, 1988, 3: 1484- 1489
- 7 Huang Z. Modeling Formulation of 6-DOF Multiloop Parallel Manipulators Part I -kinematic Influence Matrix. Proc Of 4th IFTOMM Conf, On Mechanisms and CAD, Romania, 1985
- 8 Huang Z, Wang HB. Dynamic Force Analysis of 6-DOF Parallel Multiloop Robot Manipulators. ASME Paper 86-DET-168, 1986
- 9 Gosselin CM, Angeles J. The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-degree-of-freedom Parallel Manipulator. ASME J Mech Transm Autom Des, 1989, 111(2): 202- 207
- 10 Gosselin CM, Angeles J. The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-degree-of-freedom Parallel Manipulator. ASME J Mech Transm Autom Des, 1988, 110(1): 35- 41
- 11 Lee K M, Shah D K. Kinematic Analysis of a Three-degree-of-freedom In-parallel Actuated Manipulator. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(3): 354- 360
- 12 Inoue H, *et al.* Parallel Manipulator. Proceedings of the 3rd International Symposium on Robotics Research, 1985, 321 - 327
- 13 Gosselin CM. Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators. Journal of Mechanical Design, 1990, 112: 331- 336
- 14 Merlet J-P, Gosselin CM, Moully N. Workspaces of Planar Parallel Manipulators. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(1): 7- 20
- 15 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制. 北京: 机械工业出版社, 1997

(下转第 469 页)