

文章编号: 1002-0446(2001)06-0550-04

## 基于扩散原理的冗余机器人逆运动学的学习方法\*

孟正大<sup>1</sup> 戴先中<sup>1</sup> 安藤英由树<sup>2</sup> 加藤厚生<sup>2</sup>

(1. 东南大学自动控制系 南京 210096; 2. 日本爱知工业大学)

**摘要:** 本文介绍一种基于扩散原理的机器人逆运动学学习方法. 首先运用偏微分扩散方程, 只需少量的试验运动即可求解在有限作业空间上拥有同样拓扑关系的机器人逆运动学变换. 然后应用反馈误差学习法修正学习误差. 在此基础上, 提出一种并行分布结构用于冗余机器人逆运动学计算. 分析与仿真结果表明, 该方法不仅算法简单、精度高, 而且可获得连续的逆运动学映射.

**关键词:** 冗余机器人; 扩散方程; 运动学逆变换; 学习算法

**中图分类号:** TP24 **文献标识码:** B

## APPLICATION OF DIFFUSION THEORY-BASED LEARNING METHOD IN COMPUTING INVERSE MAP OF REDUNDANT ROBOTS

MENG Zheng-da<sup>1</sup> DAI Xian-zhong<sup>1</sup> Ohideyuki Ando<sup>2</sup> A tsuo Kato<sup>2</sup>

(1. Southeast University Nanjing 210096; 2. Aichi Institute of Technology, Japan)

**Abstract** This paper introduces a diffusion theory-based learning method for the inverse map of redundant robots. First a partial differential diffusion equation is applied to solve the inverse map of robots which can keep the topology conserving performance during mapping. Then, the feedback error learning is applied to reduce the learning errors. Based on the above, a parallel decentralized computation architecture is put forward to accomplish the inverse map. The results of analysis and simulation show that a continuous inverse map can be attained with high speed and high precision by the method which needs only a few of trial motions.

**Keywords:** redundant robots, diffusion equation, inverse kinematic map, learning method

### 1 引言( Introduction)

求解机器人的逆运动学对于机器人的控制是至关重要的. 常用的求解方法分为三类, 一是以手臂的精确的几何模型为前提研究求解运动学方程的方法. 该法只能用于特定结构的机器人. 作为新一代机器人的自治型机器人, 要求能够在变化的环境中自己进行判断决策, 采取正确的行动以完成给定的目标任务. 对于这种机器人, 为了适应环境的变化或避开障碍物等, 使得它具有高度的灵活性, 在设计上往往考虑增加关节数, 使它具有像人手臂一样的关节数和灵活性, 在这种场合冗余性是十分必要的. 然而对于冗余机器人应用一般的建立机器人几何模型求解运动学方程的方法是十分困难的. 第二类方法通

常在假设机器人的雅可比矩阵已知的前提下, 利用其逆矩阵来求解逆运动学. 对于冗余机器人, 往往可用雅可比矩阵的转置或广义逆矩阵或通过增加约束条件使雅可比矩阵变为方阵后再来计算. 但这类算法存在的问题是: ①解法的前提是已知机器人的雅可比阵, 这对较复杂的机器人是难以做到的; ②雅可比阵及其广义逆需要进行数值计算, 而数值计算可能出现不收敛<sup>[1]</sup>. 为了求解冗余机器人的逆运动学, 出现了第三类求解方法, 即智能求解方法. 典型的有基于学习的算法和神经网络算法. 神经网络方法存在收敛性问题, 局部最优问题. 1989 年以来, 德国的 Walter 和 Ritter 等人<sup>[2]</sup>将芬兰神经网络理论专家 Kohonen 于 1982 年提出的拓扑守恒的自组织学习

\* 基金项目: 本课题由东南大学科学基金资助.

收稿日期: 2001-03-06

算法推广到机器人的逆运动学变换求解. 这种方法不需要事先知道任何有关机器人的运动关系. 它首先在作业空间上随机地提出一系列位置目标, 然后使用机器人的视觉测出目标位置和当前实际位置的差距. 在此基础上, 让机器人执行试验运动, 然后用自学习算法算出与作业空间保持同样拓扑关系的机器人的相应关节角度. 该方法的缺点在于它需要机器人在学习过程中执行大量的试验运动. 在还没有完全组织好逆运动学变换时就进行试验运动可能会给机器人带来很大危险.

Luo 和 Ito<sup>[3]</sup>1996 年综合分析了有教师学习和自学习各方式的利弊后, 提出了基于扩散方程的学习算法用于组织机器人的手-眼协调. 该法<sup>[1]</sup>首先使用有教师学习法来求得从机器人关节空间到作业空间的运动学关系. 然后运用偏微分扩散方程, 在不要机器人试验运动的条件下来求得在有限作业空间上具有同样拓扑关系的机器人的逆运动学变换. 但该法学得的结果经常会出现不连续的映射.

本文针对冗余机器人(对一般机器人亦适用)的逆运动学求解问题, 对基于扩散原理的方法进行了深入分析研究并对算法加以改进, 提出了新的误差修正算法, 克服了不连续问题, 并且提出了一种并行分布结构用于冗余机器人逆运动学计算.

与一般的神经网络学习方法相比, 本方法在学习各点的值时只需其相邻结点的信息而不必考虑整个空间内的各结点信息, 大大简化了计算. 为了用上上述并行分布式方法计算实际冗余机器人的高精度的非线性运动学逆映射, 本文还研究了与之相应的计算机结构.

本文将首先介绍基于扩散方程的学习算法, 然后再介绍并行分布式计算方法及相应的计算机结构. 最后, 通过仿真探讨并证明了其有效性.

## 2 基本原理 (Basic principle)

本节首先将讨论冗余机器人逆运动学求解的目标, 由此给出相应的目标函数. 再由目标函数导出基于扩散方程的求解运动学逆变换的计算公式并加以讨论.

### 2.1 目标函数

作为求解目标, 不仅要求该算法对任一给定直角空间的末端位置能得到相应的关节角, 而且要求在机器人的整个工作空间内该运动学逆变换在任一点上都是连续的, 也就是具有拓扑守恒性质. 为了实现这一目标, 考虑如下的目标函数

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \int_s \{ \alpha(t) t_r \left( \frac{\partial \theta^T}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \beta(t) \| A(x - f(\theta)) \|^2 \} dx \quad (1)$$

其中  $S$  表示机器人的工作空间,  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  分别为加权因子, 反映了第一、二项的权重, 后面将会提到  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  的选取问题.  $x$  为机器人末端直角坐标,  $\theta$  为相应的关节角,  $f(\theta)$  为运动学正变换,  $A$  为雅可比矩阵的逆,  $t_r(\cdot)$  为矩阵的迹. 式(1)右端第一项反映  $x \rightarrow \theta$  映射的连续性, 而第二项则反映了逆变换的计算误差, 从而目标函数  $V(\theta)$  完全包含了上述两个要求. 理想的运动学逆变换应使  $V(\theta)$  最小.

### 2.2 求解运动学逆变换的偏微分方程

下面将导出使  $V(\theta)$  趋向最小的运动学逆变换的优化解. 为此引入变分方法, 设  $\delta\theta$  为  $\theta$  的变分,  $\epsilon$  为正的无穷小量, 则对于微小增量  $\epsilon\delta\theta$ , 在略去高阶微量后可得到相应的运动学正解为

$$f(\theta + \epsilon\delta\theta) \approx f(\theta) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \theta} \delta\theta = f(\theta) + \epsilon J \delta\theta \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 可得

$$\begin{aligned} V(\theta + \epsilon\delta\theta) &= \frac{1}{2} \alpha(t) \int_s t_r \left\{ \left( \frac{\partial(\theta + \epsilon\delta\theta)}{\partial x} \right)^T \frac{\partial(\theta + \epsilon\delta\theta)}{\partial x} \right\} dx \\ &+ \frac{1}{2} \beta(t) \int_s \| A(x - f(\theta + \epsilon\delta\theta)) \|^2 dx \\ &\approx \frac{1}{2} \alpha(t) \int_s t_r \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^T + \epsilon \left( \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right)^T \right] \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right) \right\} dx \\ &+ \frac{1}{2} \beta(t) \int_s \| A(x - f(\theta) - \epsilon J \delta\theta) \|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \alpha(t) \int_s \{ t_r \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + 2\epsilon t_r \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right] + \epsilon^2 t_r \left[ \left( \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right] \} dx \\ &+ \frac{1}{2} \beta(t) \int_s \left( \| A(x - f(\theta)) \|^2 - 2\epsilon \langle A(x - f(\theta)), \delta\theta \rangle + \epsilon^2 \| \delta\theta \|^2 \right) dx \quad (3) \end{aligned}$$

式中  $\langle \cdot \rangle$  为求两矢量内积的符号. 假设在机器人工作空间的边界无关节误差, 即满足边界条件  $\delta\theta = 0$ , 则可以证明:

$$\int_s t_r \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right] dx = - \int_s \langle \nabla^2 \theta, \delta\theta \rangle dx \quad (4)$$

式中  $\nabla^2 \theta$  表示  $\text{div}(\text{grad}(\theta))$ , 其中  $\text{div}(\cdot)$  表示散度,  $\text{grad}(\cdot)$  表示梯度. 将上式代入式(3), 得

$$\begin{aligned} V(\theta + \epsilon\delta\theta) &= V(\theta) - \int_s \left[ \alpha(t) \langle \nabla^2 \theta, \delta\theta \rangle + \beta(t) \langle A(x - f(\theta)), \delta\theta \rangle \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_s \left\{ \alpha(t) t_r \left[ \left( \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right] + \beta(t) \| \delta\theta \|^2 \right\} dx \quad (5) \end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\theta)}{\partial \epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(\theta + \epsilon \delta \theta) - V(\theta)}{\epsilon} \\ &= - \int_S \langle \alpha(t) \nabla^2 \theta + \beta(t) A(x - f(\theta)), \delta \theta \rangle dx \end{aligned} \quad (6)$$

由上式可见, 为了使目标函数趋于最小, 可取

$$\delta \theta = \alpha(t) \nabla^2 \theta + \beta(t) A(x - f(\theta)) \quad (7)$$

这就是求取运动学逆变换的优化解, 下面以此偏微分方程式为基础, 讨论相应算法.

### 2.3 扩散方程式

式(7)右端第一项即为扩散项, 第二项为误差修正项. 扩散方程式由下式给出

$$\nabla_x^2 \theta = 0 \quad (8)$$

其中,  $\theta$  为机器人的关节角,  $x$  表示机器人的作业空间. 首先将机器人连续的工作空间离散化, 从作业空间中只需选择少量的点作为样本点, 通过相应的试验运动获得样本点的关节角, 再以各样本点为中心, 运用扩散方程向四周扩散, 即可得到连续分布的空间构形和各结点的关节值. 式(8)可改写成如下的离散形式

$$\theta_{i,j}^{t+1} = \frac{1}{4} \{ \theta_{i-1,j}^t + \theta_{i+1,j}^t + \theta_{i,j-1}^t + \theta_{i,j+1}^t \} \quad (9)$$

其中,  $t$  表示学习的步数,  $i, j$  表示某个方格在作业空间中的位置. 然而, 上述的扩散过程只不过是线性的空间插补而已, 即使  $t$  趋于无穷大, 只能接近目标值而不能达到目标值, 必须要进行下述的误差修正.

### 2.4 学习计算公式

基于式(9)表示的扩散方程, 式(7)可改写为如下的学习计算公式

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{t+1} &= \frac{\alpha(t+1)}{4} \{ \theta_{i-1,j}^t + \theta_{i+1,j}^t + \theta_{i,j-1}^t + \theta_{i,j+1}^t \} + \\ &\quad \beta(t+1) A_{i,j}^t [x_{i,j} - f(\theta_{i,j}^t)] \end{aligned} \quad (10)$$

式中右端第一项即为扩散项, 第二项即为误差修正项.  $\alpha(t)$  可取为时间  $t$  的 S 函数或双曲正切函数, 而  $\beta(t) = 1 - \alpha(t)$ .  $t = 0$  时  $\alpha(0) = 1, \beta(0) = 0$  而  $t \rightarrow \infty$  时,  $\alpha(\infty) = 0, \beta(\infty) = 1$ , 设  $\alpha(t) = \frac{1}{2}$  时  $t = t_b$ , 则当  $t < t_b$  时学习过程表现为扩散过程, 而当  $t > t_b$  时学习过程表现为误差修正过程.

### 2.5 误差修正

在误差修正项中,  $A_{i,j}^t$  在学习过程中应随  $\theta_{i,j}^t$  的变化而变化. 仿真表明,  $A_{i,j}^t$  的不同学习计算方法对运动学逆变换的连续性有很大影响. 本文提出如下的

方法

选取如下的目标函数

$$E_{i,j} = \frac{1}{2} \| \Delta \theta_{i,j}^t - A_{i,j}^t \Delta x_{i,j}^t \|^2 \quad (11)$$

其中

$$\Delta \theta_{i,j}^t = \theta_{i,j}^t - \theta_{i,j}^{t-1}$$

$$\Delta x_{i,j}^t = x_{i,j}^t - x_{i,j}^{t-1}$$

则有

$$A_{i,j}^{t+1} = A_{i,j}^t + a_{i,j}^t r_{i,j}^t \quad (12)$$

其中  $r_{i,j}^t$  为  $E_{i,j}$  在  $A_{i,j}^t$  处的负梯度方向单位矢量,  $a_{i,j}$  为步长因子. 显然有

$$r_{i,j}^t = - \frac{\partial E_{i,j}}{\partial A_{i,j}^t} = (\Delta \theta_{i,j}^t - A_{i,j}^t \Delta x_{i,j}^t) (\Delta x_{i,j}^t)^T \quad (13)$$

故

$$A_{i,j}^{t+1} = A_{i,j}^t + a_{i,j}^t (\Delta \theta_{i,j}^t - A_{i,j}^t \Delta x_{i,j}^t) (\Delta x_{i,j}^t)^T \quad (14)$$

可用黄金分割法求最优步长因子  $a_{i,j}^t$ . 为简化计算, 此处用外推法确定  $A_{i,j}^{t+1}$  的优化区间, 用 0.618 法进行 5 次迭代计算, 将极小点所在区间长度缩小到原优化区间的十分之一, 并取该区间中点作为  $A_{i,j}^{t+1}$  的近似优化解. 仿真表明, 本方法在保证较高精度的同时也保证了运动学逆变换的连续性.

### 2.6 学习计算步骤

为方便起见, 本文以图 1 所示的 3 自由度操作手为例进行讨论, 其运动学方程如下:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ &\quad l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \\ &\quad l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 关节角矢量  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \in R^3$ , 末端位置矢量  $x = [x_1, x_2]^T \in R^2$ , 上式可写成下列的非线性运动学关系

$$x = f(\theta) \quad (16)$$

由于  $3 > 2$ , 故该操纵手具有冗余性. 设工作空间为一方形, 根据计算精度要求将它分成若干个等间隔的小方格, 此处为  $6 \times 6$  个方格(如图 1 所示). 现将组合方法归纳如下:

(1) 给出在工作空间四个顶点  $(i_0, j_0), (i_0, j_6), (i_6, j_0), (i_6, j_6)$ , 的关节角  $\theta$  的教师信息.

(2) 按式(10)进行学习计算, 由于  $t < t_b, \alpha \approx 1, \beta \approx 0$ , 故此时的实际过程是按扩散方程式(9), 以教师信息为起点沿时间轴将关节角向四周扩散. 随着各结点关节角的变化, 根据上小节所述方法更新雅可比矩阵的逆  $A_{i,j}$ , 反复进行本操作直至  $t \approx t_b$ , 此时

关节角随时间几乎不再变化. 此阶段为教师信息扩散阶段.

当  $t > t_b$  时,  $\alpha \approx 0, \alpha \approx 1$ , 此时学习过程主要处于误差修正阶段. 重复本操作直至各结点的关节角度精度达到给定指标为止.

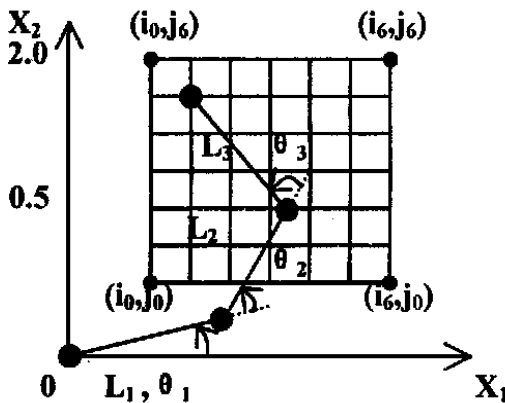


图 1 三自由度平面操作手及其工作空间

Fig. 1 A 3-degree of freedom scale manipulator and its working space

上述方法具有以下特点:

- (1) 据扩散方程式, 只需相邻结点的信息即可学习各结点的关节角度.
- (2) 在教师信息扩散的同时, 学习雅可比矩阵的逆  $A_{i,j}$ .
- (3) 在获得较高的学习精度的同时保持了运动学逆变换的连续性.

### 3 并行分布式计算结构 (Calculated architecture with parallel distribution)

对于上一节所讨论的运动学逆映射学习算法要得到高精度高密度的映射就需要花费很长的计算时间, 或者需要较多的处理器. 因此, 为了能够进行高速处理, 下面讨论相应的并行分布式算法和有关的并行分布式计算机系统结构.

#### 3.1 并行分布式结构的选择

由上一节介绍的逆运动学映射学习算法的扩散方程可知, 离散生成映射上各结点的关节角度时只需该结点的相邻结点的关节角度信息. 由此可见, 与多个处理器访问同一个存储器区域相比, 各个处理器频繁存取各自特定的存储器区域的情形是主要的, 因此本文采用分布式存储器类型的硬件结构.

#### 3.2 高密度映射的并行分布式计算

下面探讨应用分布式存储器型的硬件结构进行

高密度逆运动学映射的方法.

这里首先对学习区域进行分割, 对每个区域的多个结点用同一个处理器进行学习计算, 而区域四周结点的关节角由主处理器学习并作为该区域的教师信号通过通信送入该区域的处理器. 这样, 在计算本区域内的各结点时处理器只许访问本地的存储器, 只有计算外围的结点时才需要相互间的通信, 这种方法充分利用了分布式存储器的优点. 图 2 表示了扩散式学习过程, 开始时学习区域顶点的关节角, 然后将所得结果作为新的教师信号生成各区域内的各结点关节角.

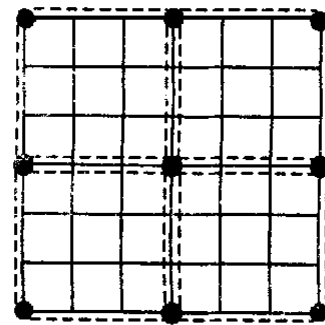


图 2 扩散式学习过程

Fig. 2 Diffusion-based learning process

这种方法用较少的处理器就可快速有效地进行高密度的逆运动学计算, 处理器间的通信时间也大大缩短.

## 4 仿真结果及其分析 (Simulation results and its analyzing)

以图 1 所示的平面 3 自由度操作手为对象, 对本文所提方案进行了模拟仿真. 各杆件的长度均为 1m, 手臂的工作空间设为  $0.5m \leq x_1 \leq 2m, 0.5m \leq x_2 \leq 2m$ . 此处取工作空间的结点数为  $41 \times 41$ , 相应的结点距离为 37.5mm. 利用学习所得结果控制机器人末端在该平面工作空间上的以圆心为  $(x_{10}, x_{20}) = (1.25m, 1.25m)$ , 半径为 0.6m 的圆形轨道上运动. 考察两种情形: 第一种为不分割即  $41 \times 41$  个结点作为整体区域进行计算的情形; 第二种为将工作空间分割成  $4 \times 4 = 16$  个区域, 各区域顶点构成  $5 \times 5$  个结点阵列, 首先计算该结点阵列的关节角, 其结果作为教师信号再计算各区域的  $11 \times 11$  个结点阵列, 最后将各区域的结果组合在一起构成全空间的运动学逆映射. 通过对两者的比较可知, 两者的运行轨迹几乎一样.

(下转第 574 页)