第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0963-04 **文献标识码**: **A**

一个嵌入引理及其应用

王文智[1]，邱继征[2]
(1. 深圳职业技术学院数学室，广东 深圳 518055; 2. 浙江工业大学理学院，浙江 杭州 310032)
(E-mail: wang_w_zh@szpt.net)

摘 要: 本文讨论单位球上涉临界 Sobolev 指标的椭圆方程正解问题．通过建立第一 Sobolev 空间上对称函数到加权 L^p 空间的嵌入定理，给出问题的径向及非径向解.

关键词: 椭圆方程；临界指标；径向；非径向.
MSC(2000): 35J20; 35J60
中图分类: O175.25

1 引言与引理

设 Ω 是 $n\geq 3$ 维欧氏空间的单位球．考虑下列边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u=h(|x|)u^{\tau}+\lambda u,\ x\in\Omega; \\ u>0,\ x\in\Omega;\ \ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 h 是一个非负连续函数， λ 是一实参数， $\tau=(n+2)/(n-2)$.

由于 $p:=\tau+1$ 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega)\to L^p(\Omega)$ 的临界指标，这个嵌入不是紧的，因而通常变分法不适用．为了克服这一困难，我们考虑径向对称函数空间之间的嵌入．记

$$\mathring{H}_s^1(\Omega)=\{u\in H_0^1(\Omega):\ u(x)=u(|x|),\ \forall x\in\Omega\}.$$

设 h 是 $\overline{\Omega}$ 的非负连续函数，用 $L_h^p(\Omega)$ 表示一个 Banach 空间，其范数为

$$\|u\|_{p,\,h,\,\Omega}=\Big(\int_{\Omega}h|u|^p\Big)^{1/p}.$$

本文的一个基本结论是：如果 h 是径向对称的连续函数，满足 $h(0)=0$, 则嵌入 $\mathring{H}_s^1(\Omega)\to L_h^p(\Omega)$ 是紧的 (本文始终设 $p=2n/(n-2)$).

当 h 是 Hölder 连续函数时， Ni[6] 证明 (1.1) 式有径向对称解．当 h 只是连续时 Ni[6] 的方法不再适用．我们不仅证明问题 (1.1) 有径向解，还证明有非径向解．据作者所知，基于空间理论讨论问题 (1.1), 本文是首次．其次，我们的方法可讨论更广泛的问题.

首先引进下列引理

引理 1.1 (Lions 引理) 设有三个 Banach 空间 X_1, X_2, X_3 满足嵌入关系 $X_1\subset X_2\subset X_3$, 并且嵌入 $X_1\to X_3$ 是紧的．则嵌入 $X_1\to X_2$ 是紧的当且仅当对于任给 $\varepsilon>0$ 存在 $K(\varepsilon)>0$, 使得

$$\|x\|_{X_2}\leq\varepsilon\|x\|_{X_1}+K(\varepsilon)\|x\|_{X_3},\quad \forall x\in X_1.$$

收稿日期: 2005-04-08; **接受日期**: 2005-07-28

证明 *充分性*. 设 $\{x_n\}$ 是 X_1 中的有界列, $\|x_n\| \leq M$, 我们要证明它有子列在 X_2 中收敛. 任给 $\varepsilon > 0$, 根据引理的条件, 存在 $K = K(\varepsilon) > 0$, 使得引理中的不等式成立. 由于嵌入 $X_1 \to X_3$ 是紧的, 故存在 $\{x_n\}$ 的子列, 仍记为 $\{x_n\}$, 在 X_3 中收敛. 于是对于 $\varepsilon' = \varepsilon/K > 0$, 存在 $N > 0$, 使当 $m, n > N$ 时, $\|x_m - x_n\|_{X_3} < \varepsilon/K$. 这样, 当 $m, n > N$ 时便有

$$\|x_m - x_n\|_{X_2} \leq \varepsilon\|x_m - x_n\|_{X_1} + K\|x_m - x_n\|_{X_3} \leq (2M+1)\varepsilon.$$

这说明子列 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X_2 中的 Cauchy 列, 因而是收敛列.

必要性. 因嵌入 $X_1 \to X_2$ 是紧的, 嵌入关系 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ 隐含嵌入 $X_1 \to X_3$ 的紧致性. 以下证明与 Berger[1] 中的方法完全相同, 故略.

注记 1 以上引理是根据 Lions 引理改写的 (见文献 [1] 中 1.3 节), 仍称之为 Lions 引理. 原文只有紧嵌入的必要条件. 添加嵌入 $X_1 \to X_3$ 的紧致性条件后, 必要条件也是充分条件.

下列引理受 Hebey 及 Vaugon[4] 启发而来.

引理 1.2 设 Ω 是 $n \geq 3$ 维单位球, h 是其上径向对称的非负连续函数, 满足 $h(0) = 0$. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个球心在原点的球 $B_\varepsilon \subset \Omega$, 使得

$$\|u\|_{p,\,h,\,B_\varepsilon} \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{2,\,\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathring{H}^1_s(\Omega),$$

则嵌入 $\mathring{H}^1_s(\Omega) \to L^p_h(\Omega)$ 是紧的.

证明 不妨设 $r = 0$ 是 h 的孤立零点. 不然的话用 $h_1(r) = r + h(r)$ 取代并证明相应结论. 这是因为不等式 $h(r) \leq h_1(r)$ 隐含嵌入关系 $L^p_{h_1}(\Omega) \subset L^p_h(\Omega)$.

任给 $\varepsilon > 0$, 根据引理的条件, 存在一个球心在原点的球 $B_\varepsilon \subset \Omega$, 使得

$$\|u\|_{p,\,h,\,B_\varepsilon} \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{2,\,\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathring{H}^1_s(\Omega). \tag{1.2}$$

设 B_ε 的半径为 2η, 记 $A = \{x \in \Omega : \eta \leq |x| \leq 1\}$ 引进非负截断函数 $\mu \in \mathbf{C}^1[0,\,1]$ 满足

$$\begin{cases} \mu(r) = 0, & 0 \leq r \leq \eta; \\ \mu(r) = 1, & 2\eta \leq r \leq 1, \end{cases}$$

且 $\mu(r) \leq 1$, $|\mu'(r)| \leq 2/\eta$. 注意 $\mu u \in \mathring{H}^1_s(A)$, $(1-\mu)u \in \mathring{H}^1_s(B_\varepsilon)$.

在环域 A 上, 嵌入 $\mathring{H}^1_s(A) \to L^p(A) \subset L^p_h(A) \subset L^2_h(A)$ 是紧的 [5]. 根据 Lions 引理, 对所给 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_1(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\|\mu u\|_{p,\,h,\,A} \leq \varepsilon\|\nabla \mu u\|_{2,\,A} + K_1(\varepsilon)\|u\|_{2,\,h,\,A}. \tag{1.3}$$

注意到 $\nabla\mu u = \mu\nabla u + u\nabla\mu$, $|\nabla\mu| \leq 2/\eta$, 有

$$\|\nabla\mu u\|_{2,\,A} \leq \|\nabla u\|_{2,\,A} + (2/\eta)\|u\|_{2,\,A}. \tag{1.4}$$

若记 $m_\eta = \inf\{\, h(x) : x \in \bar{A}\,\}$, 则

$$\int_A |u|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{1}{m_\eta}\int_A h|u|^2 \mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

根据不等式 (1.3), (1.4) 及 (1.5) 得

$$\|\mu u\|_{p,\,h,\,A} \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{2,\,A} + K_2(\varepsilon)\|u\|_{2,\,h,\,A}, \tag{1.6}$$

其中， $K_2(\varepsilon)=K_1(\varepsilon)+2/\eta\sqrt{m_\eta}$.

现在，我们写 $u=\mu u+(1-\mu)u$, 应用 Minkowski 不等式，得

$$\|u\|_{p,h,\Omega}\le\|\mu u\|_{p,h,\Omega}+\|(1-\mu)u\|_{p,h,\Omega}.$$

根据 $\mu(x)$ 的取法，上式变为

$$\|u\|_{p,h,\Omega}\le\|u\|_{p,h,A}+\|u\|_{p,h,B_\varepsilon},\tag{1.7}$$

取 $K(\varepsilon)=K_2(\varepsilon)$, 由不等式 (1.2), (1.6) 及 (1.7) 推得

$$\|u\|_{p,h,\Omega}\le 2\varepsilon\|\nabla u\|_{2,\Omega}+K(\varepsilon)\|u\|_{2,h,\Omega}.$$

根据 Lions 引理，嵌入 $\mathring{H}^1_s(\Omega)\to L^p_h(\Omega)$ 是紧的.

2 主要结论

定理 2.1 设 Ω 是 $n\ge 3$ 维单位球， h 是其上径向对称的非负连续函数. 如果 $h(0)=0$, 则嵌入 $\mathring{H}^1_s(\Omega)\to L^p_h(\Omega)$ 对 $p=2n/(n-2)$ 是紧致的.

证明 给定 $\varepsilon>0$, 取球心在原点，半径充分小的球 B_ε, 使当 $x\in B_\varepsilon$ 时， $h(x)\le\varepsilon^p$. 此时有

$$\Big(\int_{B_\varepsilon}h|u|^p\Big)^{1/p}\le\varepsilon\Big(\int_{B_\varepsilon}|u|^p\Big)^{1/p},\quad\forall u\in\mathring{H}^1_s(\Omega).\tag{2.1}$$

应用 Sobolev 嵌入定理，得

$$\Big(\int_{B_\varepsilon}|u|^p\Big)^{1/p}\le\Big(\int_\Omega|u|^p\Big)^{1/p}\le K_n\Big(\int_\Omega|\nabla u|^2\Big)^{1/2},\tag{2.2}$$

其中 K_n 是只依赖于 n 的常数. 由 (2.1) 及 (2.2) 式得

$$\|u\|_{p,h,B_\varepsilon}\le K_n\varepsilon\|\nabla u\|_{2,\Omega},\quad\forall\, u\in\mathring{H}^1_s(\Omega).$$

应用引理 1.2 便得结论.

记 λ_1 为 $H^1_0(\Omega)$ 上 Laplace 算子的第一特征值，我们有下列定理

定理 2.2 若 $h\not\equiv 0$ 满足定理 2.1 的条件，且 $\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$, 则问题 (1.1) 至少有一个径向对称解.

证明 记

$$\Sigma=\{u\in\mathring{H}^1_s(\Omega):\ \|u\|_{p,h}=1\},$$

$$S_\lambda=\inf_\Sigma(\|\nabla u\|_2^2-\lambda\|u\|_2^2).$$

我们知道，嵌入 $\mathring{H}^1_s(\Omega)\to L^p_h(\Omega)$ 是紧的，因而上述 inf 可为某一非负函数 $v=v(\lambda)$ 取到，并获得一个 Lagrange 乘子 $\mu=S_\lambda$, 满足

$$-\Delta v=\mu h(x)v^\tau+\lambda v.$$

当 $\lambda < \lambda_1$ 时, $\mu > 0$. 根据极大值原理, 在 Ω 上 v 恒正. 拉伸 μ, 我们得到问题 (1.1) 的解. 这解属于 $H_0^1(\Omega)\bigcap L^\infty(\Omega)$[2].

下面考虑多解性. 为此研究另一种 inf. 记

$$\Sigma^* = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{p,h} = 1\},$$

$$S_\lambda^* = \inf_{\Sigma^*}(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda u\|_2^2).$$

首先, $S_\lambda^* \le S_\lambda$. 当 $\lambda \le 0$ 且 h 是正常数时, 对于所有有界区域, S_λ^* 都不能被达到 [2]. 因而, 一个简单的论证表明, 当 h 为一般非负函数时, S_λ^* 不能取到. 这样, 当 $\lambda \le 0$ 时, $S_\lambda^* < S_\lambda$. 根据连续性, 对于充分小的 $\lambda > 0$ 有 $S_\lambda^* < S_\lambda$.

另一方面, 假定 $h = h(|x|)$ 满足下列附加条件:

$$\begin{cases} h \text{ 充分光滑, 在 } (0,1) \text{ 内的某点 } r_0 \text{ 达到最大值 ;} \\ h'(r_0) = 0,\ n = 4;\ \ h'(r_0) = h''(r_0) = 0,\ n \ge 5, \end{cases} \tag{H}$$

则根据 Escobar[3] 的一个结果, 当 $\lambda \in (0, \lambda_1)$ 时, S_λ^* 可被某个 $v^* = v^*(\lambda)$ 达到. 对于充分小的 $\lambda > 0$, $v^*(\lambda) \ne v(\lambda)$ (否则 $S_\lambda^* = S_\lambda$). $v^*(\lambda)$ 不是径向对称的, 否则 $S_\lambda^* = S_\lambda$. 拉伸 S_λ^*, 便得到非径向解.

综上所述, 我们有下面定理

定理 2.3 在定理 2.1 的条件下, 假设 Ω 是 $n \ge 4$ 维单位球. 如果 $h \not\equiv 0$ 除满足定理 2.1 的条件外还满足条件 (H), 则对充分小的 $\lambda > 0$, 问题 (1.1) 既有径向对称解, 也有非径向对称解.

参考文献:

[1] BERGER M S. *Nonlinearity and Functional Analysis* [M]. Academic Press, New York-London, 1977.

[2] BRÉZIS H, NIRENBERG L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents* [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1983, **36**(4): 437–477.

[3] ESCOBAR J F. *Positive solutions for some semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents* [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1987, **40**(5): 623–657.

[4] HEBEY E, VAUGON M. *Sobolev spaces in the presence of symmetries* [J]. J. Math. Pures Appl., 1997, **76**(10): 859–881.

[5] LIONS P L. *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev* [J]. J. Funct. Anal., 1982, **49**(3): 315–334. (in France)

[6] NI Wei-ming. *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1982, **31**(6): 801–807.

An Embedding Lemma and Its Applications

WANG Wen-zhi[1], *DI Ji-zheng*[2]

(1. Mathematics Laboratory, Shenzhen Polytechnic, Guangdong 518055, China;
2. Department Mathematics, Zhejiang Industrial University, Zhejiang 310032)

Abstract: The article discusses an elliptic problem on a ball involving critical nonlinearities. Radial and nonradial solutions are given by establishing embedding theorems for symmetric functions of Sobolev space into weighted L^p spaces.

Key words: elliptic equation; critical exponent; radial; nonradial.