

文章编号: 1002-0446(2000)02-0148-06

6-6 SPS 6 自由度 Stewart 并行机构 位姿正解单解存在条件*

吕崇耀

(华中理工大学机械科学与工程学院 武汉 430074)

摘要: 在获得了 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解的基础上, 进一步提出了 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解存在的条件. 数字模拟结果显示了该条件的适用性.

关键词: 6 自由度 Stewart 并行机构; 运动学位姿正解

中图分类号: TP24

文献标识码: A

1 6-6 和虚拟 6-3 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解多解^[1]

在获得了 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解的基础上^[1], 本文进一步研究了该单解存在的条件. 为了便于讨论, 引用文献[1]中上平台上 3 个铰接点(1, 2, 5)的 9 个坐标、6 个自由度(3 自由度平动: x, y, z ; 3 自由度转动: φ, θ, φ)和几个主要参量如下(其余符号见[1]):

$$X_{P1} = \frac{S_3^2 - L_1^2 - 2Y_{B1-6}Y_{P1}}{2X_{B1-6}} \quad (1)$$

$$Y_{P1} = \frac{X_{B1-6}(R_b^2 + S_0^2) + X_{B6}L_1^2 - X_{B1}S_3^2}{2(X_{B1}Y_{B6} - X_{B6}Y_{B1})} \quad (2)$$

$$Z_{P1} = \frac{S_0^2 - X_{P1}^2 - Y_{P1}^2}{2Z_{P1}} \quad (3)$$

$$X_{P2} = \frac{S_1^2 - L_2^2 - 2Y_{B2-3}Y_{P2}}{2X_{B2-3}} \quad (4)$$

$$Y_{P2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

$$Z_{P2} = \frac{\{L_2^2 - T_1^2 + S_0^2 - R_b^2 + (S_1^2 - L_2^2) \frac{X_{B2-3} - X_{P1}}{X_{B2-3}} + 2(Y_{B2-3} - Y_{P1}) - (X_{B2-3} - X_{P1}) \frac{Y_{B2-3}}{X_{B2-3}}\} Y_{P2}}{2Z_{P1}} \quad (6)$$

$$X_{P5} = \frac{L_5^2 - S_2^2 - 2Y_{B4-5}Y_{P5}}{2X_{B4-5}} \quad (7)$$

$$Y_{P5} = \frac{1}{a_1} \left| c_1 - b_1 \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right| \quad (8)$$

$$Z_{P5} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (9)$$

$$\varphi = \arctan \left| \frac{\xi_3}{\xi_1} \right| \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad (10)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59675072, 59775016, 69775021, 59990470)

收稿日期: 1999-03-23

$$\theta = \begin{cases} \arctan \left| \frac{\xi_5^2}{\xi_1^2 + \xi_3^2} \right| & \xi_5 < 0 \\ -\arctan \left| \frac{\xi_5^2}{\xi_1^2 + \xi_3^2} \right| & \xi_5 > 0 \end{cases} \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (11)$$

$$\varphi = \arctan \left| -\frac{\xi_4(\sin\varphi - \cos\vartheta)}{(\xi_2 + \xi_4)\cos\theta - \xi_6(\sin\varphi + \cos\vartheta)\sin\theta} \right| \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad (12)$$

$$x = -\frac{1}{3} \left| \left| \sum_3^1 x_{oj} \right| \cos\vartheta \cos\theta + \left| \sum_3^1 y_{oj} \right| (\cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi - \sin\vartheta \cos\theta) - \sum_3^1 X_{pj} \right| \quad (13)$$

$$y = -\frac{1}{3} \left| \left| \sum_3^1 x_{oj} \right| \sin\vartheta \cos\theta + \left| \sum_3^1 y_{oj} \right| (\cos\vartheta \cos\theta + \sin\vartheta \sin\theta \sin\varphi) - \sum_3^1 Y_{pj} \right| \quad (14)$$

$$z = -\frac{1}{3} \left| -\left| \sum_3^1 x_{oj} \right| \sin\theta + \left| \sum_3^1 y_{oj} \right| \cos\theta \sin\varphi - \sum_3^1 Z_{pj} \right| \quad (15)$$

$$a = 1 + \frac{Y_{B2-3}^2}{X_{B2-3}^2} + \left| \frac{(Y_{B2} - Y_{P1}) - (X_{B2} - X_{P1}) \frac{Y_{B2-3}}{X_{B2-3}}}{Z_{P1}} \right|^2 \quad (16)$$

$$b = \frac{Y_{B2-3}}{X_{B2-3}} (2X_{B3}X_{B2-3} + L_2^2 - S_1^2) - 2Y_{B3} + \frac{1}{Z_{P1}} \left| (Y_{B2} - Y_{P1}) - (X_{B2} - X_{P1}) \frac{Y_{B2-3}}{X_{B2-3}} \right| \left| L_2^2 - T_1^2 + S_0^2 - R_b^2 + (S_1^2 - L_2^2) \frac{X_{B2} - X_{P1}}{X_{B2-3}} \right| \quad (17)$$

$$c = \left| \frac{2X_{B3}X_{B2-3} + L_2^2 - S_1^2}{2X_{B2-3}} \right|^2 + Y_{B3}^2 + \left| \frac{L_2^2 - T_1^2 + S_0^2 - R_b^2 + (S_1^2 - L_2^2) \frac{X_{B2} - X_{P1}}{X_{B2-3}}}{2Z_{P1}} \right| - S_1^2 \quad (18)$$

不难看出, 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解是多解. 虽然可精确地求解全部解, 但仍难于在给定该机构一组杆长前提下, 唯一地求解平台在空间的真实位姿.

2 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解及其存在条件

虽然, 从理论上已经证明, 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解个数的上限是 40. 工程实际中, 在有限工作空间里, 6 自由度 Stewart 并行机构又是可控的. 无论从数学上还是从经典控制论的角度谈, 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解肯定存在. 只不过迄今为止, 用于该机构的数学模型无法精确地描述它而已. 在分析了该平台上 6 铰接点中的 3 个在惯性坐标系 $OXYZ$ 中的坐标后, 本文从惯性坐标的合理设置上论证了以上的猜想.

2.1 获得位姿正解单解条件的假想

仔细考察第 1 铰接点坐标方程式(1)~(3), 第 2 铰接点坐标方程式(4)~(6)以及第 5 铰接点坐标方程式(7)~(9), 不难看出:

- (1) 第 1 铰接点坐标唯一确定;
- (2) 若能唯一地确定式(5)的值, 便可唯一地确定第 2 铰接点坐标;
- (3) 当唯一地确定了第 2 铰接点坐标时, 第 5 铰接点坐标唯一确定;
- (4) 最终, 以上 3 铰接点坐标唯一地确定了该机构的位姿正解单解.

从而有必要详细讨论式(5)及其伴随式(16)~(18). 并令 f 为一含有 5 个独立变量的多维曲面. 该曲面同时由 3 个各含 3 个独立变量的多维曲面式(16)~(18)组合而成.

$$f = b^2 - 4ac$$

从式(5)可推得式(5a), (5b)和(5c)及其存在条件如下:

$$Y_{P2} = \begin{cases} -\frac{b}{2a} & f = 0 & (5a) \\ -\frac{b \pm \sqrt{f}}{2a} & f = 0 & (5b) \\ \left. \begin{array}{l} -\frac{b + \sqrt{f}}{2a} > 0 \\ -\frac{b - \sqrt{f}}{2a} < 0 \end{array} \right\} + \sqrt{f} > 0 & f > b^2 & (5c) \\ \left. \begin{array}{l} -\frac{b + \sqrt{f}}{2a} < 0 \\ -\frac{b - \sqrt{f}}{2a} > 0 \end{array} \right\} - \sqrt{f} < 0 \end{cases}$$

2.2 位姿正解单解条件

从第1条件($f = 0$)可获得式(5)的精确单解. 从第2条件($f > 0$)可获得式(5)的双解. 这正是导致位姿正解多解的直接原因. 显然, 若有条件确定第2条件($f > 0$)中根号前的符号, 位姿正解多解问题便迎刃而解. 因此, 本节的主要任务是讨论如何确定第2条件($f > 0$)中根号前的符号.

欲研究第2条件($f > 0$)中根号前的符号, 必须首先观察图1. 显然, 图1中第3条件($f > b$)首先将第2条件($f > 0$)所定义的整个区域一分为二. 其次, 第1条件($f = 0$ 含 $b = 0$)将第3条件($f > b$)所定义的整个区域一分为二. 同时在扣除由第3条件($f > b$)所定义的整个区域外, 第1条件($f = 0$ 含 $b = 0$)也将第2条件($f > 0$)所定义的剩余区域一分为二.

以上各区域内, 只有在第3条件($f > b$)所定义的整个区域内, 才可唯一地确定式(5)的值. 因此, 第3条件($f > b$)成为位姿正解单解存在的条件.

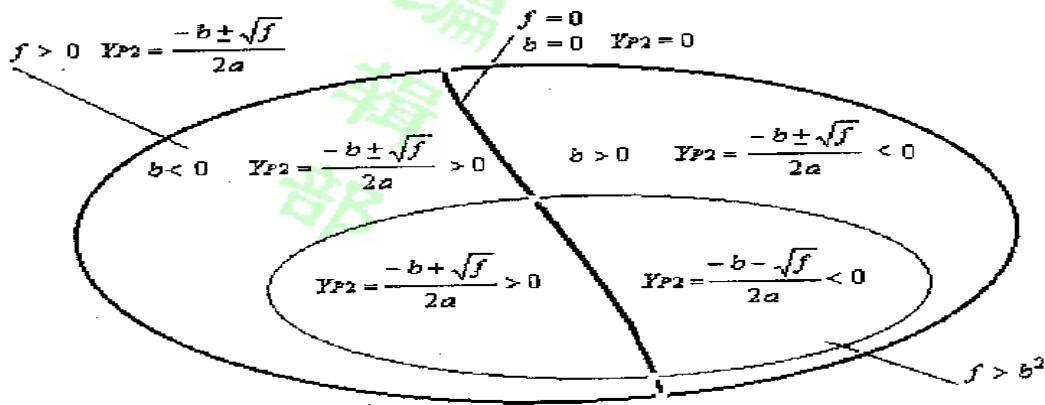


图1 位姿正解单解条件示图

2.3 位姿正解单解

对于大多数实际应用, 由于为了避开平台奇异形位设计以及机构中杆长限制等, 工作空间十分有限, 位姿正解单解存在条件, 既第3条件($f > b$)一般成立. 从而, 可依据方程式(5)在合适惯性坐标系中的符号要求, 在根号前选择适当符号, 以确保在整个工作空间里, 方程式(5)的符号保持不变. 如令式(19)成立.

$$Y_{P2} = -\frac{b - \sqrt{f}}{2a} < 0 \quad (19)$$

因此, 选定根号前符号后, 由式(1)~ (15)便可唯一地确定位姿正解. 而位姿正解单解存在条件 ($f > b$) 便成为在给定条件下, 位姿正解多解与位姿正解单解之间的一个分界. 第 1 条件($f=0$ 含 $b=0$) 便成为选择合理坐标系后, 确定位姿正解单解适用区域的分界.

2.4 位姿正解单解适用区域

如上所述, 设计过程中, 在首先满足位姿正解单解存在条件后, 可依据方程式(5)在合适惯性坐标系中的符号要求, 在根号前选择适当符号, 以确保在整个工作空间里, 式(19)符号保持不变. 从而将实际工作空间限定于图 2(a) 所示区域.

同时注意到当 $b > 0$ 时, 式(19)仍然成立. 既将实际工作空间限定于图 2(b) 所示区域内. 从而有以下推论:

推论 1: 若 $b < 0$, 工作空间位于图 2(a) 所示的整个区域内.

推论 2: 若 $b > 0$, 工作空间应位于图 2(b) 所示的整个区域内.

推论 3: 若 $b = 0$, 所研究的铰接点位于该区域的一边界 $f = 0$ 上.

推论 4: 一旦保证式(19)成立, 工作空间应必然位于图 2(b) 所示整个区域内.

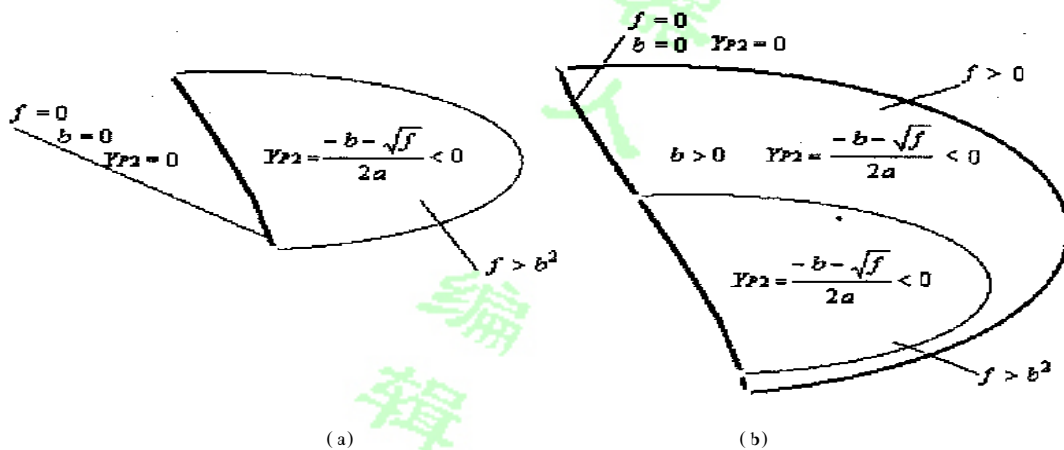


图 2 位姿正解单解适用区域

同时, 不难推出

$$Y_{P2} = \frac{-b \pm \sqrt{f}}{2a} > 0$$

的情况.

2.5 位姿正解单解适用区域模拟论证

观察图 2 后不难发现, 多维曲面 f 的值对于如何划分各区域起重要作用. 从而有必要用数字模拟研究以上有关区域与工作空间之间的关系. 这里仅讨论 X-型 Stewart 并行机构在无杆长及其它约束时, 多维曲面 f 的 3 维曲面与工作空间的关系.

其一是纯 2 自由度转动工作空间与 $f = 0$ 时的边界关系. 图 3 显示出多维曲面 f 的 3 维曲面以及该曲面与 $f = 0$ 时 2 维平面的交线. 显然, 该曲面与 $f = 0$ 时 2 维平面交线间所形成的 3 维空间在 $f = 0$ 时 2 维平面上的投影区域显然覆盖了相关的 2 自由度工作空间.

其二是 3 自由度转动和 3 自由度移动同步时, 工作空间与 $f = 0$ 的边界关系. 图 4 显示的 3 维曲面是在 $f = 0$ 时, 由 3 自由度转动和与之同步的 3 自由度移动所形成的二 3 维曲面. 显然, 该曲面上 f 处处为零. 在含坐标原点时, 由该曲面所包络的空间显然覆盖了 6 自由度工作

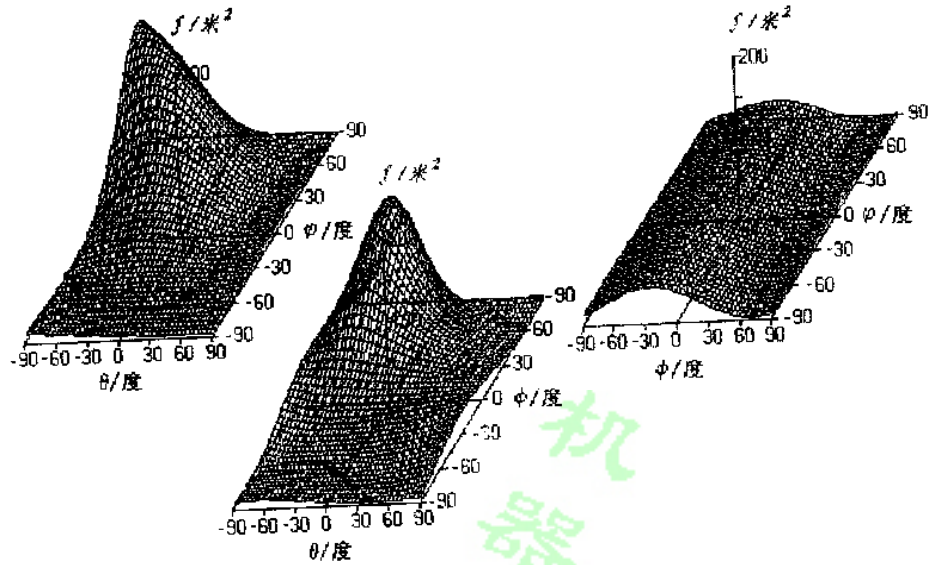


图3 纯2自由度转动工作空间与 $f=0$ 时的边界关系

空间. 在引入杆长约束后, 该3维曲面完全消失, 从而显示由杆长所限定的6自由度工作空间完全位于 $f=0$ 和 $f>0$ 多维曲面所包络的空间里.

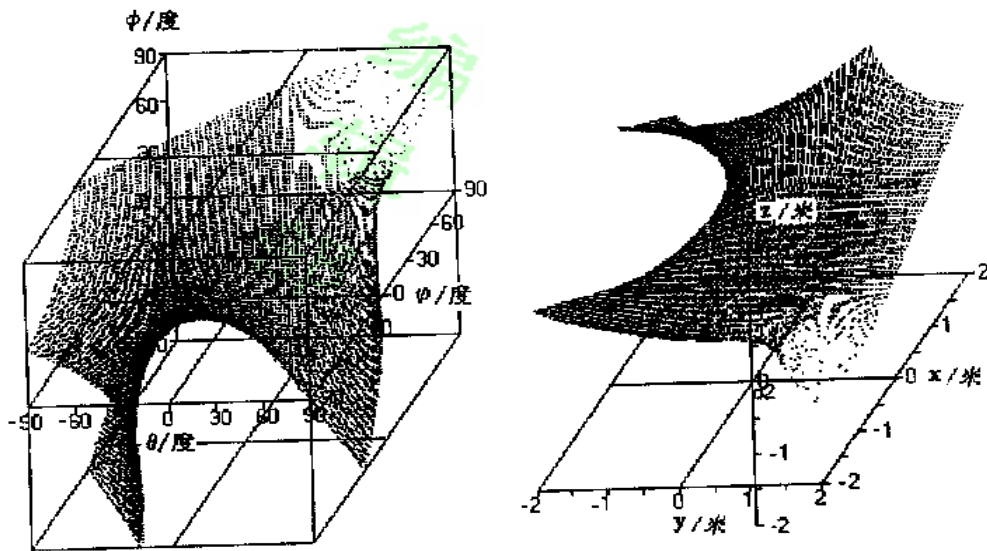


图4 3自由度转动和3自由度移动同步时工作空间与 $f=0$ 的边界关系

其三是3自由度转动和3自由度移动不同步时, 工作空间与 $f=0$ 的边界关系. 模拟显示了附加杆长约束时, 由3自由度转动和与之不同步的3自由度移动所形成的6自由度工作空间. 该6自由度工作空间被包含于由 $f=0$ 所形成的3维体内(图略). 从而可以说, 利用数字

方法论证了 6 自由度工作空间完全位于图 2(b)所示的区域内.

3 结论

依据以上讨论, 本文提出以下结论: (1) 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解存在的区域包含了由该机构杆长限定的有效工作空间; (2) 在由 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构杆长限定的有效工作空间里, 该机构位姿正解单解存在; (3) 在由 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构杆长限定的有效工作空间里, 该机构不存在位姿正解多解; (4) 本文所述 6-6 6 自由度 Stewart 并行机构位姿正解单解不但简单、实用、精确、而且计算省时, 更适用于在线实时控制.

参 考 文 献

- 1 吕崇耀, 熊有伦. 6-6 并联机构封闭运动学位姿正解单解. 华中理工大学学报, 1999, 27(7): 36-38.

EXACT CLOSED-FORM FORWARD KINEMATICS OF 6-6 6DOF STEWART IN-PARALLEL MECHANISMS

LU Chong-yao

(College of Mechanical Engineering, HUST, Wuhan, Hubei, CN 430074)

Abstract: Based on the closed-form forward kinematics of the 6-6 6-DOF Stewart parallel mechanisms, the conditions for the exact closed-form forward kinematics of the 6-6 Stewart parallel mechanisms were studied of. Necessary simulation was carried out to verify the suitability of the conditions.

Keywords: 6-DOF Stewart platform, forward kinematics

作者简介:

吕崇耀 (1958-), 男. 英国 Salford 大学哲学博士. 研究领域: 电磁流变流体及其应用基础研究, 6 自由度 Stewart 并行机构运动学以及电液伺服控制系统的计算机在线优化控制研究.