第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0219-04 **文献标识码**: **A**

有界格上的一些函数与几个半群

杨 安 洲
(中国科学院成都计算机应用研究所, 四川 成都 610041)

摘 要: 在有界格上引进了 6 个函数 (算子), 研究了它们之间的关系, 并且得到了几个半群.

关键词: 格; 有界格; 算子 (函数); 半群.
MSC(2000): 03G10
中图分类: O141

1 一些定义

以下的定义, 均是对有界格 (Bounded lattice) $L = L(\vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ 而言的, 特殊地, 可把 L 取为布尔代数以及一个集合的幂集 (Boolean algebra, the power set of a set).

定义 1 若 C 是 L 到 L 的一个一元函数 $(C: L \to L)$, 满足性质:

(i) 具有单调下降性: 对所有的 $X \in L, Y \in L$, 若 $X \leq Y$, 则有 $C(X) \geq C(Y)$, 记为 $C \downarrow$.

(ii) 对合性 (Involution): 对任 $X \in LC(C(X)) = X$, 记为 $C^2 = e$ (其中 e 为恒等函数).

(iii) $C \wedge e \equiv O$ (for all $X \in L$), 则称 C 为 L 上的一个补 (余) 函数 (Complement function).

定义 2 若 f 是 L 到 L 的一个一元函数 $(f: L \to L)$, 满足性质:

(i) 具有单调上升性: 对任 $X \in L, Y \in L$, 若 $X \leq Y$, 则有 $f(X) \leq f(Y)$, 记为 $f \uparrow$.

(ii) 扩大性: 对任 $X \in L$, $f(X) \geq X$ (可记为 $f \geq e$).

(iii) 幂等性 (idempotent): 对任 $X \in L$, $f(f(X)) = f(X)$, 记为 $f^2 = f$, 则称 f 是一个闭包函数 (Closure function).

定义 3 对给定的补函数 C 与给定的闭包函数 f 可作出函数 $(cfc)(X) = c(f(c(X)))$, 记为 $i = cfc$, 称它为内函数 (Interior function). 它有性质: $i \leq e, i^2 = i, i \uparrow, CiC = f$ (注: 也可先定义函数 i, 若有性质 $i \leq e, i^2 = i$, $i \uparrow$, 则称 i 为内部函数; 有了内部函数 i, 可倒过来定义闭包函数 $f = CiC$).

定义 4 对给定的 C 与 f, 可定义 $f(X) \wedge fC(X)$ 为一个函数, 称它为边界函数 (Boundary function), 记为 $b = f \wedge fC$.

定义 5 称 $e \wedge fc$ 为边缘函数 (Rim function), 记为 $r = e \wedge fc$.

$$\text{i.e.}\quad r(x) = (e \wedge fc)(x) = e(x) \wedge fc(x) = x \wedge f(c(x)).$$

定义 6 称 $f \wedge c$ 为边线函数 (Side functiuon), 记为 $s = f \wedge c$ 以上这些函数, 均是从拓扑空理论中推广、抽象、一般化之后而得到的定义, 它们有明显的几何意义.

易知有以下的一些事实:

收稿日期: 2004-11-15; **接受日期**: 2005-05-01

若有函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 对任 $x\in L$ 有 $\alpha(x)\le\beta(x)$ 时, 则可记为 $\alpha\le\beta$. 若 $\alpha\le\beta$ 且 $\beta\le\alpha$, 则 $\alpha=\beta$. 若 $\alpha\le\beta$ 且 g 为任一函数, 则 $\alpha g\le\beta g$(由 x 处代入 $g(x)$ 即知其成立的). 若 $\alpha\uparrow$, 则 $\alpha(g\wedge h)\le\alpha g\wedge\alpha h$, $\alpha(g\vee h)\ge\alpha g\vee\alpha h$. 若 $g\le h$ 且 $\alpha\uparrow$, 则 $\alpha g\le\alpha h$. 对这样一些易知的事实, 在 §2 中要用到它们.

2 六个函数之间的一些关系

Kuratowski 等式 [1]: $(fi)^2=fi,(if)^2=if,fcfcfcf=fcf$.

证明 $i\le e$, $ifi\le fi$, $fifi\le f^2i=fi$; $f\ge e$, $fi\ge i$, $ifi\ge i^2=i$, $fifi\ge fi$, 合并在一起 $fifi\le fi\le fifi$, $fifi=fi$, $fi=fcfc$ 代入后得 $fcfcfcfc=fcfc$, $fcfcfcf=fcf$, $cfcfcfcf=cfcf$ 即 $ifif=if$.

定理 1 (Kuratowski) 由 c,f 出发, 经复合后, 最多能得到 14 个不同的函数, 它们是: $c,e,f,cf,fcf,cfcf,fcfcf,cfcfcf,fc,cfc,fcfc,cfcfc,fcfcfc,cfcfcfc$.

定理 1 的两个推论 (Kuratowski): (i) 由 c,i 出发, 经复合后, 最多也是 14 个不同的函数 (因为从 c,i 出发, 与从 c,f 出发, 两者是一样的).

(ii) 由 f,i 出发, 经复合后, 最多生成 6 个不同的函数, 它们是: f,i,fi,ifi,if,fif (因为 $f^2=f,i^2=i,(fi)^2=fi,(if)^2=if$).

定理 2 $b^3=b^2$, 由 b 出发, 最多生成两个: b,b^2.

证明 $b^2=b(b)=b(f\wedge fc)=f(f\wedge fc)\wedge fcb\le f^2\wedge f^2c\wedge *=f\wedge fc\wedge *\le f\wedge fc=b,cb2\ge cb,fcb^2\ge fcb,b=b^2(b)\le bb=b^2,b=b(b^2)=fb^2\wedge fcb^2\ge b^2\wedge fcb=b(b)\wedge fcb=fb\wedge fcb\wedge fcb=fb\wedge fcb=b^2,b\le b^2\le b^3,b^3=b^2$.

定理 3 $r^2=r$, 由 r 出发, 最多一个 r.

证明 $r^2=r(r)=r\wedge fcr\le r,r=e\wedge fc\le e,cr\ge c,fcr\ge fc,r2=r(r)=r\wedge fcr\ge r\wedge fc=e\wedge fc\wedge fc=e\wedge fc=r,r2\le r\le r2,r2=r$.

从 c 出发, 最多有两个 c,e; 从 f 出发, 只有一个 f; 从 i 出发, 也只有一个 i; 由 b 出发, 最多有两个: b,b^2; 由 r 出发, 只有一个 r. 现在要问从 s 出发, 经复合后, 可得多少个不同的函数. 若从 c,f,i,b,r,s 的几何意义来看, b,r,s 都是刻画了 "边界性质" (x 的 "边界为 $b(x),r(x),s(x)$, 对 b 有 $b^3=b^2$, 对 r 有 $r^2=r$, 那么对 s 而言是否也具有 "有限性" 呢? 即要问: $s,s^2,s^3,\cdots,s^n,s^{n+1},\cdots$ 是一个真的无穷序列吗? 下面我们来回答这个问题, 其结论是:

定理 4 从 s 出发, 可生成一个真的无穷序列 $s,s^2,\cdots,s^i,\cdots,s^j,\cdots$ (对任 $i\ne j$ 有 $s^i\ne s^j$).

其例子如下: 令 $N=\{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}=$ 正整数集, $P(N)=\{A:A\subseteq N\}=N$ 的幂集 =The power set of N, 把 $P(N)$ 作为 L, 其中出现的 $\vee,\wedge,c,o,1$ 就是集合论中的 "并", "交", "补", 空集, N. 对 $n\in N$, 令 $F_n=\{n,n+1,\cdots\}=${从 n 起的自然数 }$=[n,+\infty,F_\infty=),F=\{F_\infty,F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots\}$. 对任 $A\in P(N)$ 定义 $f(A)=\cap\{F_i:F_i\in F\text{ and }F_i\supseteq A\}$, 则这个 f 是 $P(N)$ 上的一个闭包函数. 现在若令 $A=\{1,3,5,\cdots\}=$ 奇数集, 则有: $S(A)=\{2,4,6,\cdots\}=$ 偶数集, $s^2(A)=\{3,5,\cdots\}=${从 3 起的奇数 }, $s^2(A)=\{4,6,\cdots\}=${从 4 起的偶数 }, $\cdots$, $S^{2k-1}(A)=\{2k,2k+2,2k+4,\cdots\}=${从 $2k$ 起的偶数 }, $S^{2k}(A)=${从 $(2k+1)$ 起的奇数 },$\cdots$, 这些可从 c,f,s 的定义出发, 经计算并用数学归纳法可得知的, 因而有 $S^i\ne S^j$ (只要 $i\ne j$ 时), 这就证明了: $S,S^2,\cdots,S^n,S^{n+1},\cdots$ 是一个真正的无穷序列.

对比 c,f,i,b,r, 即知: s 与其它的几个有本质上的不同, 它可生成无穷序列.

以下是 14 个等式以及它们的证明：

性质 1　bc=b.

证明　$bc = fc \wedge fcc = fc \wedge f = f \wedge fc = b$.

性质 2　$fb = b$.

证明　$b \leq fb = f(f \wedge fc) \leq f^2 \wedge f^2c = f \wedge fc = b$.

性质 3　$bf = bic$.

证明　$bic = bcfcc = bf$.

性质 4　$b^2f = bf$.

证明　$bf = f^2 \wedge fcf = f \wedge fcf, f \wedge fcf \leq f, f \wedge fcf \leq fcf, c(f \wedge fcf) \geq cf, c(f \wedge fcf) \geq cfcf, c(f \wedge fcf) \geq cf \vee cfcf, fc(f \wedge fcf) \geq f(cf \vee cfcf) \geq fcf \vee fcfcf \geq fcf$, i.e. $fcbf \geq fcf, b^2f = b(bf) = fbf \wedge fcbf = bf \wedge fcbf = f \wedge fcf \wedge fcbf = f \wedge fcf = bf$.

性质 5　$b^2i = bi$.

证明　$b^2i = bbi = bbcfc = b^2fc = bfc = bccfc = bi$.

性质 6　$ibi = 0$ (恒等于 0 的零函数).

证明　$bi = fi \wedge fci, ibi = i(fi \wedge fci) \leq ifi \wedge ifci = ifi \wedge cfcfci = ifi \wedge cfi2 = ifi \wedge cfi \leq fi \wedge cfi = 0$.

性质 7　$ib^2 = 0$ (零函数).

证明　$ib^2 = ib(b) = i(fb \wedge fcb) \leq ifb \wedge ifcb = ib \wedge cfcfcb = ib \wedge cfib \leq fib \wedge cfib = 0$.

性质 8　$ir = 0$ (零函数).

证明　$ir = i(e \wedge fc) \leq i \wedge ifc = i \wedge iccfc = i \wedge ici \leq i \wedge ci = 0$.

性质 9　$ri = 0$ (零函数).

证明　$ri = i \wedge fci = i \wedge ccfci = i \wedge ci^2 = i \wedge ci = 0$.

性质 10　$br = fr$.

证明　$r = e \wedge fc, r \leq e, r \leq fc, cr \geq c, cr \geq cfc, cr \geq c \vee cfc, cr \geq c \vee i, fcr \geq f(c \vee i) \geq fc \vee fi \geq fc, fr \leq fc, fr \leq fc \leq fcr, br = fr \wedge fcr = fr$.

性质 11　$(br)^2 = rbr$.

证明　$(br)^2 = (fr)^2 = frfr = f(fr \wedge fcfr) \leq fr \wedge fcfr = rfr \leq frfr = (fr)^2 = (br)^2, (br)^2 = rfr = rbr$.

性质 12　$b^2 = rb$.

证明　$b^2 = b(b) = fb \wedge fcb = b \wedge fcb = eb \wedge fcb = rb$.

性质 13　$b^2r = rbr = rfr$.

证明　$b^2r = rbr = rfr$.

性质 14　$frf = rf$.

证明　$rf = ef \wedge fcf = f \wedge fcf, rf \leq frf = f(f \wedge fcf) \leq f^2 \wedge f^2cf = f \wedge fcf = rf$.

为方便，汇总于下 (共 31 个等式): $c^2 = e, c \wedge e = 0, f^2 = f, i = cfc, i^2 = i, f = cic, (fi)^2 = fi, (if)^2 = if, fcfcfcf = fcf, b = f \wedge fc, r = e \wedge fc, s = f \wedge c, rc = s, sc = r, bc = b, b^3 = b^2, fb = b, b^2f = bf, r^2 = r, fr = br, b^2i = bi, ibi = 0, ib^2 = 0, ir = 0, ri = 0, rb = b2, (br)^2 = rbr, b^2r =$

$rbr, b^2r = rfr, frf = rf, bf = bic.$

3 几个半群

用上节末的 31 个等式可得以下的定理 (或几个半群).

定理 5 从 1 个出发的有： $\{c, e\}, \{f\}, \{i\}, \{b, b^2\}, \{r\}, \{s, s^2, \cdots$ (无穷多个)$\}$.

从 2 个出发的有：从 s, c 或 s, f 或 s, i 或 s, b 或 s, r 出发的都生成无限半群.

$$\{c, f, \cdots (14\text{个})\}, \{c, i, \cdots (14\text{个})\}, \{c, e, b.b^2, cb, cb^2\}, \{f, i, fi, ifi, if, fif\}, \{f, b, b^2, bf\},$$

$$\{r, f, rf, fr, rfr\}, \{i, b, b^2, bi, ib, bib, 0, f(0)\}, \{i, r, 0\}, \{b, r, b^2, br, b^2r\},$$

其中的 0 表示是零函数，即 $\alpha(x) \cong 0$ (for all $x \in L$) 时记 α 为 0, $f(0)$ 也是一个常植函数，即 $\alpha(x) \cong f(0)$ (for all $x \in L$) 时记 α 为 $f(0)$.

定理 6 (或结论) 从 $\{c, f, i, b, r, s, \}$ 中任取出 $E\acute{I}\{c, f, i, b, r, s\}$, 然后从 E 出发生成的半群 (E), 当 E 中有 s 或有 c, r 等等时，可能生出无限多个来，余下的情况下最多只能生出有限个来，除上述说过的 (从 2 个出发的) 以外，还有以下的情况下，当 E 取 $\{c, f, i\}$, $\{c, f, b\}$, $\{c, i, b\}$, $\{f, i, b\}$, $\{f, i, r\}$, $\{f, b, r\}$, $\{i, b, r\}$, $\{f, i, b, r\}$ 时，所得的 (E) 也是有限的半群.

参考文献:

[1] HAMMER P C. *Kuratowski's closure theorem* [J]. Nieuw Arch. Wisk.(3), 1960, **8**: 74–80.

[2] SHUM K P, YANG An-zhou. *Interior operators on complete lattices* [J]. Pure Math. Appl. Ser. A, 1992, **3**: 73–80.

[3] YANG An-zhou, SHUM K P. *Completions of posets* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1997, **17**(1): 135–138. (in Chinese)

Some Functions on Bounded Lattices and Several Semi-Groups

YANG An-zhou

(Chengdu Institute of Computer Application, Chinese Academy of Science, Sichuan 610041, China)

Abstract: In this paper, some functions (or operators) on bounded lattices are given and their relations are discussed, then several semi-groups are obtained.

Key words: lattice; bounded lattice; operator (function); semi-group.