文章编号：1007-4929(2007)03-0041-03

信赖域法用于给水管网水力计算的研究

储诚山[1]，祈淑艳[2]，路志强[3]，张　光[2]，王　蓓[2]

（1. 中国社会科学院可持续发展研究中心，北京 100732；2. 天津天保公用设施有限公司，天津 300461；
3. 华北水利水电学院水利系，河南 郑州 450008）

摘　要：给水管网水力计算是进行管网优化设计和进行管网运行工况模拟的一个不可缺少的重要环节，该过程的计算结果和求解速度决定了管网优化设计和运行模拟的可靠性和实时性。为快速、准确实现管网水力计算，建立了给水管网水力计算模型，针对该模型的为求解非线性方程组实质，以及常规求解方法存在的缺陷，提出了管网水力计算的信赖域法，并着重对信赖域法数学模型和求解过程进行剖析，用MATLAB编程语言编写了管网水力计算的计算程序。最后以河南省清丰县一个复杂的给水管网实例进行验证，结果说明了信赖域法能有效地应用于给水管网水力计算。同时也为信赖域法在给水领域和其他工程领域的应用提供了借鉴。

关键词：信赖域法；给水管网；水力计算；非线性最小二乘法

中图分类号：TU991.33　　文献标识码：A

Research on Application of Trust Region Method for Hydraulic Calculation of Water Distribution Network

CHU Cheng-shan[1], QI Shu-yan[2], LU Zhi-qiang[3], ZHANG Guang[2], WANG Bei[2]

(1. Research Center for Sustainable Development Chinese Academy of Social Science, Beijing 100732, China;
2. Tianjin TianBao Public Service Co. ltd, Tianjin 300461, China;
3. North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450008, China)

Abstract: Hydraulic calculation for water distribution network is an important and indispensable factor for optimal design of water distribution network and the simulation of operation status. The calculation result and speed determines the reliability and real-time of the optimal design and simulation for water distribution network. To quickly and exactly implement the hydraulic calculation of water distribution network, the hydraulic calculation model for water distribution network was set up in this paper. Aiming at its characteristic of nonlinear and the shortcoming of general solutions, the trust region method was presented. Furthermore, the authors made an emphasis analysis on the model and solution of trust region method, and wrote programme code for computation with Matlab language. Lastly, a complicated water distribution network of Qingfeng county of HeNan province was used to test the method. The result showed that the method of trust region was practical and valid for hydraulic calculation of water distribution network. At the same time, the method of trust region gave a good reference to water supply system and other engineer fields.

Key words: trust region method; water distribution network; hydraulic calculation; non－linear least squares method

1　管网水力计算数学模型及实质

假定待计算的管网图形中总管段数为 J，总节点数为 I（水源可作为节点考虑），管网基环数为 K，进行管网水力计算须满足以下条件：

（1）节点平衡方程。指管网中任一节点流出和流入流量的代数和为零，即：

$$\Sigma Aq + Q = 0 \tag{1}$$

式中：$Q=[Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, \cdots, Q_I]$为节点流量集合，规定流向节点流量为负，流出节点流量为正；$q=[q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_J]$为管段流量集合；$A=[a_{ij}]$为第 i 节点与第 j 管段的衔接矩阵，且有：

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{当 } j \text{ 管段从 } i \text{ 节点流出} \\ a_{ij} = 0, \text{当 } j \text{ 管段不与 } i \text{ 节点连接} \\ a_{ij} = -1, \text{当 } j \text{ 管段流向 } i \text{ 节点} \end{cases}$$

收稿日期：2007-04-29

作者简介：储诚山(1969-)，男，博士后。

(2)基环能量平衡方程。指管网中任一闭合环内各管段的水头损失代数和为零,即:

$$Bh=0 \tag{2}$$

式中:$B=[b_{kj}]$为管网回路矩阵,且有:

$$\begin{cases} b_{kj}=-1,\text{当 } j \text{ 管段在 } k \text{ 环上,水流为逆时针方向} \\ b_{kj}=0,\text{当 } j \text{ 管段不在 } k \text{ 环上} \\ b_{kj}=1,\text{当 } j \text{ 管段在 } k \text{ 环上,水流为顺时针方向} \end{cases}$$

$h=[h_1,h_2,\cdots,h_j,\cdots,h_J]$为管段水头损失集合,$h_j$ 为 j 管段沿程水头损失,常用来计算管段水头损失的公式有巴甫洛夫基公式、舍维列夫公式和海曾－威廉公式,这里选用海曾－威廉公式,以 j 管段水头损失为例:

$$H_{j1}-H_{j2}=h_j \tag{3}$$

$$h_j=10.667C^{-1.852}d_j^{-4.87}q_j^{1.852}l=s_jq_j^{1.852}$$

考虑水流方向,并假定管段水头损失和管段流量符号相同,则上式可写成:

$$h_j=s_j\mid q_j\mid^{0.852}q_j=\mathrm{sign}(q_j)s_j\mid q_j\mid^{1.852} \tag{4}$$

$\mathrm{sign}(q_j)$ 为符号函数,且 $\mathrm{sign}(q_j)=\begin{cases}1 & q_j>0\\ 0 & q_j=0\\ -1 & q_j<0\end{cases}$

式中:H_{j1}为 j 管段起点水压值,m;H_{j2}为 j 管段终点水压值,m;C 为海曾－威廉系统,对新建管网取 $C=130$;D_j 为 j 管段管径,m;q_j 为 j 管段流量,m^3/s;s_j 为 j 管段摩阻系数;l_j 为 j 管段管长,m。

管网中局部水头损失按沿程水头损失的 20%加以考虑并叠加到沿程水头损失计算中。

(3)节点水压要求。

$$H\geqslant H_{i\min} \tag{5}$$

式中:$H_{i\min}$为节点所要求的最小自由水压值。

(4) 水量平衡方程。

$$\sum_{p=1}^{N}Q_p=Q_{\max} \tag{6}$$

式中:N 为泵站数量;$Q_{\max}$为最高用水时用水量。

除特别说明外,以上各表达式中均有:$i\in I,j\in J,k\in K$。

由式(6)知,管网中各水源总供水量等于管网总用水量,故在式(1)中只有$(I-1)$个独立的节点流量方程。为此,式(1)可转化成含有$(I-1)$个独立线性方程的方程组;而式(3)可转化成含有 K 个独立非线性方程的方程组。

由此可知,管网水力计算的实质是求解由式(1)和式(3)联立而成的管段非线性方程组(含 $I+K-1$ 个方程),该方程组中未知量为 $I+K-1$ 个管段流量(平面管网图中有 $J=I+K-1$)。

2　求解非线性方程组的信赖域法

2.1　非线性方程组的结构

通常,非线性方程组具有如下通用式:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=0\\ f_2(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=0\\ \quad\vdots\\ f_n(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=0\end{cases} \tag{7}$$

其中:$f_i(i=1,2,\cdots n)$是定义在某区域 $D\subset R^n$ 上的 $x_i(i=1,2,\cdots n)$的实值连续函数,且 f_i 中至少有一个函数关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是非线性的,否则就是线性方程组,如果 $n=1$,则为一元非线性方程。将式(7)采用向量形式加以表示,令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T$,则式(7)变为:

$$F(x)=0 \tag{8}$$

可以看出,式(8)具有与一元非线性方程相似的“外表”形式。如果非线性方程组(7)或(8)在 D 上有解,则求解问题就是求出能满足方程组的一组 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$(或称解向量 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$),使得 $F(x^*)=0$。

2.2　非线性方程组的求解方法介绍

通常,对非线性方程组的求解方法主要有两类[4,5]:第一类是属于“线性化”方法,这类方法有 Newton 法及其各种改进;第二类是属于求函数极小值的方法,由于这类方法是通过求构造函数的极小值点而间接求解原非线性方程组的解,故其可归入“最优化方法”的范畴,常用的有信赖域法和共轭梯度法。

由文献[4]、[5]知,在用 Newton 及其各种改进法求解非线性方程组时存在以下缺点:

(1)Newton 法对初始解 $x(0)$的依赖性强。

(2)对于大规模非线性方程组,计算量较大,计算速度缓慢。

(3)当原非线性方程组为奇异或者严重病态时都不能使迭代进行下去。

基于此,本文在进行管网水力计算时,采用求解非线性方程组的后一类“最优化方法”。该方法利用非线性最小二乘法构造模函数 $\varphi(x)$,然后采用信赖域法模型及解法求解管网管段方程,进而求出管段水头损失和各节点水压值。

2.3　解非线性方程组的信赖域法

2.3.1　信赖域法介绍

信赖域法起源于 Powell 在 1970 年的工作,对其研究是进入 80 年代才盛行起来,而且很快成为非线性规划的热点。该方法思想新颖、算法可靠,具有很强的收敛性,它不仅可以代替一维搜索,能很快的解决良态问题,而且也能有效的求解病态问题,具有整体收敛特性。

2.3.2　信赖域法数学模型[5,6]

在用信赖域法求解非线性方程组时,以原方程组对应的非线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为基础,采用非线性最小二乘法构造模函数 :

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x)=\frac{1}{2}\parallel F(x)\parallel_2^2=\frac{1}{2}F(x)^TF(x) \tag{9}$$

采用非线性最小二乘法构造模函数的好处是:当原方程组的解 x^* 存在时,则有 $\min\varphi(x^*)=0$;如果原方程组没有零解,该算法仍然返回一个残差很小的点。

在式(9)中,$\parallel\cdot\parallel_2$ 是 R^n 上的 2－范数,于是,就将求解非线性方程组的解问题转化为求函数 $\varphi(x)$极小值点问题,即求:

$$\min\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x)=$$

$$\frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2=\frac{1}{2}F(x)^TF(x) \tag{10}$$

设 $J(x)$ 是 $F(x)$ 的 Jacobi 矩阵，$H(x)$ 为 $F(x)$ 的 Hesse 矩阵，$g(x)$ 为 $F(x)$ 的梯度，将式(9)在 x^k 处进行 Taylor 展开有：

$$\varphi(x)=\varphi(x^k)+(g^k)^T(x-x^k)+\frac{1}{2}(x-x^k)^TH^k(x-x^k)+o(\|x-x^k\|^2) \tag{11}$$

式中：J^k、H^k、g^k 分别为 $\varphi(x)$ 在 x^k 点的 Jacobi 矩阵、Hesse 矩阵和梯度。

在用信赖域法解这类问题时，首先选择一个缩短了的步长，然后利用 n 维二次模型选择搜索方向，即先确定一个步长上界 h^k，并由此定义 h^k 邻域 D^k：

$$D^k=\{x\mid \|x-x^k\|\leqslant h^k,h^k>0\}$$

在式(11)中，当 $\|x-x^k\|$ 很小时，用 $\phi(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 的二阶近似，忽略 $o(\|x-x^k\|^2)$ 项，将求式(10)极小值点问题转化为求 $\phi(x)$ 在 $D_k=\{x|\|x-x^k\|\leqslant h_k,h_k>0\}$ 上的极小值点：

$$\begin{cases}\min\frac{1}{2}F(x^k)^TF(x^k)+J(x^k)^TF(x^k)(x-x^k)+\\ \quad\frac{1}{2}(x-x^k)^TH(x^k)(x-x^k)\\ \text{s.t}\quad \|x-x^k\|\leqslant h^k\end{cases}$$

式中：h^k 为信赖域半径，记：$d=x-x^k$，称为信赖域的试探步，则上述问题可简记为：

$$\begin{cases}\min q_k(d)=\frac{1}{2}F(x^k)^TF(x^k)+\\ \quad J(x^k)^TF(x^k)d+\frac{1}{2}d^TH(x^k)d\\ s.t\quad \|d\|\leqslant h^k\end{cases} \tag{12}$$

式(12)为信赖域法解决优化问题的模型方法，如能求出式中的 d^k，即可得到 $x^{k+1}=x^k+d^k$，获得原方程组的解 x^*。

2.3.3　信赖域法模型求解

对式(12)的求解，采用 LMGQT 方法[6]，为此，这里引用两个定理：

定理 1　如果有 $\gamma^k\geqslant 0$ 使得 $H^k+\gamma^kI$ 为正定矩阵，那么 $d^k=-(H^k+\gamma^kI)^{-1}J^k$ 是问题

$$\begin{cases}\min q_k(d)=\varphi(x^k)+(g^k)^Td+\frac{1}{2}d^TH^kd\\ \text{s.t}\quad \|d\|\leqslant h^k\end{cases} \tag{13}$$

的最优解。

定理 2　设 H 为对称矩阵，λ_1 是的 H 的最小特征值，那么 $\|(H+\gamma I)^{-1}J\|$ 是 $(-\lambda_1,+\infty)$ 上的减函数。

由定理 2 知，当 $f(x^{k+1})\geqslant f(x^k)$ 时，应增大 γ^k 以减小 $\|d^k\|$。对 γ^k 的调节按如下规则：在 x^k 计算 g^k，如果 $g^k=0$ 迭代停止，再尝试求 x^k 处的负曲率方向，如果找到负曲率方向 d^k，通过若干次 $d^k=d^k/2$ 迭代，总可以使得 $f(x^k+d^k)<f(x^k)$。否则，计算 H^k，通过若干次尝试，选定了 γ^k 使得 $H^k+\gamma^kI$ 正定，求解线性方程组 $(H^k+\gamma^kI)d=-g^k$，得 $d^k=-(H^k+\gamma^kI)^{-1}g^k$。计算：

$$\Delta\varphi^k=\varphi(x^k)-\varphi(x^k+d^k)$$

$$\Delta q^k=(g^k)^Td^k+\frac{1}{2}(d^k)^TH^kd^k$$

如果 $\Delta\varphi^k\leqslant 0$，则 $\gamma^k=4\gamma^k$，重新解线性方程组 $(H^k+\gamma^kI)d^k=-g^k$。

如果 $0\leqslant\Delta\varphi^k\leqslant 0.25\Delta q^k$，则取 $x^{k+1}=x^k+d^k$，$\gamma^{k+1}=4\gamma^k$，进入下一次迭代。

如果 $0.25\Delta q^k<\Delta\varphi^k\leqslant 0.75\Delta q^k$，则取 $x^{k+1}=x^k+d^k$，$\gamma^{k+1}=\gamma^k$，进入下一次迭代。

如果 $\Delta\varphi^k\geqslant 0.75\Delta q^k$，则取 $x^{k+1}=x^k+d^k$，$\gamma^{k+1}=\gamma^k/2$，进入下一次迭代。

根据该模型求解过程，由初始解 x^0 通过迭代格式既可一步步逼近原方程组的解 x^*。

3　管网水力计算的信赖域法

信赖域法进行管网水力计算时，按信赖域法模型求解过程由初始流量开始迭代，当残差满足允许误差要求时迭代停止，获得极小值点，进而可求出其他管网数据。

4　工程案例

以河南省清丰县(简称 QF 县)供水管网系统为例，采用水泥砂浆衬里球墨铸铁管。管网中总管段数 $I=132$、总节点数 $J=95$(包括 2 个水厂)、总环数 $J=38$，第一水厂供水能力为 2 万 m^3/d，第二水厂供水能力为 3 万 m^3/d，管长、节点标高等基本数据已知。根据信赖域法水力计算过程，以 matlab7.0 计算语言[7~9]编写管网水力计算程序，在 Celeon1G 微机上运行 9.34 s、经过 7 次迭代后达到极小值点(计算结果略)。由计算结果易知，基环中水头损失闭合差最大值为 3.3588×10^{-9} m(理论值为 0)，节点流量代数和最大值为 8.7281×10^{-11} L/s(理论值为 0)。由此容易看出，信赖域法在给水管网水力计算具有相当高的精度和准确度。

参考文献：

[1]　严煦时，赵洪宾．给水管网理论与计算[M]．北京：中国建筑出版社，1986.
[2]　Saud A Taher，W. Labadie. Optimal Design of Water－Distribution Networks With GIS [J]. Journal of Water Resources and Management，1996，July/August：301－311.
[3]　赵洪宾，严煦时．给水管网系统理论与分析[M]．北京：中国建筑出版社，2003.
[4]　张可村，赵英良．数值计算的算法与分析[M]．北京：科学出版社，2003.
[5]　袁亚湘，孙文瑜．最优化理论与方法[M]．北京：科学出版社，1997.
[6]　粟塔山．最优化计算原理与算法程序设计[M]．长沙：国防科技大学出版社，2001.
[7]　飞思科技产品研发中心．Matlab6.5 辅助优化设计与计算[M]．北京：电子出版社，2003.
[8]　苏金明，张莲花．Matlab 工具箱应用[M]．北京：电子工业出版社，2003.
[9]　石钟慈，袁亚湘．大规模科学与工程计算的理论和方法[M]．长沙：湖南科技出版社，1998.