第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

**文章编号**: 1000-341X(2007)04-0944-05 **文献标识码**: A

# 一类上三角矩阵环 $W_n(p,q)$ 的斜 Armendariz 性质

王 文 康
(西北民族大学计算机科学与信息工程学院, 甘肃 兰州 730124)
(E-mail: jswwk@xbmu.edu.cn)

**摘 要**: 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态, 称环 $R$ 是 $\alpha$- 斜 Armendariz 环, 如果在 $R[x;\alpha]$ 中, $(\sum_{i=0}^m a_ix^i)\ (\sum_{j=0}^n b_jx^j)=0$, 那么 $a_i\alpha^i(b_j)=0$, 其中 $0\le i\le m, 0\le j\le n$. 设 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环, 则 $R$ 上的上三角矩阵环的子环 $W_n(p,q)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

**关键词**: $\alpha$- 斜 Armendariz 环; $\alpha$-rigid 环; 上三角矩阵环.
**MSC(2000)**: 16N60; 16P60
**中图分类**: O153.3

## 1 引 言

本文提到的环均指有单位元的结合环, 称环 $R$ 是 reduced 环, 如果 $R$ 中没有非零的幂零元. 称环 $R$ 是 Armendariz 环, 如果 $f(x)=\sum_{i=0}^m a_ix^i\in R[x]$, $g(x)=\sum_{j=0}^n b_jx^j\in R[x]$, 满足 $f(x)g(x)=0$, 则 $a_ib_j=0\ (0\le i\le m, 0\le j\le n)$. 采用名称 "Armendariz" 是因为 Armendariz 发现 reduced 环满足这个条件 [1]. 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态, 按照 Chan et al.[2], 称环 $R$ 是 $\alpha$- 斜 Armendariz 环, 如果 $f(x)=\sum_{i=0}^m a_ix^i\in R[x;\alpha]$, $g(x)=\sum_{j=0}^n b_jx^j\in R[x;\alpha]$, 满足 $f(x)g(x)=0$, 则 $a_i\alpha^i(b_j)=0\ (0\le i\le m, 0\le j\le n)$. 显然 $\alpha$- 斜 Armendariz 环的子环是 $\alpha$- 斜 Armendariz 环. 按照 Krempa[3], 称环 $R$ 的一个自同态 $\alpha$ 是 rigid 同态, 如果由 $a\alpha(a)=0$, 可推出 $a=0$, 其中 $a\in R$. 按照 Chan et al.[2], 称环 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环, 如果存在环 $R$ 的一个 rigid 同态 $\alpha$. 设 $M_n(R)$ 是 $n$ 阶矩阵环, 其中 $n$ 是一个正整数, 按照 Chan et al.[2], 环 $R$ 的一个自同态 $\alpha$ 可扩展为环 $M_n(R)$ 的一个自同态 $\overline{\alpha}: M_n(R)\to M_n(R), \overline{\alpha}((a_{ij}))=(\alpha(a_{ij}))$. 文献 [2, Example 18] 证明了 $\alpha$-rigid 环 $R$ 上的上三角矩阵环

$$R_n=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix} | a_0, a_{ij}\in R\right\}$$

在 $n\ge 4$ 时不是 $\bar{\alpha}$- 斜 Armendariz 环. 本文证明了 $R_n$ 的一类特殊子环 $W_n(p,q)$ 是 $\bar{\alpha}$- 斜 Armendariz 环, 从而推广了 Chan et al[2, Proposition 17] 的结论.

## 2 主要结果

**引理 2.1**[2, Proposition 3] 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态, 那么 $R[x;\alpha]$ 是 reduced 环当且仅当 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环.

**收稿日期**: 2005-08-10; **接受日期**: 2006-07-02

**推论 2.2**　设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态，若 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环，则 $R$ 是 reduced 环.

结合文献 [2, Corollary 4] 可得：

**推论 2.3**　设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态, 若 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环, 则 $R$ 是 $\alpha$- 斜 Armendariz 环.

**定理 2.4**　设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态，$R$ 是 $\alpha$-rigid 环. 对于 $1\le p\le q\le n$, 记

$$W_n(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix} | a_0, a_{ij}\in R\right\},$$

当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$; 当 $i<j, j\ne p,q$ 时，有 $a_{ij}=0$; 当 $i=j$ 时，有 $a_{ij}=a_0$, 其中 $i,j=1,2,\dots,n$, 则当 $n\ge 3$ 时，$W_n(p,q)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

**证明**　很明显 $W_n(p,q)$ 是环，设

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix}\in W_n(p,q).$$

$$\begin{pmatrix} b_0 & 0 & \cdots & b_{1p} & \cdots & b_{1q} & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2p} & \cdots & b_{2q} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_0\end{pmatrix}\in W_n(p,q),$$

记加法和乘法分别为：

$$\begin{aligned}&(a_0,a_{1p},a_{2p},\dots,a_{p-1,p},a_{1q},a_{2q},\dots,a_{q-1,q})+(b_0,b_{1p},b_{2p},\dots,b_{p-1,p},b_{1q},b_{2q},\dots,b_{q-1,q})\\ &\quad=(a_0+b_0,a_{1p}+b_{1p},a_{2p}+b_{2p},\dots,a_{p-1,p}+b_{p-1,p},a_{1q}+b_{1q},a_{2q}+b_{2q},\dots,a_{q-1,q}+b_{q-1,q}),\\ &(a_0,a_{1p},a_{2p},\dots,a_{p-1,p},a_{1q},a_{2q},\dots,a_{q-1,q})(b_0,b_{1p},b_{2p},\dots,b_{p-1,p},b_{1q},b_{2q},\dots,b_{q-1,q})\\ &\quad=(a_0b_0,a_0b_{1p}+a_{1p}b_0,a_0b_{2p}+a_{2p}b_0,\dots,a_0b_{p-1,p}+a_{p-1,p}b_0,a_0b_{1q}+a_{1p}b_{pq}+\\ &\qquad a_{1q}b_0,a_0b_{2q}+a_{2p}b_{pq}+a_{2q}b_0,\dots,a_0b_{p-1,q}+a_{p-1,p}b_{pq}+a_{p-1,q}b_0,a_0b_{pq}+\\ &\qquad a_{pq}b_0,a_0b_{p+1,q}+a_{p+1,q}b_0,\dots,a_0b_{q-1,q}+a_{q-1,q}b_0).\end{aligned}$$

因此 $W_n(p,q)$ 上的任意多项式可表示为：

$$(h_0(x),h_{1p}(x),h_{2p}(x),\dots,h_{p-1,p}(x),h_{1q}(x),h_{2q}(x),\dots,h_{q-1,q}(x)).$$

设

$$\begin{aligned}f(x)=&(f_0(x),f_{1p}(x),f_{2p}(x),\dots,f_{p-1,p}(x),f_{1q}(x),f_{2q}(x),\dots,f_{q-1,q}(x)),\\ g(x)=&(g_0(x),g_{1p}(x),g_{2p}(x),\dots,g_{p-1,p}(x),g_{1q}(x),g_{2q}(x),\dots,g_{q-1,q}(x))\in W_n(p,q)[x;\overline{\alpha}],\end{aligned}$$

并且 $f(x)g(x)=0$, 则有下列等式：

$$f_0(x)g_0(x)=0, \tag{0}$$

$$f_0(x)g_{1p}(x)+f_{1p}(x)g_0(x)=0, \tag{1.1}$$

$$f_0(x)g_{2p}(x)+f_{2p}(x)g_0(x)=0, \tag{2.1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_0(x)g_{p-1,p}(x)+f_{p-1,p}(x)g_0(x)=0, \tag{(p-1).1}$$

$$f_0(x)g_{1q}(x)+f_{1p}(x)g_{pq}(x)+f_{1q}(x)g_0(x)=0, \tag{1.2}$$

$$f_0(x)g_{2q}(x)+f_{2p}(x)g_{pq}(x)+f_{2q}(x)g_0(x)=0, \tag{2.2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_0(x)g_{p-1,q}(x)+f_{p-1,p}(x)g_{pq}(x)+f_{p-1,q}(x)g_0(x)=0, \tag{(p-1).2}$$

$$f_0(x)g_{pq}(x)+f_{pq}(x)g_0(x)=0, \tag{p.2}$$

$$f_0(x)g_{p+1,q}(x)+f_{p+1,q}(x)g_0(x)=0, \tag{(p+1).2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_0(x)g_{q-1,q}(x)+f_{q-1,q}(x)g_0(x)=0, \tag{(q-1).2}$$

由 (0) 式和引理 2.1 得， $g_0(x)f_0(x)=0$. $(1.1)\times f_0(x)$ 得， $f_0(x)g_{1p}(x)f_0(x)=0$, 因 $R[x;\alpha]$ 是 reduced 环，所以 $f_0(x)g_{1p}(x)=0$, 因此 $f_{1p}(x)g_0(x)=0$, 由引理 2.1 得， $g_0(x)f_{1p}(x)=0$, 同理可得，对 $2\le k\le p-1$, 有 $f_0(x)g_{kp}(x)=0, f_{kp}(x)g_0(x)=0$, 对 $p\le s\le q-1$, 有 $f_0(x)g_{sq}(x)=0, f_{sq}(x)g_0(x)=0$, 又由引理 2.1 得，对 $p\le s\le q-1$, 有 $g_{sq}(x)f_0(x)=0$. $(1.2)\times f_0(x)$ 得， $f_0(x)g_{1q}(x)f_0(x)=0$, 所以 $f_0(x)g_{1q}(x)=0$, 因此 (1.2) 式变为：

$$f_{1p}(x)g_{pq}(x)+f_{1q}(x)g_0(x)=0, \tag{1.2.1}$$

$(1.2.1)\times f_{1p}(x)$ 得， $f_{1p}(x)g_{pq}(x)f_{1p}(x)=0$, 所以 $f_{1p}(x)g_{pq}(x)=0$, 因此 $f_{1q}(x)g_0(x)=0$. 同理可得，对 $2\le k\le p-1$, 有 $f_0(x)g_{kq}(x)=0, f_{kp}(x)g_{pq}(x)=0, f_{kq}(x)g_0(x)=0$. 现在设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{l}\begin{pmatrix} a_0^{(i)} & 0 & \cdots & a_{1p}^{(i)} & \cdots & a_{1q}^{(i)} & \cdots & 0 \\ 0 & a_0^{(i)} & \cdots & a_{2p}^{(i)} & \cdots & a_{2q}^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0^{(i)} \end{pmatrix} x^i,$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} b_0^{(j)} & 0 & \cdots & b_{1p}^{(j)} & \cdots & b_{1q}^{(j)} & \cdots & 0 \\ 0 & b_0^{(j)} & \cdots & b_{2p}^{(j)} & \cdots & b_{2q}^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_0^{(j)} \end{pmatrix} x^j,$$

其中 $f_0(x)=\sum_{i=0}^{l}a_0^{(i)}x^i, g_0(x)=\sum_{j=0}^{m}b_0^{(j)}x^j$, 对 $1\le k\le p-1, f_{kp}(x)=\sum_{i=0}^{l}a_{kp}^{(i)}x^i$, $g_{kp}(x)=\sum_{j=0}^{m}b_{kp}^{(j)}x^j$, 对 $1\le s\le q-1$, $f_{sq}(x)=\sum_{i=0}^{l}a_{sq}^{(i)}x^i, g_{sq}(x)=\sum_{j=0}^{m}b_{sq}^{(j)}x^j$, 因为 $R[x;\alpha]$ 是

reduced 环, 因此对 $1\le k\le p-1, 1\le s\le q-1$, 有 $a_0^{(i)}\alpha^i(b_0^{(j)})=0, a_0^{(i)}\alpha^i(b_{kp}^{(j)})=0, a_{kp}^{(i)}\alpha^i(b_0^{(j)})=0, a_0^{(i)}\alpha^i(b_{sq}^{(j)})=0, a_{sq}^{(i)}\alpha^i(b_0^{(j)})=0, a_{kp}^{(i)}\alpha^i(b_{pq}^{(j)})=0$. 故对 $0\le i\le l, 0\le j\le m$, 有

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} & 0 & \cdots & a_{1p}^{(i)} & \cdots & a_{1q}^{(i)} & \cdots & 0 \\ 0 & a_0^{(i)} & \cdots & a_{2p}^{(i)} & \cdots & a_{2q}^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^i(\begin{pmatrix} b_0^{(j)} & 0 & \cdots & b_{1p}^{(j)} & \cdots & b_{1q}^{(j)} & \cdots & 0 \\ 0 & b_0^{(j)} & \cdots & b_{2p}^{(j)} & \cdots & b_{2q}^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_0^{(j)} \end{pmatrix})=0.$$

因此，当 $n\ge 3$ 时， $W_n(p,q)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

**推论 2.5**[2,Propersition 17] 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态， $R$ 是 $\alpha$-rigid 环，则

$$W_3(2,3)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}|a,b,c,d\in R\right\}$$

是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

**推论 2.6** 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态， $R$ 是 $\alpha$-rigid 环．记

$$W_n(n-1,n)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}|a_0,a_{ij}\in R\right\},$$

当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$; 当 $i=j$ 时，有 $a_{ij}=a_0$; 当 $i<j, j\ne n-1,n$ 时，有 $a_{ij}=0$, 其中 $i,j=1,2,\ldots,n$, 则当 $n\ge 3$ 时， $W_n(n-1,n)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

对 $1\le p\le n$, 记

$$W_n(p)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & a_{1p} & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}|a_0,a_{ij}\in R\right\},$$

当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$; 当 $j>i, j\ne p$ 时，有 $a_{ij}=0$; 当 $i=j$ 时，有 $a_{ij}=a_0$, 其中 $i,j=1,2,\ldots,n$, 因为， $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环的子环是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环, 所以作为 $W_n(p,q)$ 的子环，当 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环时， $W_n(p)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环．类似于定理 2. 4 的证明，有

**定理 2.7** 设 $\alpha$ 是环 $R$ 的一个自同态， $R$ 是 $\alpha$ -rigid 环，对 $1\leq p,q\leq n$, 不妨设 $p\leq q$, 记

$$W_n^T(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{p,p+1} & \cdots & a_{pq} & a_{p,q+1} & \cdots & a_{p,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{q,q+1} & \cdots & a_{q,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} | a_0, a_{ij}\in R\right\},$$

当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$, 当 $j>i, i\neq p,q$ 时，有 $a_{ij}=0$, 当 $i=j$ 时，有 $a_{ij}=a_0$, 其中 $i,j=1,2,\ldots,n$, 则当 $n\geq 3$ 时， $W_n^T(p,q)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

对 $1\leq p\leq n$, 记

$$W_n^T(p)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{p,p+1} & \cdots & a_{p,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} | a_0, a_{ij}\in R\right\},$$

当 $i>j$ 时， $a_{ij}=0$; 当 $j>i, i\neq p$ 时， $a_{ij}=0$; 当 $i=j$ 时， $a_{ii}=a_0, i,j=1,2,\ldots,n$, 那么作为 $W_n^T(p,q)$ 的子环，当 $R$ 是 $\alpha$-rigid 环时， $W_n^T(p)$ 是 $\overline{\alpha}$- 斜 Armendariz 环.

## 参考文献:


[1] ARMENDARIZ E P. *A note on extensions of Baer and P.P.-rings* [J]. J. Austral. Math. Soc., 1974, **18**: 470–473.

[2] HONY C Y, KIM N K, KWAK T K. *On skew Armendariz rings* [J]. Comm. Algebra, 2003, **31**(1): 103–122.

[3] KREMPA J. *Some examples of reduced rings* [J]. Algebra Colloq., 1996, **3**(4): 289–300.


# Skew Armendariz Property of A Class of Upper Triangular Matrix Rings


*WANG Wen-kang*

(School of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Gansu 730124, China )



**Abstract**: Let $\alpha$ be an endomorphism of a ring $R$. A ring $R$ is called $\alpha$-skew Armendariz, if $(\sum_{i=0}^m a_ix^i)(\sum_{j=0}^n b_jx^j)=0$ in $R[x;\alpha]$, then $a_i\alpha^i(b_j)=0$, where $0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n$. Let $R$ be $\alpha$-rigid. Then a class of subrings $W_n(p,q)$ of upper triangular matrix rings are $\overline{\alpha}$-skew Armendariz.



**Key words**: $\alpha$-skew Armendariz ring; $\alpha$-rigid ring; upper triangular matrix ring.