文章编号:1002-2082(2007)02-0146-05

离散分数阶傅里叶变换快速算法的DSP详细实现

陈 鹏[1], 侯朝焕[1], 梁亦慧[2], 马晓川[1]
(1.中国科学院 声学研究所, 北京 100080; 2.船舶系统工程部, 北京 100036)

摘 要: 为满足在数字信号处理器DSP(digital signal processor)上进行离散分数阶傅里叶变换DFRFT(discrete fractional fourier transform)实时计算的要求,通过对多种DFRFT计算方法进行比较,选择Ozaktas提出的DFRFT快速算法进行基于DSP的详细实现处理。在对该快速算法进行理论分析的基础上,将快速算法的计算过程进行优化配置,并给出完整的计算量统计结果。在保证精度要求的情况下,提出的详细实现方法将快速算法的实数乘法计算量减至最小。工程实际应用表明:该方法满足DSP运算精度和实时性要求。

关键词: 分数阶傅里叶变换; 离散分数阶傅里叶变换; 快速傅里叶变换; DSP
中图分类号: TN911.72　　**文献标志码:** A

Implementation of fast algorithm of discrete fractional Fourier transform on DSP

CHEN Peng[1], HOU Chao-huan[1], LIANG Yi-hui[2], MA Xiao-chuan[1]
(1. Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. Systems Engineering Research Institute, Beijing 100036, China)

Abstract: In order to meet the requirement of DFRFT(discrete fractional Fourier transform) real-time computation on DSP(digital signal processor), several DFRFT computation methods are compared and the Ozaktas's DFRFT fast algorithm is chosen to do the implementation processing based on DSP. On the basis of theoretical analysis for the fast algorithm, the computation procedure of fast algorithm is optimized, and the complete statistical result of the implementation is given. The amount of real number multiplication computation can be minimized by the proposed fast algorithm for the given accuracy. Engineering practice proves that this solution meets the accuracy requirement and real-time property of DSP computation.

Key words: fractional Fourier transform; discrete fractional Fourier transform; fast Fourier transform; DSP

引言

分数阶傅里叶变换(fractional Fourier transform,FRFT)作为傅里叶变换的广义形式,可以应用于光学信号处理,调频声信号检测、时频分析在内的多个信号处理领域。各种离散分数阶傅里叶变换DFRFT算法的发展进一步促进了分数阶傅里叶变换在这些领域中的发展。对于连续函数,其阶连续FRFT变换[1]表达式如下:

收稿日期:2006-09-09; 修回日期:2006-11-08
基金项目:国家自然科学基金资助(60472101)
作者简介:陈鹏(1978—),男,浙江人,中科院声学研究所博士研究生,主要从事声学信号处理;E-mail:chenpeng3361@163.com 侯朝焕(1936—),男,中科院院士,主要从事声学信号处理及大规模专用集成芯片设计研究工作。

$$s_p(t)=\{F^p s\}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_a(t,u)s(u)\mathrm{d}u \quad (1)$$

式中 $a=p\pi/2$ 在一些文献中定义为旋转角度。FRFT 变换的核函数 $K_a(t,u)$定义为

$$K_a(t,u)=\begin{cases}A_a\exp(\mathrm{j}\pi(t^2\cot a+u^2\cot a-\\ \quad 2ut\csc a)),\ a\neq k\pi\\ \delta(t-u),\ a=2k\pi\\ \delta(t+u),\ a=(2k+1)\pi\end{cases} \quad (2)$$

式中:

$$A_a=\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi\mathrm{sgn}(\sin a)/4+\mathrm{j}a/2)}{|\sin a|^{1/2}} \quad (3)$$

分数阶傅里叶变换的几个重要特性[2]:

1) 周期性 $F^{4l+p}s(t)=F^p s(t)$,公式中 l 为整数。

2) 可逆性和酉性 $(F^p)^{-1}=F^{-p}=(F^p)^+$,其中"+"代表核函数 $K_a(t,u)$共轭变量转置;

3) 交换性和叠加性 $F^{p1}F^{p2}=F^{p2}F^{p1}=F^{p1+p2}$;

4) $p=0$, $F^p s(t)=s(t)$; $p=1$, $F^p s(t)=\mathrm{FT}(s(t))$; $p=2$, $F^p s(t)=s(-t)$; $p=3$, $F^p s(t)=\mathrm{IFT}(s(t))$。

为了处理离散信号,必须采用离散形式的分数阶傅里叶变换FRFT。各种DFRFT 算法的出现促进了分数阶傅里叶变换在数字信号处理领域的应用。

Santhanam 等人[3]利用标准DFT 矩阵 F 的指数项线性组合来计算 DFRFT,缺点是计算结果与连续变换误差较大。其表达式为

$$F^a=k_0(a)F^0+k_1(a)F^1+k_2(a)F^2+k_3(a)F^3 \quad (4)$$

式中:

$$k_0(a)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}a})\cos a$$

$$k_1(a)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}a})\sin a$$

$$k_2(a)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}a})\cos a$$

$$k_3(a)=\frac{1}{2}(-1-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}a})\cos a$$

计算 DFRFT 方法的一个重要分支就是采用基于DFT 矩阵特征分解的方法[2,4]。该类型的算法虽然运算量不是最小的,但能满足一定的精度要求,并且还出现了一些优化算法[4]来减小计算量。

Ozaktas 等人[5]提出的快速算法,是通过数学推导将时连续FRFT 运算的离散采样巧妙地转化为调制后离散信号与chirp 信号时域卷积的形式,从而有效地利用FFT(fast Fourier transform)运算来减小运算量。虽然该快速算法也存在一定缺点,例如,由于核函数$K_a(t,u)$不是一个带限函数,对其采样会存在频带混叠,但仍是公认的一种高效算法。本文在对该快速算法进行理论分析的基础上,给出了可以直接应用于数字信号处理器 DSP 上 DFRFT 计算的详细实现。

1 快速算法的理论基础

快速算法对应到频域为频谱相乘形式,这样就可以通过FFT 运算减小运算量。快速算法要求通过量纲归一化(dimensional normalization)将信号的时域和频域转换成无量纲量(dimensionless quantity),其理论分析如下。

理论上,除零信号外任何信号的时域和频域不可能同时具有紧凑性(compactness),但实际处理中可以近似认为信号同时具有紧凑性,在时域限定为$[-\Delta t/2,\Delta t/2]$,频域限定为$[-\Delta f/2,\Delta f/2]$。定义信号 $s(t)$ 的时宽带宽积(time-bandwidth product)$N=\Delta t\Delta f$,选择尺度因子(scaling parameter)$g=\sqrt{\Delta t/\Delta f}$定义新的尺度化坐标$x=t/g$ 和 $v=fg$,从而实现无量纲化的新坐标系(x,y),将信号 Wigner 分布限定在以原点为中心,半径$\Delta x=\sqrt{N}$的范围内。对归一化后的信号以$1/\Delta x$ 的间隔进行采样,以保证采样后信号的 Wigner 分布(即信号的能量)限定在这个范围内。为了得到FRFT 后信号 $s_p(t)$的 Wigner 分布情况,引入 FRET 和 Wigner 分布的重要关系式[6]:

$$W_{S_p}(t,f)=W_s(t\cos a-f\sin a,t\sin a+f\cos a) \quad (5)$$

式中:$a=p\pi/2$ 为旋转角度; $s_p(t)$为信号$s(t)$的 p 阶傅里叶变换,信号 $s(t)$ 的 Wigner 分布函数; $W_s(t,f)=\int s(t+\tau/2)s^*(t-\tau/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$; $W_{S_p}(t,f)$为$s_p(t)$的Wigner 分布函数。该表达式的物理含义为信号 p 阶连续分数阶傅里叶变换 $s_p(t)$的 Wigner 分布相当于信号 Wigner 分布进行角度为 $a=p\pi/2$ 的旋转变化。因此量纲归一化可确保分数阶傅里叶变换后信号的能量也限定在以原点为中心,半径 $\Delta x=\sqrt{N}$ 的范围内。

在实际处理中,对于观测时间为T和采样率为f_s 的离散观测信号,直接取 $\Delta t=T$,$\Delta f=f_s$,因此采样点数 $N=\Delta t\Delta f=Tf_s$ 等于观测点数。由于在采样前要求对信号进行归一化处理,所以对于实际

应用中得到的离散观测信号 $s(k)$（其中 $k=0\sim(K-1)$）直接用于DFRFT运算。

2　快速算法的详细实现

经过数学推导后，快速算法的核心表达式（即 $0.5\leqslant|p|\leqslant1.5$ 时，连续FRFT运算的离散采样）为

$$\{F^p s\}\left(\frac{A_a}{2\Delta x}\right)=\frac{A_a}{2\Delta x}e^{i\pi(g-h)\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2}\sum_{n}^{N}e^{i\pi(g-h)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2}s'\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)=cf_1(m)\sum_{n=N}^{N}f_2(m-n)f_1(n)s'(n)=cf_1(m)\sum_{n=-N}^{N}f_2(m-n)f_3(n),m=-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,N \tag{6}$$

式中 $g=\cot a$，$h=\csc a$，$c=\dfrac{A_a}{2\Delta x}$，$f_1(n)=e^{i\pi(g-h)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2}$，$f_2(n)=e^{i\pi h\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2}$，$f_3(n)=f_1(n)s'(n)$，$s'(n)=s'\left(\dfrac{n}{2\Delta x}\right)$ 为离散观测信号 $s(k)$（$k=0\sim(K-1)$）的插值信号。从(6)式可以看出，快速算法的核心就是利用FFT运算完成 $f_3(n)$ 和 $f_2(n)$ 的卷积运算，并将计算量从 $O(N^2)$ 降低到 $O(N\log_2 N)$。算法流程如下：

1）阶数处理。由于表达式(6)的数学推导是基于 $0.5\leqslant|p|\leqslant1.5$ 的范围，所以，对于变换阶数 p 不在该范围的DFRFT计算可以根据前述FRFT的周期性、叠加性以及在特殊阶数上的变换特性，利用FFT，反FFT和数据翻转来完成数据的预处理，最终将变换阶数 p 限制在[0.5,1.5]范围内，具体流程见图1所示。需要注意利用FFT和反FFT对数据进行预处理时的移位问题。虽然原始观测信号的范围为 $[0,\cdots,K-1]$，但在分数阶变换处理中 $s(k)$ 是作为 $[-N/2,\cdots,N/2]$ 的索引[6]存放的。由于FFT和反FFT处理的信号索引范围为 $[-N/2,\cdots,N/2]$，而分数阶变换处理的信号索引范围为 $[-N/2,\cdots,N/2]$，因此在FFT处理前要将数据从 $[-N/2,\cdots,N/2]$ 形式转换成 $[0,\cdots,N-1]$，在FFT和反FFT处理后再将数据搬移回 $[-N/2,\cdots,N/2]$ 形式。如果观测信号长度 K 为偶数，处理前将后面的 $[K/2,\cdots,K-1]$ 点数据搬移到前面，处理后将这段信号又放回原位；如果观测信号长度 K 为奇数，对 $[(K+1)/2,\cdots,K-1]$ 点数据作相同处理。

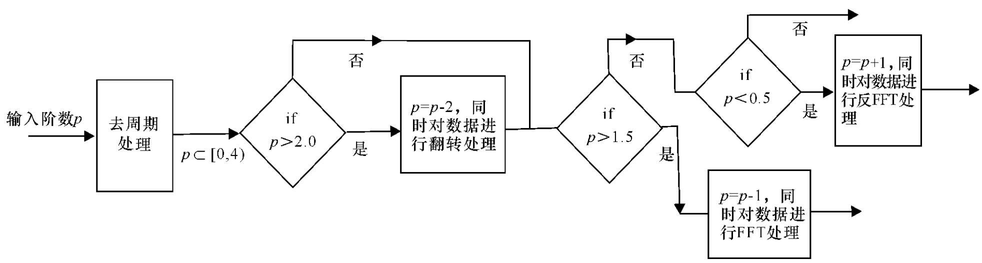

图1　阶数处理流程图

Fig. 1　Flow chart of order number processing

2）插值处理。实际应用中，输入信号为 K 点离散观测信号 $s(k)$（其中 $k=0\sim(K-1)$），可认为其满足量纲归一化条件，则有 $s(k)=s\left(\dfrac{k}{\Delta x}\right)$。对输入信号 $s(k)$ 进行插值处理后返回 $(2K-1)$ 点的插值信号为 $s'(n)=s'\left(\dfrac{n}{2\Delta x}\right)$，其中 $n=-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,N$（取 $N=K-1$）。不论输入信号 $s(k)$ 长度为奇数点还是偶数点，经过插值处理后得到 $(2N+1)$ 点插值信号为 $s'(n)$。本文采用拉格朗日方法[7]对信号 $s(k)$ 进行插值处理。对于 K 点信号，要在信号中间插入 $(K-1)$ 个点，插值后信号的表达式为

$$S'(n)=\begin{cases}s(k),\ n=-N,-N+2,\cdots,N-2,N;\ k=(n+N)/2\\ [5s(0)+15s(1)-5s(2)+s(3)]/16,\ n=-N+1\\ [-s(k-1)+9s(k)+9s(k+1)-s(k+2)]/16,\ n=-N+3,-N+5,\cdots,N-3;\ k=(n+N-1)/2\\ [s(K-4)-5s(K-3)+15s(K-2)+5s(K-1)]/16,\ n=N-1\end{cases} \tag{7}$$

3）卷积处理。$(2N+1)$ 点插值后信号 $s'(n)$ 与 $f_1(n)$ 相乘可构成 $(2N+1)$ 点 $f_3(n)$，计算 $f_3(n)$ 和 $f_2(n)$ 卷积结果，计算范围为 $m=-N,\cdots,N$。选取 $f_2(n)$ 的最短长度为 $(4N+1)$，示意图如图2所示。

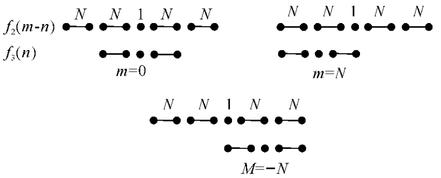

图2 卷积处理示意图

Fig. 2 Diagrammatic sketch of convolution processing

采用FFT运算完成$f_3(n)$和$f_2(n)$卷积计算,卷积结果的长度为$(6N+1)$,所以FFT长度L为大于$(6N+1)$的2的整数次幂,即$L=2^{\mathrm{int}(\log_2(6N+1))+1}$。对两组FFT数据相乘结果进行反FFT运算,取反FFT运算的前$(6N+1)$值作为卷积结果。

4) 抽取处理。在$(6N+1)$点的卷积结果中选取$m=-N,\cdots,N$的数据,对应的存放位置为$[2N+1,4N+1]$。同时考虑到输出结果要从$(2N+1)$点中抽取,所以取$(2N+1):2:(4N+1)$点的$K=N+1$点数据。

5) 系数处理。对抽取出的$K=N+1$点数据根据(6)式乘以对应的系数c和$f_1(m)$,可得到最终的离散分数阶傅里叶变换结果$s_p(k)$, $k=0,\cdots,K-1$。

整个算法详细实现处理的系统流程如图3所示。

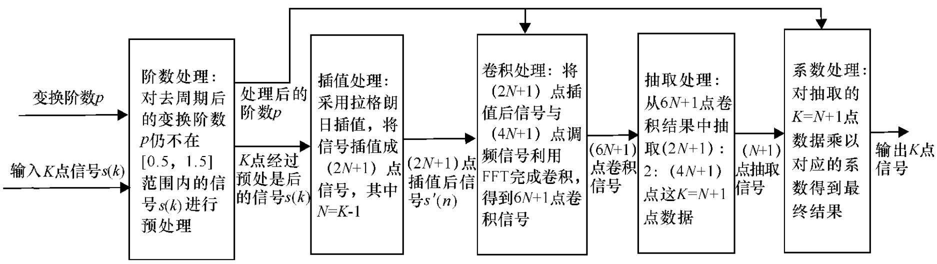

图3 快速算法详细实现流程图

Fig. 3 Flow chart of fast algorithm's detailed implementaiton

3 快速算法详细实现的计算量分析

笔者对快速算法详细实现的计算量分析只针对p在$[0.5,1.5]$范围内,并且输入信号为复数信号这种情况。此外$f_1(n)$,$f_2(n)$,c和A_a等向量和系数的计算量不考虑,因为在DSP处理中这些辅助量在运算前已计算完成并存放在缓存里。对于K点输入信号,定义$N=K-1$, $L=2^{\mathrm{int}(\log_2(6N+1))+1}$。笔者分析计算量要求限制$p$在$[0.5,1.5]$范围内的原因是因为对于$K$为非2整数次幂的情况下,FFT运算量与$K$有很大关系,很难确定实际计算量。当去周期后$p$在$[0.5,1.5]$范围内,各步骤的计算量统计见表1。

表1 快速算法各处理步骤实数乘法计算量统计结果

Table 1 Real multiplicaition amount's statistical result of fast algorithm's every procedure step

处理步骤	实数乘法计算量分析
(1) 阶数处理	0
(2) 插值处理	$8N$
(3) 卷积处理	$4L\log_2L+4(L+2N+1)$
(4) 抽取处理	0
(5) 系数处理	$4K$

表1中卷积处理的实数乘法计算量分析:对于长度为L的FFT运算,其复数乘法量为$\frac{L}{2}\log_2L$;一次复数乘法要进行4次实数乘法运算。卷积计算要进行1次$(2N+1)$点的乘法,2次L点FFT运算,1次L点的复数乘法和1次L点反FFT运算。由于在DSP计算中,$f_2(n)$的FFT可以预先计算,最终卷积计算的实数乘法计算量为$4L\log_2L+4(L+2N+1)$。

综上所述,p在$[0.5,1.5]$范围内,对输入信号为K点复数信号情况,快速算法详细实现的总实数乘法计算量为$(4L\log_2L+4L+16N+4K+4)$。

4 结论

在对DFRFT快速算法理论分析的基础上,给出了可以直接应用于DSP处理的快速算法详细实现的步骤,并给出了该详细实现的计算量分析。在保证精度要求的条件下,提出的详细实现处理方法将快速算法的实数乘法计算量减至最小。该详细实现方法已在工程实际项目中得到应用,满足了在DSP上运行处理的精度和实时性要求。

对于分数阶傅里叶变换这一数学工具,可以应用于光学、声学和通信在内的多个领域。例如,对于

常用的信号检测和波束形成算法[8],可以采用分数阶傅里叶变换达到更高的精度。随着离散分数阶傅里叶变换算法的发展,分数阶傅里叶变换的应用将会更加广泛。

参考文献:

[1] CANDAN C, KUTAY M A, HALDUN M. The discrete fractional Fourier transforms[J]. IEEE Trans On Signal Processing, 2000,48(5):1329-1337.

[2] PEI S C, YEH M H, TSENG C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999,47(5):1335-1348.

[3] SANTHANAM B, MCCLELLAN J H. The discrete rotational Fourier transform [J]. IEEE Trans on Signal Processing,1996,44(4):994-998.

[4] VARGAS-RUBIO J G, SANTHANAM B. On the multiangle centered discrete fractional Fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005,12(4):273-276.

[5] OZAKTAS H M,ARIKAN O,KUTAY M A. Digital computation of the fractional Fourier transformation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996,44(9):2141-2150.

[6] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994,42(11):3084-3091.

[7] 聂铁军, 侯谊, 郑介庸. 数值计算方法[M]. 西安:西北工业大学出版社,1990.
NIE Tie-jun, HOU Yi, ZHENG Jie-yong. Numerical computation methods[M]. Xi'an:Northwestern Polytechnical University Press, 1990. (in Chinese)

[8] 梁亦慧. 数字波束形成算法仿真实现[M]. 应用光学, 2003,24(3):43- 45.
LIANG Yi-hui. Simulation of digital beamformation algorithm[J]. Journal of Applied Optics, 2003:24(3):43-45. (in Chinese)

以色列研发新一代海上IRST系统

2006年底,以色列拉法尔军械发展管理有限公司公布了其正在开发的先进海上红外凝视跟踪(infra-red stare and track,IRST)系统的详细情况。这种名为“海上观察员”(Sea Spotter)的系统可定位从水平面到高空的水面和机载目标、超音速或低速目标、舰艇上空及周围的小型目标。

“海上观察员”系统采用2个(3～5)μm中波红外锑化铟凝视焦平面阵列传感器,并利用图像处理算法分析目标运动并确定探测到的是否是敌方目标。系统的实现以两项专利为基础,第一项是在高帧频下几个望远镜之间的分时,另外一项则涉及中央闭环冷却系统。

“海上观察员”可以说是上一代的红外搜索跟踪((infra-red search and track,IRST))系统的升级版。前后两代系统的名称缩写虽然相同,但从全称中则可以看出两种系统的细微差别。新一代IRST是通过连续 性监视传感器实现舰艇周围的威胁和目标的自动探测,而上一代的IRST则是通过搜索或扫描才能够完成。据拉斐尔公司称,与上一代IRST系统相比,新一代虚警率大大降低,达到了每24 h才有1次的水平。

“海上观察员”目前尚处于研制中期,按计划将于2007年进行首次系统测试。据称,“海上观察员”适用于所有的海军舰艇。“世界上许多国家的海军都发现了新的IRST系统的优势,它不发射任何信号,能够使舰艇在不被敌人发现的情况下‘看见’对方”,拉斐尔公司已经向若干国家的海军推介了“海上观察员”。

(昌　强)