第27卷第2期 数学研究与评论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0339-06 **文献标识码**: **A**

算子值条件自由随机变量

孟 彬
(南京航空航天大学理学院，江苏 南京 210016)
(E-mail: b.meng@nuaa.edu.cn)

摘 要: 本文把 R.Speicher 的条件自由的概念推广到算子值非交换概率空间中，并利用累积函数给出一个等价定义，进而很容易地得到满足条件自由的随机变量的 Voiculescu 加法卷积公式.

关键词: 算子值非交换概率空间；条件自由；加法卷积.
MSC(2000): 46L09; 46L54
中图分类: O177.1

1 引 言

自由概率论是从二十世纪八十年代发展起来的算子代数的一个新分支，它的主要创立者是 Dan Voiculescu. 自由概率是一种非交换的概率，它用自由性来代替经典概率中的独立性；用半圆分布来代替 Gauss 分布并引入了自由熵等概念. 利用这一理论中有关随机矩阵和自由熵的有关结果人们已经成功的解决了 von Neumann 代数中的许多经典问题，从而成为研究算子代数的强有力的工具. 因此这一理论日益受到人们的重视，在近几届的国际数学家大会上有多位学者应邀作有关自由概率论方面的报告.

本文要讨论的主要是算子值自由概率中的问题，也就是说，这时候随机变量的期望取值在一个算子代数中，而不再是一个纯量. 实际上， D.Voiculescu 在创立自由概率论之始，就平行的引进了算子值自由概率的一些基本概念和结果 [1]，但是由于后来没有太多的突破，故目前这方面的研究相对比较少. 自由概率论中最重要的概念是自由. 这个概念是按照由一个态产生的约化自由积定义的. 对于两个态的情况， R.Speicher 等人定义了条件自由 [2]. 本文将条件自由的概念推广到算子值非交换概率空间中，并利用 R.Speicher 的可乘函数理论给出条件自由的一个等价定义. 利用这个定义，可以很容易得到条件自由的随机变量的 Voiculescu 加法卷积公式.

2 算子值非交换概率空间与可乘函数

算子值非交换概率空间就是把期望的取值由数改为算子. 可乘函数是研究算子值非交换概率空间的重要工具，有关这方面的一些结果可参见 [3]. 这里仅列出一些基本概念.

定义 2.1 设 A 是单位 C^*- 代数， $1\in B$ 是 A 的子代数， $\varphi: A\longrightarrow B$ 是条件期望，则称 (A,φ) 是 B- 值或算子值非交换概率空间， A 中的元素称为随机变量.

任给 $a\in A$, $\mu_a: B\langle X\rangle\longrightarrow B$, 定义为 $\mu_a(P(X))=\varphi(P(a)), \forall P(X)\in B\langle X\rangle$, 称为 a 的分布，显然它是条件期望.

收稿日期: 2005-03-02; **接受日期**: 2005-06-27
基金项目: 南京航空航天大学创新基金.

$\forall b_0, b_1, \ldots, \in B$, 称 $\mu_a(b_0 X b_1 X \cdots X b_n)$ 是 a 的阶矩. 记 $\Sigma_B := \{\mu | \mu : B\langle X\rangle \longrightarrow B\text{是条件期望}\}$.

定义 2.2 令 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}, \pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ 称为 $[n]$ 的划分，若 V_i 都是 $[n]$ 的非空子集，$\bigcup_{i=1}^p V_i = [n]$, 且互不相交.

$\pi = \{V_1, \ldots, V_p\}$ 称为非交叉划分，若 $\forall i, j = 1, 2, \ldots, p$; $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, (v_1 < \cdots < v_n); V_j = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}, (\omega_1 < \cdots < \omega_m)$, 有

$$\omega_k < v_1 < \omega_{k+1} \Longleftrightarrow \omega_k < v_n < \omega_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

它的一个重要特征是：至少有一个 V_i 是 $[n]$ 中区间 (即 V_i 恰好包含 $[n]$ 中某两点之间的所有点), 且 $\pi\backslash\{V_i\}$ 是 $[n]\backslash V_i$ 的非交叉划分. $[n]$ 的非交叉划分的全体记为 $NC(n)$.

$\pi = \{V_1, \ldots, V_p\} \in NC(n)$, V_i 称为 π 的块，$\forall \pi, \sigma \in NC(n)$, 我们说 $\pi \leq \sigma$, 是指任取 π 的一个块 V_i, 都存在 σ 的块 W_j 使 $V_i \subseteq W_j$.

$I_2 := \{\eta | \eta\text{是}\bigcup_{n\in N}(NC(n) \times NC(n))\text{上的复值函数且满足}\eta(\pi, \sigma) = 0, \text{当}\pi \not\leq \sigma\text{时}\}$. I_2 中的乘法 $*: I_2 \times I_2 \longrightarrow I_2$:

$$(\theta * \eta)(\pi, \sigma) = \sum_{\substack{\nu \in NC(n) \\ \pi \leq \nu \leq \sigma}} \theta(\pi, \nu)\eta(\nu, \sigma),$$

其中 $\theta, \eta \in I_2$, $\pi, \sigma \in NC(n)$. $(I_2, *)$ 称为投射代数.

I_2 中的单位元是 δ 函数：$\delta(\pi, \sigma) \begin{cases} 1, & \pi = \sigma \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$;

一个重要函数是 ζ 函数：$\zeta(\pi, \sigma) = \begin{cases} 1, & \pi \leq \sigma \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

它的反函数称为 Mobius 函数，记为 μ, 表达式见文献 [3].

下面给出算子值可乘函数的概念.

定义 2.3 设 M 是 B-B- 双模，$f^{(n)} : M^{\otimes_B n} \longrightarrow B$, $n \in N$ 是一族线性双模映射，定义它们对应的可乘函数 $\widehat{f}$:

$$\widehat{f} = (f^{(n)})_{n\in N} : \bigcup_{n=1}^{\infty} (NC(n) \times M^{\otimes_B^n}) \longrightarrow B.$$

$\widehat{f}(\pi)[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]$ 如下定义：由于 $\pi \in NC(n)$, 故可分解为 $\pi = \pi_1 \bigcup 1_V$, 其中 $V = [k, l]$ 是区间，$1_V = \{\{k, k+1, \ldots, l\}\}$.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\pi)[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] :&= \widehat{f}(\pi_1)[a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} f^{(l-k+1)}(a_k \otimes \cdots \otimes a_l) \otimes a_{l+1} \otimes \cdots \otimes a_n] \\ &= \widehat{f}(\pi_1)[a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes f^{(l-k+1)}(a_k \otimes \cdots \otimes a_l) a_{l+1} \otimes \cdots \otimes a_n]\end{aligned}$$

且令 $\widehat{f}(\emptyset)(b) := b$, $(b \in B = M^{\otimes_B^0})$.

注 由上式可以决定 $\widehat{f}(\pi)$, 是因为 π_1 仍是非交叉划分，故 π_1 又可分解为 $\pi_1 \bigcup 1_{V'}$, V' 是区间. 这样就可以计算出 $\widehat{f}(\pi)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$. 显然有 $f^{(n)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \widehat{f}(1_n)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$. 可乘函数的全体记为 $I(M, B)$. $\widehat{f} \in I(M, B), \eta \in I_2$, 可作 $\widehat{f} * \eta : \bigcup_{n=1}^{\infty} (NC(n) \times M^{\otimes_B n}) \longrightarrow B$,

$$(\widehat{f} * \eta)(\pi)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := \sum_{\upsilon \leq \pi} \widehat{f}(\upsilon)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\eta(\upsilon, \pi).$$

定义 2.4 $\widehat{\varphi}=(\varphi^{(n)})_{n\in N}\in I(A,B)$ 称为矩函数，若有：

$$\widehat{\varphi}(\pi)[a_1\otimes\cdots\otimes a_pa_{p+1}\otimes\cdots a_n]=\widehat{\varphi}(\sigma)(a_1\otimes\cdots a_p\otimes a_{p+1}\otimes\cdots\otimes a_n),$$

其中 σ 如下定义： $\sigma|_{p=p+1}=\pi,p\sim_\sigma P+1$.

$p\sim_\sigma p+1$ 表示 $p,p+1$ 在 σ 的同一个块中；

$\sigma|_{p=p+1}$ 表示把 $p,p+1$ 看成一个元素时，所得到的划分，即当 $p\sim_\sigma p+1$ 时，就去掉 $p+1$; 当 $p\not\sim_\sigma p+1$ 时，就把含有 p 的块与含有 $p+1$ 的块粘合在一起 (把 $p,p+1$ 看成一个元素). 例如 $\sigma=\{(1,2),(3,5),(4,6)\}\in NC(6)$, 令 $p=3$, 则 $\sigma|_{p=p+1}=\{(1,2),(3,5,6)\}\cong\{(1,2),(4,5,6)\}\in NC(5)$.

矩函数的全体记为 $I^m(A,B)$.

定义 2.5 $\widehat{C}\in I(A,B)$ 称为累积函数，若它满足：

$$\widehat{c}(\pi)(a_1\otimes\cdots\otimes a_pa_{p+1}\otimes\cdots\otimes a_n)=\sum_{\substack{\sigma\in NC(n)\\ \sigma|_{p=p+1}=\pi}}\widehat{c}(a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes a_{p+1}\otimes\cdots\otimes a_n)$$

累积函数的全体记为 $I^c(A,B)$.

命题 2.6[3] 设 $\widehat{\varphi},\widehat{c}\in I(A,B)$ 且 $\widehat{\varphi}=\widehat{c}*\zeta$ 或 $\widehat{c}=\widehat{\varphi}*\mu$, 则 $\widehat{\varphi}$ 是矩函数 $\Longleftrightarrow$ $\widehat{c}$ 是累积函数. 设 $\varphi: A\longrightarrow B$ 是条件期望，则可构造矩函数 $\widehat{\varphi}=(\varphi^{(n)})_{n\in N}$:

$$\varphi^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n):=\varphi(a_1a_2\cdots a_n),(n\in N,a_1,\ldots,a_n\in A),$$

从而就有累积函数 $\widehat{c}:=\widehat{\varphi}*\mu$. 这样得到的 $\widehat{\varphi},\widehat{c}$ 分别称为 φ 的矩函数和累积函数.

3 条件自由

条件自由 (或称为 c- 自由) 是由 R.Speicher 提出的 [2]. 我们把这一概念推广到算子值的情形，并用累积函数的观点给出一个等价定义.

定义 3.1 设 (A,φ) 是 B- 值非交换概率空间， $\psi: A\longrightarrow B$ 是条件期望， $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 A 的一族子代数，且以 B 为子代数. 取 $a_k\in A_{i_k},k=1,2,\ldots,n$ 且 $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n,\psi(a_k)=0$. 若有 $\psi(a_1a_2\cdots a_n)=0$ 和 $\varphi(a_1a_2\cdots a_n)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n)$, 则称 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是条件自由的或 ψ 自由的.

为了引进等价定义，我们先来定义条件累积函数：

A,φ,ψ 同上，定义 (φ,ψ) 的条件累积函数 $\widehat{R}=(R^{(n)})_{n\in N}$, 它与 φ,ψ 都有关，通过下面的递推公式得到：

$$\begin{aligned}&\varphi(a_1a_2\cdots a_n)=\varphi^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1<\iota(1)<\cdots<\iota(k)\le n}R^{(k+1)}[a_1\psi^{(\iota(1)-2)}(a_2\otimes\cdots\otimes a_{\iota(1)-1})\otimes\\&\quad a_{\iota(1)}\psi^{(\iota(2)-\iota(1)-1)}(a_{\iota(1)+1}\otimes\cdots\otimes a_{\iota(2)-1})\otimes\cdots\otimes a_{\iota(k)}\varphi^{(n-\iota(k))}(a_{\iota(k)+1}\otimes\cdots\otimes a_n)],\end{aligned}$$

其中 $(\varphi^{(n)}),(\psi^{(n)})$ 分别是 φ,ψ 的矩函数.

递推的意思是：当 $n=1$, 计算得 $\varphi^{(1)}=R^{(1)}$, 把 $R^{(1)}(a)$ 代入公式，可得 $R^{(2)}(a_1\otimes a_2)$, 这样下去，就可得到 $R^{(k)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k),\forall k\in N,a_1\cdots a_k\in A$.

3.2 定义 $(A,\varphi),\psi,\{A_i\}_{i\in I}$ 同上一定义的条件, 记 $\varphi_i:=\varphi|_{A_i},\psi_i:=\psi|_{A_i}$, (φ_i,ψ_i) 的条件累积函数记为 $\widehat{R}_i=(R_i^{(n)})$, $i=1,2,\ldots,n.\psi_i$ 的矩函数和累积函数记为 $\widehat{\psi}=(\psi_i^{(n)}),\widehat{r}_i=(r_i^{(n)})$, $i=1,2,\ldots,n.(\varphi,\psi)$ 的条件累积函数记为 $\widehat{R}=(R^{(n)})$, ψ 的累积函数记为 $\widehat{r}=(r^{(n)})$. 若有

$$r^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases} r_j^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n), & \exists j,a_1,\ldots,a_n\in A_j\\ 0, & \text{其它},\end{cases};$$

$$R^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases} R_j^{(1)}(a_1)R_j^{(1)}(a_2)\cdots R_j^{(1)}(a_n), & \exists j,a_1,\ldots,a_n\in A_j\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是条件自由的.

定理 3.3 定义 3.1 与定义 3.2 是等价的.

证明 设当 $a_k\in A_{i_n},\psi(a_k)=0,k=1,2,\ldots,n,\iota_1\neq\cdots\neq\iota_n$ 时,

$$\psi(a_1a_2\cdots a_n)=0,\quad \varphi(a_1a_2\cdots a_n)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n).$$

$\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$, 令 $\widehat{\widetilde{r}}=(\widetilde{r}^{(n)})$ 定义为

$$\widetilde{r}^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases} r_j^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n), & \exists j,a_1,\ldots,a_n\in A_j\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

令 $\widehat{\widetilde{R}}=(\widetilde{R}^{(n)})$, 定义为

$$\widetilde{R}^{(n)}=\begin{cases} R_k^{(1)}(a_1)R_k^{(1)}(a_2)\cdots R_k^{(1)}(a_n), & \exists j,a_1,\ldots,a_n\in A_j\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

我们来说明 $\widehat{\widetilde{r}},\widehat{\widetilde{R}}$, 分别是 $\psi,(\varphi,\psi)$ 的累积函数和条件累积函数，即要证下面两式成立：

$$\begin{aligned}\psi(a_1\cdots a_n)=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1<\iota(1)<\cdots<\iota(k)\le n}\widetilde{r}^{(k+1)}(a_1\otimes a_{\iota(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\iota(k)})\psi^{(\iota(1)-2)}(a_2\otimes\cdots\otimes a_{\iota(1)-1})\cdots\\ &\psi^{(\iota(k)-\iota(k-1)-1)}(a_{\iota(k-1)+1}\otimes\cdots\otimes a_{\iota(k)-1})\psi^{(n-\iota(k))}(a_{\iota(k)+1}\otimes\cdots\otimes a_n);\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a_1a_2\cdots a_n)=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1<\iota(1)<\cdots<\iota(k)\le n}\widetilde{R}^{(k+1)}[a_1\psi^{(\iota(1)-2)}(a_2\otimes\cdots\otimes a_{\iota(1)-1})\otimes\\ &a_{\iota(1)}\psi^{(\iota(2)-\iota(1)-1)}(a_{\iota(1)+1}\otimes\cdots\otimes a_{\iota(2)-1})\otimes\cdots\otimes\\ &a_{\iota(k)}\varphi^{(n-\iota(k))}(a_{\iota(k)+1}\otimes\cdots\otimes a_n)]\end{aligned}\tag{3.2}$$

由于 a_i 可写为 $\psi(a_i)1+a_i^\circ,a_i^\circ\in\ker\psi_i$ 的形式, 因此不妨设 $a_1,a_2,\ldots a_n$ 满足：$a_k\in A_{i_k},i_1\neq\cdots\neq i_n$ 且 $\psi(a_k)=0$. 这样 (3.1) 式右边和式中不为零的项须满足：$\iota(1)=2,\iota(2)=3,\ldots,\iota(k)=n$, 即 (3.2.1) 式右边 $=\widetilde{r}^{(n)}(a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n)$. 但 $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n$, 所以 (3.2.1) 右边 =0, 而 $\psi(a_1\cdots a_n)=0$. 故 (3.1) 成立.

要证 (3.2), 我们对 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设对 $n-1$ 的情况, 结论成立. 那么 (3.2) 右边不为零的项须是以下情形： $\iota(1)=2,\ldots,\iota(k)=k+1,\iota(k+1)=k+2,\ldots$. 所以 (3.2) 右边应为 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\widetilde{R}^{(k+1)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_{k+1}\varphi(a_{k+2}\cdots a_n))$. 但当 $k\geq 1$ 时, 由 $\widetilde{R}^{(k+1)}$ 的定义知, 这些项为零. 对于 $k=0$ 的项, 由归纳假设：

$$\begin{aligned}(3.2)\text{右边}&=\widetilde{R}^{(1)}(a_1)\varphi(a_2\cdots a_n)\\&=\widetilde{R}^{(1)}(a_1)\widetilde{R}^{(1)}(a_2)\varphi(a_3\cdots a_n)=\cdots=\widetilde{R}^{(1)}(a_1)\cdots\widetilde{R}^{(1)}(a_n)\\&=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n)=\varphi(a_1\cdots a_n).\end{aligned}$$

反过来, 假设

$$r^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases}r_j^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n), & a_1,\ldots,a_n\text{属于某个}A_j\\0, & \text{其它};\end{cases}$$

$$R^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases}R_k^{(1)}(a_1)\cdots R_k^{(1)}(a_n), & a_1,\ldots,a_n\text{属于某个}A_k\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

我们来证：

$$\psi(a_1a_2\cdots a_n)=0,\quad \varphi(a_1a_2\cdots a_n)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n).\tag{3.3}$$

我们知道 $\psi(a_1\cdots a_n)=\psi^{(n)}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\sum\limits_{\pi\in NC(n)}\widetilde{r}(\pi)(a_1\otimes\cdots\otimes a_n).\forall\pi\in NC(n)$, 有表示 $\pi=\pi_1\bigcup 1_{[k,l]}$, 故

$$\widetilde{r}(\pi)=\widetilde{r}(\pi_1)(a_1\otimes\cdots\otimes a_{k-1}r^{(\iota-k+1)}(a_k\otimes\cdots\otimes a_\iota)\otimes a_{\iota+1}\otimes\cdots\otimes a_n),$$

而 $i_k\neq\cdots\neq i_\iota$, 所以 $r^{(\iota-k)}(a_k\otimes\cdots\otimes a_\iota)=0,\psi(a_1a_2\cdots a_n)=0$.

$$\begin{aligned}\varphi(a_1a_2\cdots a_n)=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1<\iota(1)<\cdots<\iota(k)\leq n}R^{(k+1)}[a_1\psi^{(\iota(1)-2)}(a_2\otimes\cdots\otimes a_{\iota(1)-1})\otimes\cdots\otimes\\&a_{\iota(k-1)}\psi^{(\iota(k)-\iota(k-1)-1)}\otimes a_{\iota(k)}\varphi^{(n-\iota(k))}(a_{\iota(k)+1}\otimes\cdots\otimes a_n)].\end{aligned}$$

对 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时, (3.3) 显然成立. 假设小于 $n-1$ 的情形 (3.3) 成立, 那么：

$$\varphi(a_1a_2\cdots a_n)=R^{(1)}(a_1\varphi(a_2\cdots a_n))=\varphi(a_1)\varphi(a_2\cdots a_n)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n).$$

4 加法卷积公式

利用定理 3.3 我们很容易地得到加法卷积公式.

定义 4.1 设 $\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2\in\Sigma_B$, 则存在 B- 非交换换概率空间 (A,φ) 和条件期望 $\psi:A\longrightarrow B$, 及 $a,b\in A$, 使 a,b 是 ψ- 自由的. a,b 在 (A,φ) 中的分布是 μ_1,μ_2; a,b 在 (A,φ) 中的分布是 ν_1,ν_2 且 a,b 在 (A,ψ) 中是自由的. 令 $y=a+b$, 则记 $\mu:=\mu_1\oplus_c\mu_2$, 其中 μ 是 y 在 (A,φ) 中的分布. 记 $\nu:=\nu_1\oplus\nu_2$, ν 是 y 在 (A,ψ) 中的分布. 称 $(\mu,\nu):=(\mu_1,\nu_1)\oplus(\mu_2,\nu_2)$ 为 (μ_1,ν_1) 与 (μ_2,ν_2) 的条件自由卷积.

在非交换概率空间 (A,ψ) 中的随机变量 a 的累积量记为 $(\xi_n^{(a)})_{n\in N_0}, N_0 = N\bigcup\{0\}$, 定义为：

$$\xi_n^{(a)} : B\times\cdots\times B \longrightarrow B,\quad \xi_n^{(a)}(b_1,\ldots,b_n) = r^{(n+1)}(a\otimes b_1a\otimes\cdots\otimes b_na),$$

$(r^{(n)})$ 是 ψ 的累积函数.

(A,φ) 是 B- 值非交换概率空间, $\psi : A\longrightarrow B$ 是条件期望. $\widetilde{R} = (R^{(n)})$ 是 (φ,ψ) 的条件累积函数, $a\in(A,\varphi)$, 定义 a 的条件累积量 $(\eta_n^{(a)})_{n\in N_0}$:

$$\eta_n^{(a)} : B\times\cdots\times B \longrightarrow B,\ \eta_n^{(a)}(b_1,\ldots,b_n) = R^{(n+1)}(a\otimes b_1a\otimes\cdots\otimes b_na).$$

我们也可以定义二个分布的累积量. $\mu,\nu\in\Sigma_B$, 可找到 A,φ,ψ 和 $a\in A$, 使 a 在 (A,φ) 中的分布为 μ, 在 (A,ψ) 下的分布为 ν, 则定义 (μ,ν) 的条件累积量就是 a 的条件累积量，记为 $(\eta_n^{(\mu,\nu)})_{n\in N_0}$.

定理 4.2 若 $(\mu,\nu) = (\mu_1,\nu_1)\oplus(\mu_2,\nu_2)$, 则

$$\xi_n^{(\nu_1\oplus\nu_2)} = \xi_n^{(\nu_1)} + \xi_n^{(\nu_2)},\quad \eta_n^{(\mu_1\oplus\mu_2)} = \eta_n^{(\mu_1)} + \eta_n^{(\mu_2)}, n\in N_0.$$

其中 $\eta_n^{(\mu_i)} := \eta_n^{(\mu_i,\nu_i)}, i=1,2,\ \eta_n^{(\mu_1\oplus\mu_2)} := \eta_n^{(\mu_1\oplus\mu_2,\nu_1\oplus\nu_2)}$.

证明 设 $a,b\in(A,\varphi)$ 是 ψ- 自由的，分布分别是 μ_1,μ_2,a,b 在 (A,ψ) 中是自由的，分布分别是 ν_1,ν_2, 则

$$\xi_n^{(\nu_1\oplus\nu_2)}(b_1,\ldots,b_n) = \xi_n^{(\nu_1)}(b_1,\ldots,b_n) + \xi_n^{(\nu_2)}(b_1,\ldots,b_n).$$

$$\begin{aligned}\eta_n^{(\mu_1\oplus\mu_2)}(b_1,\ldots,b_n) &= R^{(n+1)}((a+b)\otimes b_1(a+b)\otimes\cdots\otimes b_n(a+b))\\ &= R^{(n+1)}(a\otimes b_1a\otimes\cdots\otimes b_nb) + R^{(n+1)}(b\otimes b_1b\otimes\cdots\otimes b_nb)\\ &= \eta_n^{(\mu_1)}(b_1,\ldots,b_n) + \eta_n^{(\mu_2)}(b_1,\ldots,b_n),\end{aligned}$$

其中 $a,b\in A, b_1,\ldots,b_n\in B$.

参考文献:

[1] VOICULESCU D. *Operations on certain non-commutative operator-valued random variables* [J]. Astérisque, 1995, **232**: 243–275.

[2] BOZEJKO M, LEINERT M, SPEICHER R. *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables* [J]. Pacific J. Math., 1996, **175**: 357–388.

[3] SPEICHER R. *Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory* [J]. Mem. Amer. Math. Soc., 1998, **132**: 627.

Operator-Valued Conditionally Free Random Variables

Meng Bin

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu 210016, China)

Abstract: We extend R.Speicher's conditional freeness to operator-valued noncommutative probability space and obtain an equivalent definition by cummulant function. Then we get the fomula of additional convolution product for conditionally free random variables.

Key words: operator-valued noncommutative probability space; conditional freeness; additional convolution