第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0677-10 **文献标识码**: **A**

三维 Leibniz 代数的分类

蒋 启 芬
(上海交通大学数学系，上海 200240)
(E-mail: qfjiang@sjtu.edu.cn)

摘 要: Leibniz 代数是比 Lie 代数更广泛的一类代数，它通常不满足反交换性. 在这篇文章里我们确定了维数等于 3 的 Leibniz 代数的同构类.

关键词: Leibniz 代数; Lie 代数; 幂零 Leibniz 代数; 可解 Leibniz 代数; 理想.
MSC(2000): 17A32; 17A60
中图分类: O152.1; O152.3

引 言

Leibniz 代数最早是由 Bloch 在文献 [1] 中考虑，当时被称为 D- 代数，后来 Loday 在文献 [2],[3] 中研究类似于 Lie 代数同调的 Leibniz 同调时提出了这个概念. 域 F 上的代数 $\mathfrak{g}$ 称为 Leibniz 代数，若 $\mathfrak{g}$ 上有一个双线性映射 $[-,-]$: $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, 满足 $[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$. 不难看出若括积是反对称的，这个等式就等价于经典的 Jacobi 等式，因此 Lie 代数是满足反对称的 Leibniz 代数. 对 Leibniz 代数的研究大多数都是关于同调问题的考虑，可参阅文献 [2]–[6] 等，对于它的结构理论的一些结果可参阅文献 [7]–[9] 等. 我们的工作是给出了三维非李代数的 Leibniz 代数的同构类. 下面我们考虑的是复数域上的 Leibniz 代数.

1 预 备

定义 1.1 一个 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间，上面定义了一个括积:

$$[-,-]:\quad \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$$

满足 Leibniz 等式

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

显然，有 $[x,[y,y]]=0$ 和 $[x,[y,z]]+[x,[z,y]]=0$.

由这个定义知道，任一个 Lie 代数是一个 Leibniz 代数. 事实上， Lie 代数是 Leibniz 代数的一个商代数.

定义 1.2 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Leibniz 代数，子空间 $I\subset\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的左 (右) 理想，如果 $\forall a\in I$ 和 $x\in\mathfrak{g}$, 有 $[x,a]\in I([a,x]\in I)$. 如果 I 既是左理想又是右理想，称 I 是 $\mathfrak{g}$ 的双边理想.

定义 1.3 对 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$, 我们定义下面的理想序列:

收稿日期: 2005-09-15; **接受日期**: 2006-07-06
基金项目: 上海市科委资助 (06ZR14049); 上海交通大学系友基金.

(a) $C^1\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, $C^{n+1}\mathfrak{g}=[C^n\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $n>0$, 显然有 $\cdots C^n\mathfrak{g}\subset\cdots\subset C^2\mathfrak{g}\subset C^1\mathfrak{g}$;

(b) $\cdots D^n\mathfrak{g}\subset\cdots\subset D^1\mathfrak{g}$, 其中 $D^1\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, $D^{n+1}\mathfrak{g}=[D^n\mathfrak{g},D^n\mathfrak{g}]$,

称一个 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，如果存在整数 $n>0$ 使得 $C^n\mathfrak{g}=0$; $\mathfrak{g}$ 是可解的，如果存在整数 $m>0$ 使得 $D^m\mathfrak{g}=0$; 最小的 n,m 分别称为幂零次数和可解次数.

注 在上面的定义 1.3 中，准确地说 $\mathfrak{g}$ 应该是右幂零的．在文献 [7] 中， Ayupov 和 Omirov 证明了 Leibniz 代数的右幂零和幂零是一致的.

显然，对所有的 $n>0$, $D^n\mathfrak{g}\subset C^n\mathfrak{g}$, 因此幂零 Leibniz 代数必是可解的.

2 三维 Leibniz 代数的分类

设 $\mathfrak{g}$ 是 Leibniz 代数，在 $\mathfrak{g}$ 的维数为 1 的情况，$\mathfrak{g}$ 有一个基向量 x, 由 (1.1) 式可得 $[x,x]=0$. 在维数为 2 的情况，二维 Lie 代数的分类可从文献 [10] 中查到；二维非 Lie 代数的 Leibniz 代数的分类已被 Loday 解决，有下面的结果 [3].

引理 2.1 设 $\mathfrak{g}$ 为非 Lie 代数的 Leibniz 代数， $\dim\mathfrak{g}=2$, 则 $\mathfrak{g}$ 只有两种不同构的类:

(i) $[e_1,e_2]=e_1$;

(ii) $[e_2,e_2]=e_1$. 其中 $\{e_1,e_2\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基，且基向量的其余括积均为 0.

在 $\mathfrak{g}$ 的维数为 3 的情况，三维 Lie 代数的分类已经很清楚，可查阅文献 [10]; 对于三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数的分类，我们下面讨论．众所周知，非 Lie 代数的 Leibniz 代数从经典意义上来说都不是单的，它包含一个由它的平方元生成的非零的真理想. 因此我们通过它的理想的维数和商代数来讨论三维 Leibniz 代数的同构类．为了书写的简洁，我们对任意的 $x\in\mathfrak{g}$, 考虑左乘算子 $L_x:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, $L_x(y)=[x,y]$, $y\in\mathfrak{g}$. L_x 是一个线性变换，用 $\bar{x}$ 表示商代数的元素.

设 $\mathfrak{g}$ 是三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数， $I\subset\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非平凡理想．自然， I 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数， $\mathfrak{g}/I$ 是 $\mathfrak{g}$ 的商代数．由于 $\dim I\leqslant 2$, 所以 $\mathfrak{g}/I$ 是一个一维或二维 Leibniz 商代数，从而我们可以借助前面一维的结果和引理 2.1 来讨论 $\mathfrak{g}$ 的同构类.

2.1 $\dim I=1$

若 $\dim I=1$, 则 $\mathfrak{g}/I$ 是二维 Leibniz 商代数.

设 $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ 是 $\mathfrak{g}/I$ 的一组基， e_3 为 I 的基，则存在 e_1,e_2 使得 e_1,e_2,e_3 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基．若 $\mathfrak{g}/I$ 交换，即 $[\bar{e}_i,\bar{e}_j]=\bar{0}$, $i,j=1,2$. 设

$$L_{e_1}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},$$

$$L_{e_2}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix},$$

$$L_{e_3}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\m_{31}&m_{32}&0\end{pmatrix},$$

其中 $k_{3j},l_{3j},m_{3j}\in C$, $j=1,2,3$.

由基元的各种排列满足 (1.1), 有

$$\begin{cases} k_{33}k_{31}=0, \\ k_{32}k_{33}+k_{32}m_{31}-k_{31}m_{32}=0, \\ k_{33}l_{31}+k_{31}m_{32}-k_{32}m_{31}=0, \\ k_{31}l_{33}=0, \\ k_{33}^2+k_{33}m_{31}=0, \\ l_{33}l_{32}=0, \\ l_{33}^2+l_{33}m_{32}=0, \\ l_{31}l_{33}+l_{31}m_{32}-l_{32}m_{31}=0, \\ k_{32}l_{33}+l_{32}m_{31}-l_{31}m_{32}=0, \\ l_{32}k_{33}=0, \\ l_{33}k_{33}+k_{33}m_{32}=0, \\ k_{33}l_{33}+l_{33}m_{31}=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

下面分情况讨论.

1). 若 $L_{e_3}=0$, 即 $m_{31}=m_{32}=0$, 由 (2.1) 式，有 $l_{33}=0,\ k_{33}=0$, 且 $k_{31},k_{32},l_{31},l_{32}\in C$. 从而 L_{e_1},L_{e_2},L_{e_3} 的矩阵分别为

$$L_{e_1}:\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & 0 \end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\ 0. \tag{2.2}$$

由于考虑 $\mathfrak{g}$ 非 Lie 代数，因此我们有下面的情况：

(1) $l_{32}\neq 0,\ k_{31}=k_{32}=l_{31}=0$. 由 (2.2) 式，括积规则为： $[e_2,e_2]=l_{32}e_3$, 基元的其余括积为 0. 令 $l_{32}e_3$ 作为新的 e_3, 有 $[e_2,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为 0.

(2) $l_{31}\neq 0,\ k_{31}=k_{32}=l_{32}=0$. 由 (2.2) 式括积规则为： $[e_2,e_1]=l_{31}e_3$. 同理我们有 $[e_2,e_1]=e_3$, 基元的其余括积为 0.

(3) $l_{31}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ k_{31}=k_{32}=0$. 由 (2.2) 式，有 $[e_2,e_1]=l_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 令

$$\frac{e_2}{\sqrt{l_{32}}}-\frac{\sqrt{l_{32}}}{l_{31}}e_1=e_2',\quad \frac{\sqrt{l_{32}}}{l_{31}}e_1=e_1',\quad e_3=e_3'.$$

显然， e_1',e_2',e_3' 线性无关，作为 $\mathfrak{g}$ 的一组新的基，为了方便，我们仍把它们记为 e_1,e_2,e_3, 因此有 $[e_2,e_1]=e_3$, 基元其余括积为 0. 显然，这与 (2) 的情况同构.

(4) $k_{32}\neq 0,\ k_{31}=l_{31}=l_{32}=0$. 由 (2.2) 式，有 $[e_1,e_2]=k_{32}e_3$, 基元其余括积为 0. 令 $k_{32}e_3=e_3$, $e_1=e_2$, $e_2=e_1$, 则不难看出这与 (2) 的情况同构.

(5) $k_{32}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ k_{31}=l_{31}=0$. 由 (2.2) 式，有 $[e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 令

$$e_2-\frac{l_{32}k_{32}}{e}_{\ 1}=e_1,\quad \frac{l_{32}}{k_{32}}e_1=e_2,\quad l_{32}e_3=e_3.$$

则不难算出这与 (2) 的情况同构.

(6) $k_{32}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ k_{31}=l_{32}=0$, 且 $k_{32}+l_{31}\neq 0$. 有 $[e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3$. 令

$$\frac{l_{31}}{k_{32}}e_1-e_2=e_2,\quad e_1+e_2=e_1,\quad k_{32}e_3=e_3,$$

有

$$[e_1,e_1]=(\frac{l_{31}}{k_{32}}+1)e_3,\quad [e_1,e_2]=(\frac{l_{31}^2}{k_{32}^2}-1)e_3,\quad [e_2,e_2]=(-\frac{l_{31}}{k_{32}}-\frac{l_{31}^2}{k_{32}^2})e_3,$$

基元其余括积为 0. 不难算出，它要么与下面的 (9) 同构，要么与下面的 (11) 是同一种.

(7) $k_{32}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ k_{31}=0$. 有 $[e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 令

$$\frac{l_{32}e_1-l_{31}e_2}{\sqrt{-k_{32}l_{31}}}=e_1,\ e_2=e_2,\ l_{32}e_3=e_3,$$

不难计算它与下面的 (9) 同构或者与 (11) 是同一种.

(8) $k_{31}\neq 0,\ k_{32}=l_{31}=l_{32}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3$, 基元的其余括积为零. 明显地，这与 (1) 的情况同构.

(9) $k_{31}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ k_{32}=l_{31}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 令

$$\frac{e_1}{\sqrt{k_{31}}}=e_1,\ \frac{e_2}{\sqrt{l_{32}}}=e_2,\ e_3=e_3,$$

我们有 $[e_1,e_1]=e_3,\ [e_2,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为零.

(10) $k_{31}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ l_{32}=k_{32}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3$. 基元的其余括积为零. 明显地这与 (5) 同构.

(11) $k_{31}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ k_{32}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 通过基的纯量倍变换，有 $[e_1,e_1]=e_3,\ [e_2,e_1]=\frac{l_{31}}{\sqrt{l_{32}k_{31}}}e_3,\ [e_2,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为零.

(12) $k_{31}\neq 0,\ k_{32}\neq 0,\ l_{31}=l_{32}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=k_{32}e_3$. 明显的，这与 (3) 的情况同构.

(13) $k_{31}\neq 0,\ k_{32}\neq 0,\ l_{32}\neq 0,\ l_{31}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 显然这与 (11) 是同一种.

(14) $k_{31}\neq 0,\ k_{32}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ l_{32}=0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3$. 通过 e_1 与 e_2 轮换，显然这与 (7) 是同一种.

(15) $k_{31}\neq 0,\ k_{32}\neq 0,\ l_{31}\neq 0,\ l_{32}\neq 0$. 有 $[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=k_{32}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=l_{32}e_3$. 通过基的纯量倍变换，有

$$[e_1,e_1]=e_3,\quad [e_1,e_2]=e_3,\quad [e_2,e_1]=\frac{l_{31}}{k_{32}}e_3,\quad [e_2,e_2]=\frac{k_{31}l_{32}}{k_{32}^2}e_3.$$

记 $\frac{l_{31}}{k_{32}}=k,\ \frac{k_{31}l_{32}}{k_{32}^2}=l$, 则 $k,l\neq 0$. 令 $ke_1-e_2=e_2,\ e_1=e_1,\ e_3=e_3$, 不难算出新的括积规则为 $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=(k-1)e_3$, $[e_2,e_2]=(l-k)e_3$, 基元的其余括积为零.

若 $k=l=1$, 明显地这种情况与 (1) 同构；若 $k=l\neq 1$, 不难算出与 (2) 同构；若 $l\neq k, k=1, l\neq 1$, 不难算出这种情况与 (9) 是同构；若 $l\neq k, k\neq 1$, 不难算出此时与 (11) 是同一种.

综合上面的讨论，我们有下面的结果：

引理 2.2 $\mathfrak{g}$ 为三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数， e_1,e_2,e_3 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. $I\subset\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一维理想，且 $\mathfrak{g}/I$ 交换. 若 $L_{e_3}=0$, 就同构而言，有下面四种非 Lie 代数的三维 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$:

(i). $[e_2,e_2]=e_3$. (ii). $[e_2,e_1]=e_3$. (iii). $[e_1,e_1]=e_3,\ [e_2,e_2]=e_3$.

(iv). $[e_1,e_1]=e_3,\ [e_2,e_1]=ke_3,\ [e_2,e_2]=e_3,\ k\neq 0$.

其中未写出的基元括积为零.

证明 只需证明这四种不同构.

假设 (i) 与 (ii) 同构，则存在一一映射 φ: (i)$\longrightarrow$ (ii) 使得 $\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{3}k_{ij}e_i$, 任意取定 j,k_{ij} 不全为 0, 且 $\det|\,k_{ij}\,|_3\neq 0$, $i,j=1,2,3$. 由 (i) 中的 $[e_2,e_2]=e_3$, 有 $[\varphi(e_2),\varphi(e_2)]=k_{22}k_{12}e_3=\varphi(e_3)=\sum_{i=1}^{3}k_{i3}e_i$, 得 $k_{13}=0$, $k_{23}=0$, $k_{22}k_{12}=k_{33}$. 同理有 $k_{22}k_{11}=0$, $k_{21}k_{12}=0$, $k_{21}k_{11}=0$. 这与 $\det|k_{ij}|_3\neq 0$ 矛盾，故 (i) 与 (ii) 不同构. 类似可证其余情况均不同构. □

2). 若 $L_{e_3}\neq 0$, 我们分三种情况：

(I). $m_{31}\neq 0,m_{32}\neq 0$; (II). $m_{31}=0,m_{32}\neq 0$; (III). $m_{31}\neq 0,m_{32}=0$.

讨论如下：

(I). $m_{31}\neq 0$, $m_{32}\neq 0$

(i). $k_{33}=0$. 由 (2.1) 式，有

$$l_{33}=0,\ k_{32}=\frac{k_{31}m_{32}}{m_{31}},\ l_{32}=\frac{l_{31}m_{32}}{m_{31}},\quad k_{31},\ l_{31}\in C.$$

从而 L_{e_1},L_{e_2},L_{e_3} 的矩阵分别为

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k_{31}&\frac{k_{31}m_{32}}{m_{31}}&0\end{pmatrix},\ L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\l_{31}&\frac{l_{31}m_{32}}{m_{31}}&0\end{pmatrix},\ L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\m_{31}&m_{32}&0\end{pmatrix}.\qquad(2.3)$$

由此可得下面几种括积规则：

(a) $k_{31}=l_{31}=0$. 由 (2.3) 式有： $[e_3,e_1]=m_{31}e_3$,$[e_3,e_2]=m_{32}e_3$, 基元的其余括积为 0. 令

$$\frac{e_1}{m_{31}}-\frac{e_2}{m_{32}}=e_1,\quad \frac{e_2}{m_{32}}=e_2,\quad e_3=e_3,$$

有 $[e_3,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为 0.

(b) $l_{31}\neq 0$, $k_{31}=0$. 由 (2.3) 式有：

$$[e_2,e_1]=l_{31}e_3,\quad [e_2,e_2]=\frac{l_{31}m_{32}}{m_{31}}e_3,\quad [e_3,e_1]=m_{31}e_3,\quad [e_3,e_2]=m_{32}e_3$$

基元的其余括积为 0. 令

$$-\frac{e_1}{m_{31}}+\frac{e_2}{m_{32}}-\frac{l_{31}}{m_{31}m_{32}}e_3=e_1,\quad \frac{e_1}{m_{31}}=e_2,\quad \frac{l_{31}}{m_{31}m_{32}}e_3=e_3,$$

不难验证新的 e_1, e_2, e_3 线性无关，作为一组新的基，从而有 $[e_3,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为零. 显然这与 (a) 同构.

(c) $k_{31}\neq 0$, $l_{31}=0$. 有

$$[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=\frac{k_{31}m_{32}}{m_{31}},\ [e_3,e_1]=m_{31}e_3,\ [e_3,e_2]=m_{32}e_3.$$

令

$$\frac{e_1}{m_{31}}-\frac{e_2}{m_{32}}-\frac{k_{31}}{m_{31}^2}e_3=e_1,\ \frac{e_2}{m_{32}}=e_2,\ e_3=e_3$$

不难计算有 $[e_3,e_2]=e_3$, 基元其余括积为 0. 显然这与 (a) 同构.

(d) $k_{31}\neq 0,\ l_{31}\neq 0$. 有

$$[e_1,e_1]=k_{31}e_3,\ [e_1,e_2]=\frac{k_{31}m_{32}}{m_{31}}e_3,\ [e_2,e_1]=l_{31}e_3,\ [e_2,e_2]=\frac{l_{31}m_{32}}{m_{31}}e_3,$$

$$[e_3,e_1]=m_{31}e_3,\ [e_3,e_2]=m_{32}e_3.$$

令

$$\frac{e_1}{m_{31}}-\frac{e_2}{m_{32}}=e_1,\quad \frac{e_2}{m_{32}}=e_2,\quad e_3=e_3,$$

有

$$[e_1,e_2]=(k-l)e_3,\ [e_2,e_2]=le_3,\ [e_3,e_2]=e_3,$$

其中 $k=\frac{k_{31}}{m_{31}^2}\neq 0,\ l=\frac{l_{31}}{m_{31}m_{32}}\neq 0$. 若 $k-l=0$, 我们令 $e_2-le_3=e_2,\ le_3=e_3,\ e_1=e_1$, 有 $[e_3,e_2]=e_3$, 基元的其余括积为 0. 这与 (a) 同构. 若 $k-l\neq 0$, 令

$$e_2-\frac{l}{k-l}e_1=e_2,\ \frac{l}{k-l}e_1-le_3=e_1,\ le_3=e_3.$$

通过计算，有 $[e_3,e_2]=e_3$, 与 (a) 同构.

(ii). $k_{33}\neq 0$. 由 (2.1) 式，有 $l_{32}=0,\ k_{31}=0,\ l_{33}=-m_{32},\ l_{31}=-k_{32},\ k_{33}=-m_{31}$, 从而

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{32}&0&-m_{32}\end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{33}&m_{32}&0\end{pmatrix}.$$

显然这是一个 Lie 代数，不予考虑.

(II). $m_{31}=0,\ m_{32}\neq 0$. 由 (2.1) 式，有

$$\begin{cases}k_{33}=0,\\ k_{31}=0,\\ l_{33}l_{32}=0,\\ l_{33}^2+l_{33}m_{32}=0,\\ l_{31}l_{33}+l_{31}m_{32}=0,\\ k_{32}l_{33}-l_{31}m_{32}=0.\end{cases}\tag{2.4}$$

(i). $l_{33}=0$. 由 (2.4) 式，有 $l_{31}=0,\ l_{32},k_{32}\in C$, 从而

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&k_{32}&0\end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&l_{32}&0\end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&m_{32}&0\end{pmatrix}.$$

同前类似讨论，这里对应的四种括积经过基的变换均可化为 $[e_3,e_2]=e_3$, 基元的其余括积均为 0.

(ii). $l_{33}\neq 0$. 由 (2.4) 式，有 $l_{33}=-m_{32},\ l_{32}=0,\ l_{31}=-k_{32}$, 从而

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&k_{32}&0\end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{32}&0&-m_{32}\end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&m_{32}&0\end{pmatrix}.$$

显然这是 Lie 代数，不予考虑.

(III). $m_{31}\neq 0,\ m_{32}=0$. 由 (2.1) 式，有

$$\begin{cases} l_{33}=0,\\ l_{32}=0,\\ k_{33}k_{31}=0,\\ k_{32}k_{33}+k_{32}m_{31}=0,\\ k_{33}l_{31}-k_{32}m_{31}=0,\\ k_{33}^2+k_{33}m_{31}=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

(i). $k_{33}=0$. 由 (2.5) 式，有 $k_{32}=0,\ k_{31},l_{31}\in C$, 从而

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k_{31}&0&0\end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\l_{31}&0&0\end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\m_{31}&0&0\end{pmatrix}.$$

这里对应的四种括积规则通过轮换 e_1,e_2 均可在 II（即 $m_{31}=0,\ m_{32}\neq 0$ ）的情况找到对应，这里不详细列出.

(ii). $k_{33}\neq 0$. 由 (2.5) 式，有 $k_{31}=0,\ k_{33}=-m_{31},\ l_{31}=-k_{32}$, 从而

$$L_{e_1}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},\quad L_{e_2}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{32}&0&0\end{pmatrix},\quad L_{e_3}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-k_{33}&0&0\end{pmatrix}.$$

显然这是 Lie 代数，不予考虑.

综合上面的讨论，有下面的结果：

引理 2.3 $\mathfrak{g}$ 为三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数， e_1,e_2,e_3 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. $I\subset\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一维理想，且 $\mathfrak{g}/I$ 交换. 若 $L_{e_3}\neq 0$, 就同构而言，只有一种非 Lie 代数的三维 Leibniz 代数：$[e_3,e_2]=e_3$, 基元的其余括积均为 0.

对二维 Leibniz 商代数 $\mathfrak{g}/I$ 的其它情况，类似的讨论和计算，我们有下面的引理 2.4–2.6.

引理 2.4 若 $\mathfrak{g}/I$ 是二维非交换 Lie 代数，即 $[\bar{e_1},\bar{e_2}]=\bar{e_2}$, 则就同构而言，三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 有三种：

(i). $[e_1,e_1]=e_3,\ [e_1,e_2]=e_2,\ [e_2,e_1]=-e_2$.

(ii). $[e_1,e_2]=e_2,\ [e_2,e_1]=-e_2,\ [e_3,e_1]=ke_3$.

(iii). $[e_1,e_2]=e_2,\ [e_2,e_1]=-e_2,\ [e_2,e_2]=e_3,\ [e_3,e_1]=-2e_3$.

其中 $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基，所有基元其余括积均为零， $k\neq 0$.

引理 2.5 若 $\mathfrak{g}/I$ 是二维非 Lie 代数的 Leibniz 代数，由引理 2.1, 若括积为 $[\bar{e_1},\bar{e_2}]=\bar{e_1}$, 基元其余括积为零. 则就同构而言，三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 有三种：

(i). $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_3,e_2]=e_3$.

(ii). $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_2]=e_3$.

(iii). $[e_1,e_2]=e_1+e_3,\ [e_3,e_2]=ke_3=\frac{1}{k}e_3$.

其中 $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基，所有基元其余括积均为零， $k\neq 0$.

引理 2.6 若 $\mathfrak{g}/I$ 是二维非 Lie 代数的 Leibniz 代数，由引理 2.1, 若括积为 $[\bar{e_2},\bar{e_2}]=\bar{e_1}$, 基元其余括积为零. 则就同构而言，三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 只有一种：

(i). $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_2,e_2]=e_1$, 其中 $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基，所有基元其余括积均为零.

注 引理 2.4 – 2.6 的证明均可类似引理 2.2 证明.

2.2 $\dim I = 2$

为了避免和 2.1 的讨论重复，不妨可以设 $\mathfrak{g}$ 只含二维理想. 设 e_1, e_2 为 I 的一组基， $\bar{e}_3$ 为 $\mathfrak{g}/I$ 的一组基，则存在 $e_3 \in \mathfrak{g}$, 使得 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 下面按照二维的结果分情况讨论.

1). I 交换，即 $[e_i, e_j] = 0,\ i, j = 1, 2$.

设

$$L_{e_1}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_2}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & l_{13} \\ 0 & 0 & l_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_3}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由基元的各种排列满足 (1.1), 有

$$\begin{cases} m_{13}m_{11} + m_{23}m_{12} = 0, \\ m_{13}m_{21} + m_{23}m_{22} = 0, \\ m_{11}^2 + m_{21}m_{12} + m_{11}k_{13} + m_{21}l_{13} = 0, \\ m_{11}m_{21} + m_{21}m_{22} + m_{11}k_{23} + m_{21}l_{23} = 0, \\ m_{12}k_{23} - m_{21}l_{13} = 0, \\ k_{13}m_{21} + k_{23}m_{22} - m_{11}k_{23} - m_{21}l_{23} = 0, \\ m_{12}m_{11} + m_{22}m_{12} + m_{12}k_{23} + m_{22}l_{13} = 0, \\ m_{12}m_{21} + m_{22}^2 + m_{12}k_{23} + m_{22}l_{23} = 0, \\ l_{13}m_{11} + l_{23}m_{12} - m_{12}k_{13} - m_{22}l_{13} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

可分 $m_{21} = 0$ 和 $m_{21} \neq 0$ 两种情况，同前面类似讨论计算且考虑到 $\mathfrak{g}$ 不含一维理想，有

引理 2.7 若 $\mathfrak{g}$ 只含二维理想 I 且 I 交换，则就同构而言，这里只有一种三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$: $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$, $[e_1, e_3] = ke_2$. 其中 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基，且基元的其余括积均为 0, $k \neq 0$.

2). I 为非交换 Lie 代数，即 $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_2, e_1] = -e_2$, $[e_1, e_1] = 0$, $[e_2, e_2] = 0$. 设

$$L_{e_1}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{13} \\ 0 & 1 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_2}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & l_{13} \\ -1 & 0 & l_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_3}(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 e_1,e_3,e_1; e_2,e_3,e_2; e_1,e_2,e_3; e_1,e_3,e_2; e_2,e_3,e_1 分别满足 (1.1), 我们有

$$\begin{cases} k_{23}=-m_{21}, \\ l_{13}=-m_{12}, \\ l_{13}=k_{13}=0, \\ l_{23}=-m_{22}, \\ m_{11}=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

由于 $\mathfrak{g}$ 非 Lie 代数，因此由 (2.7) 要求 $[e_3,e_3]\neq 0$, 即 m_{13},m_{23} 不全为 0.

另一方面，由 e_3,e_3,e_1; e_3,e_3,e_2 分别满足 (1.1), 有 $m_{23}=0$, $m_{13}=0$, 矛盾.
故这种情况不存在满足条件的 $\mathfrak{g}$.

3). I 为二维非 Lie 代数的 Leibniz 代数, 括积为 $[e_1,e_2]=e_1$, $[e_1,e_1]=[e_2,e_2]=[e_2,e_1]=0$. 设

$$L_{e_1}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_2}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & l_{13} \\ 0 & 0 & l_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_3}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 e_1,e_1,e_3 满足 (1.1), 有 $k_{23}=0$. 由 $\mathfrak{g}$ 不含一维理想，从而要求 $m_{21}\neq 0$, 而另一方面，由 e_1,e_3,e_1 满足 (1.1), 有 $m_{21}=0$. 矛盾．故这种情况不存在满足条件的 $\mathfrak{g}$.

4). I 为二维非 Lie 代数的 Leibniz 代数, 括积为 $[e_2,e_2]=e_1$, $[e_1,e_1]=[e_1,e_2]=[e_2,e_1]=0$. 设

$$L_{e_1}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_2}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & l_{13} \\ 0 & 0 & l_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{e_3}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 e_3,e_2,e_2 满足 (1.1), 有 $m_{11}=m_{21}=0$, 从而由 $\mathfrak{g}$ 不含一维理想，有 $k_{23}\neq 0$. 而另一方面，由 e_1,e_2,e_3 满足 (1.1), 有 $k_{23}=0$, 矛盾.

综上，我们有下面的结果：

引理 2.8 设 $\mathfrak{g}$ 是三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数，若 $\mathfrak{g}$ 只含二维理想，不含一维理想，当二维理想为非交换的 Lie 代数或非 Lie 代数的 Leibniz 代数时，则不存在满足条件的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$.

由前面的引理 2.2 – 2.8, 我们有下面的定理：

定理 2.1 任一个三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$, 必同构于下面的一种：

$\dim I = 1$.

(1) $[e_2, e_2] = e_3$.

(2) $[e_2, e_1] = e_3$.

(3) $[e_1, e_1] = e_3,\ [e_2, e_2] = e_3$.

(4) $[e_1, e_1] = e_3,\ [e_2, e_1] = ke_3,\ [e_2, e_2] = e_3$.

(5) $[e_3, e_2] = e_3$.

(6) $[e_1, e_1] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2$.

(7) $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2,\ [e_3, e_1] = ke_3$.

(8) $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_2, e_1] = -e_2,\ [e_2, e_2] = e_3,\ [e_3, e_1] = -2e_3$.

(9) $[e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_2] = e_3$.

(10) $[e_1, e_2] = e_1,\ [e_2, e_2] = e_3$.

(11) $[e_1, e_2] = e_1 + e_3,\ [e_3, e_2] = ke_3$.

(12) $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_2] = e_1$.

$\dim I = 2$, $\mathfrak{g}$ 只含二维理想

(13) $[e_2, e_3] = e_1 + e_2,\ [e_1, e_3] = ke_2$.

其中 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基，且基向量的其余括积均为 0，$k \neq 0$.

这样，我们就得到了所有三维非 Lie 代数的 Leibniz 代数的不同构的类，它包括 9 个 Leibniz 代数和 4 个 Leibniz 代数的一维参数簇.

推论 2.1 对所有非 Lie 代数的 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$，当 $\dim\mathfrak{g} \leqslant 3$ 时均是可解的.

参考文献：

[1] BLOCH A. *On a generalization of Lie algebra* [J]. Math in USSR Doklady, 1965, **165**(3): 471–473.

[2] LODAY J L. *Cyclic Homology* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[3] LODAY J L. *Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz* [J]. Enseign. Math. (2), 1993, **39**(3-4): 269–293. (in French)

[4] LODAY J L, PIRASHVILI T. *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology* [J]. Math. Ann., 1993, **296**(1): 139–158.

[5] LODAY J L. *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras* [J]. Math. Z., 1996, **221**(1): 41–47.

[6] PIRASHVILI T. *On Leibniz homology* [J]. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1994, **44**(2): 401–411.

[7] AYUPOV SH A, OMIROV B A. *On Leibniz Algebras* [M]. Algebra and Operator Theory (Tashkent, 1997), 1–12, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[8] AYUPOV SH A, OMIROV B A. *On some classes of nilpotent Leibniz algebras* [J]. Sibirsk. Mat. Zh., 2001, **42**(1): 18–29. (in Russian)

[9] ALBEVERIO S, AYUPOV SH A, OMIROV B A. *On nilpotent and simple Leibniz algebras* [J]. Comm. Algebra, 2005, **33**(1): 159–172.

[10] HUMPHREYS J E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* [M]. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

Classification of 3-Dimensional Leibniz Algebras

JIANG Qi-fen
(Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Leibniz algebras are noncommutative generalizations of Lie algebras. In this paper, all 3-dimensional Leibniz algebras are determined up to isomorphism.

Key words: Leibniz algebras; nilpotency; solvability; ideal.