第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0755-07 **文献标识码**: **A**

区间值直觉模糊超子群

詹建明
(湖北民族学院数学系, 湖北 恩施 445000)
(E-mail: zhanjianming@hotmail.com)

摘 要: 在 K.Atanassov 引进区间值直觉模糊集的基础上, 给出了区间值直觉模糊超子群的定义, 刻画了其特征结构, 研究了这类区间值直觉模糊超群的同态像及原像等问题. 同时, 讨论了区间值直觉模糊超子群与区间值直觉模糊子群的关系.

关键词: 超群; 区间值直觉模糊超子群; 同态; 区间值直觉模糊子群.
MSC(2000): 20N20; 20N25
中图分类: O159

1 引 言

直觉模糊集的概念是由保加利亚学者 K.Atanassov 于 1986 年首次提出, 之后, 其本人与其他学者针对其基本理论, 尤其在应用方面, 做了很多工作. 其中, K.Atanassov 和 G.Gargov[3] 提出了直觉模糊逻辑的理论框架; H.Bustince 和 P.Burillo[4,5] 进一步提出了直觉模糊关系及模糊鞅的理论, 并研究了其与区间值模糊集的联系和区别; C.Dogan[8] 给出了直觉模糊拓扑空间的定义, 并研究了它的一般拓扑结构问题; 李晓萍等 [10−12] 在模糊群方面作了大量而细致的工作, 这些工作无疑都是 K.Atanassov 工作的发展和继续, 当然也为丰富模糊数学理论及其在各领域中的广泛应用奠定了基础. 1990 年, T.Vougiouklis 在第 5 届 AHA 会议上提出了超结构的概念, 如半超群、超群、超拟群、超环及超模等 [13−15]; Davvaz 等 [6,7,9] 研究了这几类超群的结构与性质, 刻画了一系列结论. 到目前为止, 虽然在有关直觉模糊集的理论方面及应用方面的研究工作有很大进展, 并取得了一些应用成果, 但就其理论而言, 还显得很不完善, 尤其在与数学各个分支间的相互渗透和联系, 还缺乏理论依据. K.Atanassov 于 1989 年提出了区间值直觉模糊集 [2], 但更深入的代数理论研究工作尚未展开. 本文就是在上述工作的基础上, 从而给出了区间值直觉模糊超群的概念, 研究了这类超群的同态像及原像等问题, 继而讨论了其与一般区间值直觉模糊群二者的联系.

2 基本概念

我们先回忆一些基本概念:

定义 2.1[15] 称映射 $\cdot: H\times H\to P^*(H)$ 为超运算, 其中 $P^*(H)$ 是 H 的全体非空子集的集合; 称 H 为超群, 假若它满足:

(i) $\forall x,y,z\in H, (x\cdot y)\cdot z\bigcap x\cdot(y\cdot z)\neq\emptyset$;

收稿日期: 2005-12-15; **接受日期**: 2006-01-20
基金项目: 国家自然科学基金 (60474022); 湖北省教育厅重点科研项目 (D200729003).

(ii) $\forall a \in H, a \cdot H = H \cdot a = H$.

设 $x \in H$, $A, B \subseteq H$. 用 $A \cdot B, A \cdot x, x \cdot B$ 分别表示

$$A \cdot B = \bigcup_{x \in A, y \in B} x \cdot y, A \cdot x = A \cdot \{x\} \text{ 和 } x \cdot b = \{x\} \cdot B.$$

定义 2.2[6] 一个超群 H 的一个模糊子集 μ 称为 H 的一个模糊超子群，假若它满足

(i) $\forall x, y \in H, \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{\alpha \in x \cdot y} \mu(\alpha)$;

(ii) $\forall x, a \in H, \exists y \in H$ 使 $x \in a \cdot y$ 且 $\min\{\mu(a), \mu(x)\} \leq \mu(y)$;

(iii) $\forall x, a \in H, \exists z \in H$ 使 $x \in z \cdot a$ 且 $\min\{\mu(a), \mu(x)\} \leq \mu(z)$.

对偶地，有

定义 2.3 一个超群 H 的一个模糊子集 μ 称为 H 的一个反模糊超子群，假若它满足

(i) $\forall x, y \in H, \max\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \sup_{\alpha \in x \cdot y} \mu(\alpha)$;

(ii) $\forall x, a \in H, \exists y \in H$ 使 $x \in a \cdot y$ 且 $\max\{\mu(a), \mu(x)\} \geq \mu(y)$;

(iii) $\forall x, a \in H, \exists z \in H$ 使 $x \in z \cdot a$ 且 $\max\{\mu(a), \mu(x)\} \geq \mu(z)$.

定义 2.4[2] 称 $\hat{a} = [a^-, a^+]$ 为区间数，其中 $0 \leq a^- \leq a^+ \leq 1$. 令 $D[0,1]$ 表示所有区间数构成的集合，即 $D[0,1] = \{[a^-, a^+] | 0 \leq a^- \leq a^+ \leq 1\}$，其中 $D[0,1]$ 的元素称为 $D[0,1]$ 的区间数.

设 $a \in [0,1]$, 规定 $a = [a, a]$, 则显然 $a \in D[0,1]$, 这意味着区间数是普通数的扩张.

定义 2.5[2] 设 $\hat{a}_i \in D[0,1]$, 其中 $\hat{a}_i = [a_i^-, a_i^+], \forall i \in I$, 这里 I 是指标集. 定义

$$\inf \hat{a}_i = [\bigwedge_{i \in I} a_i^-, \bigwedge_{i \in I} a_i^+]; \quad \sup \hat{a}_i = [\bigvee_{i \in I} a_i^-, \bigvee_{i \in I} a_i^+].$$

特别地，设 $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in D[0,1], \hat{a}_1 = [a^-, a^+], \hat{a}_2 = [b^-, b^+]$. 规定

(1) $\hat{a}_1 \leq \hat{a}_2 \Leftrightarrow a^- \leq b^-, a^+ \leq b^+$;

(2) $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 \Leftrightarrow a^- = b^-, a^+ = b^+$;

(3) $\hat{a}_1 < \hat{a}_2 \Leftrightarrow \hat{a}_1 \leq \hat{a}_2$ 且 $\hat{a}_1 \neq \hat{a}_2$;

(4) $k\hat{a} = [ka^-, ka^+]$, 其中 $0 \leq k \leq 1$.

显然，$(D[0,1], \leq, \vee, \wedge)$ 构成一个完备格，且有最小元 $0 = [0,1]$ 和最大元 $1 = [1,1]$.

定义 2.6[2] 设 G 是普通群，映射 $\hat{\mu}: G \to D[0,1]$ 为群 G 的一个区间值模糊集. 设 $\hat{\mu}(x) = [\mu^-(x), \mu^+(x)]$, 其中 $\mu^-(x) \leq \mu^+(x), \forall x \in G$.

定义 2.7[1] 设 X 是一非空经典集合，形如 $A = \{(x, \alpha_A(x), \beta_A(x)) | 0 \leq \alpha_A(x) + \beta_A(x) \leq 1, \forall x \in X\}$ 的三重组称为 X 的直觉模糊集，其中 $\alpha_A: X \to [0,1]$ 与 $\beta_A: X \to [0,1]$ 均为 X 上的普通模糊集，$\alpha_A(x)$ 与 $\beta_A(x)$ 分别表示 X 上元素 x 属于 A 的隶属度与非隶属度.

为方便起见，通常将直觉模糊集 $A = \{(x, \alpha_A(x), \beta_A(x)) | 0 \leq \alpha_A(x) + \beta_A(x) \leq 1, \forall x \in X\}$ 简记为 $A = \{(x, \alpha_A(x), \beta_A(x)) | x \in X\}$.

定义 2.8[1] 称 $A = \{(x, \hat{M}_A(x), \hat{N}_A(x)) | x \in X\}$ 为 X 上的区间值直觉模糊集, 其中 $[0,0] \leq \hat{M}_A(x) + \leq \hat{N}_A(x) \leq [1,1], \forall x \in X$. 简记为 $A = (\hat{M}_A, \hat{N}_A)$.

在区间值模糊集理论中规定， $\forall a\in[0,1],[a,a]=a$, 于是直觉模糊集是区间值直觉模糊集的一种特殊情况.

3 区间值直觉模糊超子群

定义 3.1 设 H 是超群，则 H 的区间值直觉模糊集 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 称为区间值直觉模糊超子群，假若它满足如下条件：

(1) $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(y)\}\le\inf_{\alpha\in x\cdot y}\hat{M}_A(\alpha)$ 且 $\max\{\hat{N}_A(x),\hat{N}_A(y)\}\ge\sup_{\alpha\in x\cdot y}\hat{N}_A(\alpha),\forall x,y\in H$;

(2) $\forall x,a\in H,\exists y\in H$ 使 $x\in a{\cdot}y$ 且 $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(a)\}\le\hat{M}_A(y)$ 与 $\max\{\hat{N}_A(x),\hat{N}_A(a)\}\ge\hat{N}_A(y)$;

(3) $\forall x,a\in H,\exists z\in H$ 使 $x\in z{\cdot}a$ 且 $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(a)\}\le\hat{M}_A(z)$ 与 $\max\{\hat{N}_A(x),\hat{N}_A(a)\}\ge\hat{N}_A(z)$.

定义 3.2 设 X 是非空集合， $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 为 X 的区间值直觉模糊子集，定义

$$U(\hat{M}_A;[t,s])=\{x\in X|\hat{M}_A(x)\ge[t,s]\};\quad L(\hat{N}_A;[t,s])=\{x\in X|\hat{N}_A(x)\le[t,s]\}.$$

定理 3.3 设 H 是超群，则 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 为 H 的区间值直觉模糊超子群的充要条件是对于 $\forall t,s\in[0,1],t\le s,U(\hat{M}_A;[t,s])$ 与 $L(\hat{N}_A;[t,s])$ 是 H 的超子群.

证明 设 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是 H 的区间值直觉 (S_H,T_H)- 模糊超子群, 对于 $\forall x,y\in U(\hat{M}_A;[t,s])$, 则 $\hat{M}_A(x)\ge[t,s]$ 且 $\hat{M}_A(y)\ge[t,s]$. 因而 $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(y)\}\ge\min\{[t,s],[t,s]\}=[t,s]$, 即 $\inf_{\alpha\in x\cdot y}\hat{M}_A(\alpha)\ge[t,s]$. 故对于 $\alpha\in x\cdot y$, 有 $\alpha\in U(\hat{M}_A;[t,s])$. 于是 $x\cdot y\subseteq U(\hat{M}_A;[t,s])$. 因此, 对于 $\forall a\in U(\hat{M}_A;[t,s])$, 有 $a\cdot U(\hat{M}_A;[t,s])\subseteq U(\hat{M}_A;[t,s])$. 设 $x,a\in U(\hat{M}_A;[t,s])$, 则 $y\in H$ 使 $x\in a\cdot y$ 且 $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(a)\}\le\hat{M}_A(y)$. 因 $x,a\in U(\hat{M}_A;[t,s])$, 则 $\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(a)\}\ge[t,s]$. 于是 $\hat{M}_A(y)\ge[t,s]$, 即 $y\in U(\hat{M}_A;[t,s])$, 这就说明 $U(\hat{M}_A;[t,s])\subseteq a\cdot U(\hat{M}_A;[t,s])$. 因而 $a\cdot U(\hat{M}_A;[t,s])=U(\hat{M}_A;[t,s])=U(\hat{M}_A;[t,s])\cdot a$. 故 $U(\hat{M}_A;[t,s])$ 是 H 的一个超子群. 类似可证 $L(\hat{N}_A;[t,s])$ 是 H 的超子群.

反之，设 $[t,s]\in D[0,1],U(\hat{M}_A;[t,s])(\ne\emptyset)$ 是 H 的超子群， $\forall x,y\in H$, 令 $[t_0,s_0]=\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(y)\}$, 则 $x,y\in U(\hat{M}_A;[t_0,s_0])$. 于是 $x\cdot y\subseteq U(\hat{M}_A;[t_0,s_0])$, 那么对于 $\alpha\in x\cdot y$, 有 $\alpha\in U(\hat{M}_A;[t_0,s_0])$, 即说明 $\inf_{\alpha\in x\cdot y}\hat{M}_A(\alpha)\ge T_H(\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(y))$. 现设 $a,x\in H$, 令 $[t_1,s_1]=\min\{\hat{M}_A(a),\hat{M}_A(x)\}$, 则 $a\cdot x\in U(\hat{M}_A;[t_1,s_1])$, 因而 $\exists y\in U(\hat{M}_A;[t_1,s_1])$ 使 $x\in a\cdot y$ 且 $\hat{M}_A(y)\ge[t_1,s_1]$. 那么 $\hat{M}_A(y)\ge\min\{\hat{M}_A(a),\hat{M}_A(x)\}$. 类似可证对于 $\forall a,x\in H,\exists z\in H$ 使 $x\in z\cdot a$ 且 $\hat{M}_A(z)\ge\min\{\hat{M}_A(a),\hat{M}_A(x)\}$. 故 $\hat{M}_A$ 是区间值模糊超子群. 同理可证 $\hat{N}_A$ 是区间值反模糊超子群. 从而 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是区间值直觉模糊超子群. □

定义 3.4 设 f 是集合 X 到 Y 的映射，且 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A),B=(\hat{M}_B,\hat{N}_B)$ 分别是 X 和 Y 的区间值直觉模糊集，则 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 的像 $f[A]=(f(\hat{M}_A),f(\hat{N}_A))$ 是 Y 的区间值直觉模糊集，规定对于一切 $y\in Y$,

$$f(\hat{M}_A)(y)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in f^{-1}(y)}\hat{M}_A(z), & 若\quad f^{-1}(y)\ne\emptyset,\\ [0,0], & 否则,\end{cases}$$

$$f(\hat{N}_A)(y)=\begin{cases}\inf\limits_{z\in f^{-1}(y)}\hat{N}_A(z), & 若\quad f^{-1}(y)\neq\emptyset,\\ [1,1], & 否则.\end{cases}$$

$B=(\hat{M}_B,\hat{N}_B)$ 的原像 $f^{-1}(B)=(\hat{M}_{f^{-1}(B)},\hat{N}_{f^{-1}(B)})$ 是 X 的区间值直觉模糊子集，规定对于一切 $x\in X$, $\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x)=\hat{M}_B(f(x))$; $\hat{N}_{f^{-1}(B)}(x)=\hat{N}_B(f(x))$.

事实上，按此定义，显然 $\forall x\in X$, $f(\hat{M}_A)(x)+f(\hat{N}_A)(x)\geq[0,0]$. 同时，对任意固定 $x\in X$. 一方面，若 $f^{-1}(x)\neq\emptyset$, 则

$$\begin{aligned}f(\hat{M}_A)(x)+f(\hat{N}_A)(x)&=\sup_{z\in f^{-1}(x)}\hat{M}_A(z)+\inf_{z\in f^{-1}(x)}\hat{N}_A(z)\\&\leq\sup_{z\in f^{-1}(x)}\hat{M}_A(z)+\sup_{z\in f^{-1}(x)}\hat{N}_A(z)=\sup_{z\in f^{-1}(x)}(\hat{M}_A(z)+\hat{N}_A(z))\leq[1,1].\end{aligned}$$

另一方面，若 $f^{-1}(x)=\emptyset$, 则

$$f(\hat{M}_A)(x)+f(\hat{N}_A)(x)=[0,0]+[1,1]=[1,1],$$

因此，恒有， $[0,0]\leq\hat{M}_A(x)+\leq\hat{N}_A(x)\leq[1,1],\forall x\in X$. 故 $f[A]=(f(\hat{M}_A),f(\hat{N}_A))$ 是 Y 的区间值直觉模糊集. $\forall x\in X$, 显然， $\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x)+\hat{N}_{f^{-1}(B)}(x)\geq[0,0]$, 而且

$$\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x)+\hat{N}_{f^{-1}(B)}(x)=\hat{M}_B(f(x))+\hat{N}_B(f(x))\leq[1,1],$$

故 $f^{-1}(B)=(\hat{M}_{f^{-1}(B)},\hat{N}_{f^{-1}(B)})$ 是 X 的区间值直觉模糊子集.

定义 3.5[6] 设 H_1 与 H_2 是超群,若映射 $f:H_1\to H_2$ 满足 $x,y\in H_1$, $f(x\cdot y)\cap f(x)\cdot f(y)\neq\emptyset$ 为超同态；若 f 满足 $x,y\in H_1$, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ 为强同态；若强同态 f 是满射的，则称 f 是满同态.

引理 3.6[15] 设 H_1 与 H_2 是超群，映射 $f:H_1\to H_2$ 是满同态. 若 K 是 H_1 的超子群，则 $f(K)$ 是 H_2 的超子群.

定理 3.7 设 H_1 与 H_2 是超群， f 是 H_1 到 H_2 的满同态，则

(i) 若 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是 H_1 的区间值直觉模糊超子群，则 A 的像 $f[A]$ 是 H_2 的区间值直觉模糊超子群;

(ii) 若 $B=(\hat{M}_B,\hat{N}_B)$ 是 H_2 的区间值直觉模糊超子群，则 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是 H_1 的区间值直觉模糊超子群.

证明 (i) 设 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是 H_1 的区间值直觉模糊超子群，由定理 3.3 知， $\forall[t,s]\in D[0,1]$, $U(\hat{M}_A;[t,s])$ 与 $L(\hat{N}_A;[t,s])$ 是 H_1 的超子群, 由引理 3.6 知 $f(U(\hat{M}_A;[t,s])$ 与 $f(L(\hat{N}_A;[t,s]))$ 是 H_2 的超子群, 由文献 [7] 命题 3.6 知， $U(f(\hat{M}_A);[t,s])=f(U(\hat{M}_A;[t,s]))$ 且 $L(f(\hat{N}_A);[t,s])=f(L(\hat{N}_A;[t,s]))$, 则 $U(f(\hat{M}_A);[t,s])$ 与 $L(f(\hat{N}_A);[t,s])$ 是 H_2 的超子群, 从而由定理 3.3 知， $f[A]$ 是 H_2 的区间值直觉模糊超子群.

(ii) 对于 $\forall x,y\in H,\alpha\in x\cdot y$, 则

$$\hat{M}_{f^{-1}(B)}(\alpha)=\hat{M}_B(f(\alpha))\geq\min\{\hat{M}_B(f(x)),\hat{M}_B(f(y))\}=\min\{\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x),\hat{M}_{f^{-1}(B)}(y)\},$$

即 $\inf_{\alpha\in x\cdot y}\hat{M}_{f^{-1}(B)}(\alpha)\geq\min\{\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x),\hat{M}_{f^{-1}(B)}(y)\}$.

同理可证明 $\sup_{\alpha\in x\cdot y}\hat{N}_{f^{-1}(B)}(\alpha)\le\max\{\hat{N}_{f^{-1}(B)}(x),\hat{N}_{f^{-1}(B)}(y)\}$.

下证定理满足定义 3.1(2), 设 $x,a\in H$, 则 $\exists y\in H$ 使 $x\in a\cdot y$, 即有 $f(x)\in f(a)\cdot f(y)$ 且

$$\min\{\hat{M}_{f^{-1}(B)}(x),\hat{M}_{f^{-1}(B)}(a)\}=\min\{\hat{M}_B(f(x)),\hat{M}_B(f(a))\}\le\hat{M}_B(f(y))=\hat{M}_{f^{-1}(B)}(y).$$

类似可证 $\max\{\hat{N}_{f^{-1}(B)}(x),\hat{N}_{f^{-1}(B)}(a)\}\ge\hat{N}_{f^{-1}(B)}(y)$. 关于定理满足定义 3.1(3) 类似于上述证明，故 $f^{-1}(B)$ 是 H_1 的区间值直觉模糊超子群. □

设 $(H,\cdot)$ 是超群，令 $\mathcal{U}$ 是超群 H 的元素的所有有限积的集合.

在 H 上定义 β 如下：

$$x\beta y\Longleftrightarrow\{x,y\}\subseteq u,\quad u\in\mathcal{U}.$$

设 $\widehat{\beta}$ 是 β 的传递闭包，则 $H/\widehat{\beta}$ 是一个群．在 $H/\widehat{\beta}$ 上定义下述通常运算：

$$\widehat{\beta}(a)\odot\widehat{\beta}(b)=\{\widehat{\beta}(c)|\ \text{ for all }\ c\in\widehat{\beta}(a)\cdot\widehat{\beta}(b)\},\quad\forall a,b\in H.$$

Vougiouklis 在文献 [15] 证明了当 a 和 b 确定时， $\widehat{\beta}(a)\odot\widehat{\beta}(b)$ 仅含一个元素．这即证明了 $\odot$ 的合理性，从而我们可以将上述定义改为：

$$\widehat{\beta}(a)\odot\widehat{\beta}(b)=\widehat{\beta}(c),\forall c\in\widehat{\beta}(a)\cdot\widehat{\beta}(b)$$

关系 β^* 是使 H/β^* 构成群 H 上的最小等价关系，称 β^* 是 H 上的基本等价关系 [15].

定理 3.8[15] 基本等价关系 β^* 是 β 的传递闭包，即 $\beta^*=\widehat{\beta}$.

定义 3.9 设 $(H,\cdot)$ 是超群，且 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是 H 的区间值直觉模糊子集，则区间值直觉模糊子集 $A/\beta^*=(\hat{M}_{A_{\beta^*}},\hat{N}_{A_{\beta^*}})$ 定义如下：

$$\hat{M}_{A_{\beta^*}}:\ \begin{array}{l}H/\beta^*\to D[0,1]\\ \hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))=\sup\limits_{a\in\beta^*(x)}\hat{M}_A(a),\end{array}$$

$$\hat{N}_{A_{\beta^*}}:\ \begin{array}{l}H/\beta^*\to D[0,1]\\ \hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))=\inf\limits_{a\in\beta^*(x)}\hat{N}_A(a).\end{array}$$

下证对于 $\forall\beta^*(x)\in H/\beta^*$, $[0,0]\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))+\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\le[1,1]$.

事实上, $\forall\beta^*(x)\in H/\beta^*$, 显然, $\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))+\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\ge[0,0]$, 另一方面, $\forall a\in\beta^*(x)$, $\hat{M}_A(a)+\hat{N}_A(a)\le[1,1]$, 即 $\hat{M}_A(a)\le[1,1]-\hat{N}_A(a)$. 因而,

$$\begin{aligned}\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))&=\sup_{a\in\beta^*(x)}\hat{M}_A(a)\le\sup_{a\in\beta^*(x)}\hat{M}_A\{[1,1]-\hat{N}_A(a)\}\\&=[1,1]-\inf_{a\in\beta^*(x)}\hat{N}_A(a)\}=[1,1]-\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\end{aligned}$$

即 $\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))+\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\le[1,1]$. 故上述定义是合理的. □

定义 3.10 设 $(G,*)$ 是普通群，且 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 为 H 的区间值直觉模糊集，则称 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 为 G 的区间值直觉模糊子群，假若它满足

(i) $\forall x,y\in G,\min\{\hat{M}_A(x),\hat{M}_A(y)\}\le\hat{M}_A(x*y)$ 且 $\max\{\hat{N}_A(x),\hat{N}_A(y)\}\ge\hat{N}_A(x*y)$;

(ii) $\forall x\in G,\hat{M}_A(x)\le\hat{M}_A(x^{-1})$ 且 $\hat{N}_A(x)\ge\hat{N}_A(x^{-1})$.

定理 3.11 设 $A=(\hat{M}_A,\hat{N}_A)$ 是超群 H 的区间值直觉模糊超子群, 则 A/β^* 是群 H/β^* 的区间值直觉模糊子群.

证明 易知每个群是超群. 因此, 先考虑 H/β^* 作为一个超群. 定义 $\varphi: H\to H/\beta^*$ 为 $\varphi(a)=\beta^*(a),\forall a\in H$, 则 φ 是满同态, 从而由定理 3.7 知, A/β^* 是 H/β^* 的区间值直觉模糊超子群, 即

(i) $\forall\beta^*(x),\beta^*(y)\in H/\beta^*$, 有

$$\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y))\}\le\inf_{\beta^*(\alpha)\in\beta^*(x)\odot\beta^*(y)}\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\alpha))$$

且 $\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y))\}\ge\sup\limits_{\beta^*(\alpha)\in\beta^*(x)\odot\beta^*(y)}\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\alpha))$;

(ii) $\forall\beta^*(x),\beta^*(a)\in H/\beta^*,\exists\beta^*(y)\in H/\beta^*$ 使 $\beta^*(x)=\beta^*(a)\odot\beta^*(y)$ 且

$$\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(a))\}\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y)),$$

$$\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(a))\}\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y)).$$

下证定理满足定义 3.10(i). 由 (i) 知, $\forall\beta^*(x),\beta^*(y)\in H/\beta^*$, 有

$$\begin{aligned}\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y))\}&\le\inf_{\beta^*(\alpha)\in\beta^*(x)\odot\beta^*(y)}\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\alpha))\\&\le\sup_{\beta^*(\alpha)\in\beta^*(x)\odot\beta^*(y)}\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\alpha))=\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)\odot\beta^*(y))\end{aligned}$$

即 $\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y))\}\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)\odot\beta^*(y))$, 类似可证

$$\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y))\}\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)\odot\beta^*(y)).$$

下证定理满足定义 3.10(ii), 即对于 $\forall\beta^*(x)\in H/\beta^*$,

$$\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1}),\quad\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1}).$$

因为 $\beta^*(x)\in H/\beta^*$, 不妨设 $\beta^*(a)=\beta^*(x)$, 则由 (ii) 知 $\exists\beta^*(y_1)\in H/\beta^*$, 使 $\beta^*(x)=\beta^*(x)\odot\beta^*(y_1)$, 且

$$\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\}\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y_1)),$$

$$\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)),\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\}\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y_1)),$$

因为 $\beta^*(x)=\beta^*(x)\odot\beta^*(y_1)$, 则 $\omega_H=\beta^*(y_1)$, 其中 ω_H 表示 H/β^* 的单位元, 从而

(I) $\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\omega_H))$ 与 $\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(\omega_H))$.

设 $\beta^*(x),\omega_H\in H/\beta^*$. 由 (ii) 知, $\exists\beta^*(y_2)\in H/\beta^*$ 使 $\omega_H=\beta^*(x)\odot\beta^*(y_2)$, 且

$$\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\omega_H),\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\}\le\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y_2)),$$

$$\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\omega_H),\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\}\ge\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(y_2)),$$

因为 $\omega_H=\beta^*(x)\odot\beta^*(y_2)$, 则 $\beta^*(y_2)=\beta^*(x)^{-1}$. 于是

(II)

$$\min\{\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\omega_H), \hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\} \leq \hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1}),$$

$$\max\{\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\omega_H), \hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x))\} \geq \hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1}).$$

由 (I) 与 (II) 可得 $\hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)) \leq \hat{M}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1})$, $\hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)) \geq \hat{N}_{A_{\beta^*}}(\beta^*(x)^{-1})$. 故 A/β^* 是群 H/β^* 的区间值直觉模糊子群. □

致谢 本文得到岑嘉评教授和谭宜家教授耐心细致的指导和帮助，在此表示衷心地感谢！

参考文献：

[1] ATANASSOV K. *Intuitionistic fuzzy sets* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, **20**(1): 87–96.

[2] ATANASSOV K, GARGOV G. *Interval valued intuitionistic fuzzy sets* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, **31**(3): 343–349.

[3] ATANASSOV K, GARGOV G. *Elements of intuitionistic fuzzy logic. I* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, **95**(1): 39–52.

[4] BUSTINCE H, BWRILLO P. *Structures on intuitionstic fuzzy relations* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, **78**(3): 293–303.

[5] BURILLO P, BUSTINCE H. *Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, **78**(3): 305–316.

[6] DAVVAZ B. *Fuzzy H_v-groups* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, **101**(1): 191–195.

[7] DAVVAZ B. *Interval-valued fuzzy subhypergroups* [J]. Korean J. Comput. Appl. Math., 1999, **6**(1): 197–202.

[8] DOGAN C. *An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, **112**(3): 319–325.

[9] DUDEK W A, DAVVAZ B, JUN Y B. *On intuitionistic fuzzy sub-hyperquasigroups of hyperquasigroups* [J]. Inform. Sci., 2005, **170**(2-4): 251–262.

[10] 王贵君，李晓萍．直觉模糊正规子群的乘积结构 [J], 系统工程理论与实践， 2003, **23**(11): 83–87.
WANG Gui-jun, LI Xiao-ping. *The structure of product of intuitionistic fuzzy normal subgroups* [J]. System Engineering Theory and Practice, 2003, **23**(11): 83–87 (in Chinese).

[11] LI Xiao-ping, WANG Gui-jun. *The S_H-interval-valued fuzzy subgroups* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, **112**(3): 319–325.

[12] 王贵君，李晓萍． T_H- 型区间值模糊正规子群 [J]. 模糊系统与数学， 1998, **12**(1): 60–65.
WANG Gui-jun, LI Xiao-ping. *T_H interval-valued fuzzy normal subgroups* [J]. Mohu Xitong yu Shuxue, 1998, **12**(1): 60–65. (in Chinese)

[13] VONGIOUKLIS T. *The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield* [C]. Algebraic hyperstructures and applications (X ά nthi, 1990), 203–211, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991.

[14] VOUGIOUKLIS T. *A new class of hyperstructures* [J]. J. Combin. Inform. System Sci., 1995, **20**(1-4): 229–235.

[15] VOUGIOUKLIS T. *Hyperstructures and Their Representations* [M]. Hardronic Press Inc. Florida,1994.

Interval Valued Intuitionistic Fuzzy H_v-Subgroups

ZHAN Jian-ming
(Department of Mathematics, Hubei Institute for Nationalitices, Hubei 445000, China)

Abstract: On the basis of the concept of the interval valued intuitionistic fuzzy sets introduced by K.Atanassov, the notion of interval valued intuitionistic fuzzy H_v-subgroups is given and the characteristic properties are described. The homomorphic image and the inverse image are investigated. In particular, the connections between interval valued intuitionistic fuzzy H_v-subgroups and interval valued intuitionistic fuzzy subgroups are discussed.

Key words: H_v-group; interval valued intuitionistic fuzzy H_v-subgroup; homomorphism; interval valued intuitionistic fuzzy subgroup.