第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0687-06 **文献标识码**: **A**

具有一对零态射的 Morita Context 环 (II)

王 尧， 任艳丽
(南京晓庄学院数学系，江苏 南京 211171)
(E-mail: wangy@njxzc.edu.cn)

摘 要: 设 (A,B,V,W,ψ,φ) 是一个 Morita Context, 具有一对零态射 $\psi=0$, $\varphi=0$, $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是对应的 Morita Context 环. 本文给出了 C 与 A,B,V,W 之间关于环的 π- 正则性、 semiclean 性、 Mophic 性和环的 Exchgange 性、 Potent 性、 GM 性的关系.

关键词: Morita Context 环; semiclean 环; Morphic 环; exchange 环; Potent 环.
MSC(2000): 16W50; 16E50
中图分类: O153.3

一个 Morita Context (A,B,V,W,ψ,φ) 包含两个环 A, B, 两个双模 ${}_AV_B, {}_BW_A$ 和一对双模同态： $\psi: V\otimes_B W\to A$ 和 $\varphi: W\otimes_A V\to B$, 满足条件 $\psi(v\otimes w)v'=v\varphi(w\otimes v'), \varphi(w\otimes v)w'=w\psi(v\otimes w')$. 该条件保证了

$$C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix} \mid a\in A, b\in B, v\in V, w\in W\right\}$$

按照通常定义的矩阵加法和如下定义的矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v' \\ w' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi(v\otimes w') & av'+vb' \\ wa'+bw' & \varphi(w\otimes v')+bb' \end{pmatrix}$$

做成一个环，称为 Morita Context 环 [1−3].

Morita Context 最初是由 Morita K 在文献 [4] 中为证明关于单环结构的 Wedderburn 定理而引进的，后来又以不同的形式成为研究具有极小单侧理想的本原环的基本工具 [5,p75]. 人们也常用 Morita Context 环来构造环论中的各种例子和反例. 近年来, 有许多文献对 Morita Context 环从各种不同的角度进行研究 [1−3]. 显然， Morita Context 环包含一切 2×2 矩阵和一切形式 (上, 下) 三角矩阵环. 另一方面, 对任何两个双模 ${}_AV_B\neq 0, {}_BW_A\neq 0$, 只要定义 $\psi: V\otimes_B W\to A$ 与 $\varphi: W\otimes_A V\to B$ 都是零同态，则 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 就是一个 Morita Context 环，但 C 不是形式 (上，下) 三角矩阵环，所以具有一对零态射的 Morita Context 环是形式三角矩阵环的真拓广.

最近， A. Haghany[3] 对具有一对零同态的 Morita Context 环 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 探讨了 C 与 A,B,V,W 之间关于环的 Hopf 性与余 Hopf 性的关系．本文将继续文献 [3] 的研究．文中所

收稿日期: 2006-07-11; **接受日期**: 2007-01-17
基金项目: 国家自然科学基金 (10471055).

述环 A,B 均假定有单位元，分别记为 1_A 和 1_B. 所说的模均指酉模. 文中所讨论的一切 Morita Context 环均假定 $\psi=0,\varphi=0$.

1 关于 π- 正则环， Semiclean 环与 Morphic 环

一个环 R 称为 π- 正则环，如果对任意 $a\in R$, 都有 $s\in R$ 和 $n\in N$, 使得 $a^n=a^{n+1}s$.

定理 1.1 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 π- 正则环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 π- 正则环.

证明 “$\Rightarrow$”. 设 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 π- 正则环，取

$$I=\begin{pmatrix} 0 & V \\ W & B \end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} A & V \\ W & 0 \end{pmatrix},$$

则 I,J 都是 C 的理想. 易见 $C/I\overset{\theta}{\cong}A$, $C/J\overset{\varphi}{\cong}B$. 对 $\forall a\in A$, 存在 $c\in C$ 使得 $\theta(\bar{c})=a$. 由于 c 是 π- 正则的，故有 $s\in C$ 和 $n\in N$ 使得 $c^n=c^{n+1}s$, 从而 $\bar{c}^n=\bar{c}^{n+1}\bar{s}$, $a^n=a^{n+1}\theta(\bar{s})$. 由 a 的任意性知 A 是 π- 正则环. 类似可证 B 也是 π- 正则环.

“$\Leftarrow$”. 设 A,B 都是 π- 正则环，令 I,J 是如上取定的 C 的两个理想，则有

$$IJ=\begin{pmatrix} 0 & V \\ W & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & V \\ W & 0 \end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix} \psi(V\otimes W) & 0 \\ WA+BW & \varphi(W\otimes V) \end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W & 0 \end{pmatrix},$$

且 $C/I\cong A$ 与 $C/J\cong B$ 都是 π- 正则环. 任取 $c\in C$, 则有 $s,t\in C$ 和 $m,n\in N$ 使得 $c^m=c^{m+1}s(\mathrm{mod}I)$, $c^n=c^{n+1}t(\mathrm{mod}J)$. 不妨设 $m<n$, 此时由 $c^m=c^{m+1}s+y(y\in I)=c^m\cdot cs+y=(c^{m+1}s+y)cs+y=c^{m+2}s^2+y_1(y_1\in I)=\cdots=c^{n+1}s^{n-m-1}+y'(y'\in I)$, 可得 $c^n=c^{n+1}s'+y''(s'\in C,y''\in I)$. 再由 $c^n=c^{n+1}t+z(z\in J)$, 我们又有

$$(c^n-c^{n+1}t)(c^n-c^{n+1}s')\in IJ\subseteq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $(c^n-c^{n+1}t)^2(c^n-c^{n+1}s')^2=0$, 即 $(c^{2n}-2c^{2n+1}t+c^{2n+2}t^2)\cdot(c^{2n}-2c^{2n+1}s'+c^{2n+2}s'^2)=0$, 由此可得 $c^{4n}=c^{4n+1}s''$, 其中 $s''\in C$. 这证明了 C 是 π- 正则环.

设 R 是一个环， $r\in R$. 称 r 是 R 的一个 Semiclean 元，如果 $r=p+u$, 其中 $p\in P(R)$ (R 的周期元素集合), $u\in U(R)$ (R 的可逆元素集合). 称 R 是 Semiclean 环 [6], 如果 R 的每一个元素都是 R 的 Semiclean 元. clean 环是 Semiclean 环. 对于 3 阶循环群 G 和任何素数 p, 群环 Z_pG 是 Semiclean 环. Semiclean 环上的 $n\times n$ 矩阵环是 Semiclean 环.

定理 1.2 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 Semiclean 环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 Semiclean 环.

证明 “$\Rightarrow$”. 设 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 Semiclean 环. 令 I,J 如定理 1.1 证明中的 C 的两个理想，则有 $C/I\cong A,C/J\cong B$. 据文献 [6, Prop.2.1], 作为 Semiclean 环的同态象， A,B 都是 Semiclean 环.

“$\Leftarrow$”. 设 A,B 都是 Semiclean 环. 任取 $\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\in C$, 则存在 $p_1\in P(A),u_1\in U(A)$ 和 $p_2\in P(B)$, $u_2\in U(B)$, 使得 $a=p_1+u_1$, $b=p_2+u_2$. 于是

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} u_1^{-1} & -u_1^{-1}vu_2^{-1} \\ -u_2^{-1}wu_1^{-1} & u_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{-1} & -u_1^{-1}vu_2^{-1} \\ -u_2^{-1}wu_1^{-1} & u_2^{-1} \end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}\in U(C)$. 又设 $p_1^m=p_1^n(m<n), p_2^k=p_2^l(k<l)$. 取 $t=(n-m)(l-k)+k$, 则有 $p_1^t=p_1^k, p_2^t=p_2^k, t>k$. 于是有

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}^k.$$

这说明 $\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}^t\in P(C)$.

设 R 是一个环， $a\in R$. 说 a 是 R 的一个左 Morphic 元，如果 $R/Ra\cong l(a)$. 等价地， a 是 R 的左 Morphic 元 $\Leftrightarrow$ 存在 $b\in R$ 使得 $Ra=l(b)$ 和 $Rb=l(a)$. 称 R 为左 Morphic 环 [7], 如果 R 的每一个元素都是左 Morphic 元. 单位正则环，有唯一非平凡左理想的环都是左 Morphic 环.

定理 1.3 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是左 Morphic 环 $\Leftrightarrow A, B$ 都是左 Morphic 环, 且 $V=0, W=0$.

证明 “$\Rightarrow$”. 设 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是左 Morphic 环. 对任意 $r\in A$, 有

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in C, l_C\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_A(r) & V \\ l_W(r) & B \end{pmatrix},$$

故存在 $\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}\in C$ 使得

$$C\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=l_C\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}=l_C\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Aa_1 & Av_1+Vb_1 \\ Wa_1+Bw_1 & Bb_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_A(r) & V \\ l_W(r) & B \end{pmatrix}$$

可得 $Aa_1=l_A(r)$. 再由

$$\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ar & 0 \\ Wr & 0 \end{pmatrix}=l_C\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1 & av_1+vb_1 \\ wa_1+bw_1 & bb_1 \end{pmatrix}$$

知

$$l_C\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_A(a_1) & Av_1+Vb_1 \\ Wa_1+Bw_1 & l_B(b_1) \end{pmatrix},$$

$l_A(a_1)=Ar$. 综上，我们有 $Ar=l_A(a_1), Aa_1=l_A(r)$. 所以 A 是左 Morphic 环.

任取 $s\in B$, 则 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\in C$, 类似以上讨论可证得存在 $b_1\in B$ 使得 $l_B(s)=Bb_1, l_B(b_1)=Bs$, B 是左 Morphic 环. 据 [7, Prop.18] 知 $V=0, W=0$.

"$\Leftarrow$". 设 A,B 都是左 Morphic 环, 且 $V=0, W=0$, 则 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 任取 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\in C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 则 $l_C\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_A(a) & 0 \\ 0 & l_B(b) \end{pmatrix}$. 依假定, 存在 $a_1\in A$ 和 $b_1\in B$, 使得 $l_A(a)=Aa_1, l_A(a_1)=Aa, l_B(b)=Bb_1, l_B(b_1)=Bb$. 这样就得

$$l_C\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Aa_1 & 0 \\ 0 & Bb_1 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$l_C\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Aa & 0 \\ 0 & Bb \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

于是知 C 是左 Morphic 环.

2 关于 Exchange 环, Potent 环与 GM- 环

一个有 1 的环称为 Exchange 环 [8], 如果对 $\forall a\in R$, 存在 $b,c\in R$, 使得 $bab=b$, $c(1-a)(1-ba)=(1-ba)$. Von Neumann 正则环, π- 正则环, 半完备环与 clean 环都是 Exchange 环.

引理 2.1[9] (1) $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 的 Jacobson 根 $J(C)=\begin{pmatrix} J(A) & V \\ W & J(B) \end{pmatrix}$.

(2) 映射 $\varphi: C/J(C)\to A/J(A)\times B/J(B)$, $\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}+J(C)\mapsto (a+J(A), b+J(B))$ 是环同构.

定理 2.2 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 Exchange 环 $\Leftrightarrow$ A,B 都是 Exchange 环.

证明 "$\Rightarrow$". 设 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ 是 Exchange 环, 则对任意 $c=\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\in C$ 存在 $\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_2 & v_2 \\ w_2 & b_2 \end{pmatrix}\in C$, 使得

$$\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_2 & v_2 \\ w_2 & b_2 \end{pmatrix}&\left[\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\right]\\ &=\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即有

$$\begin{pmatrix} a_1aa_1 & a_1av_1+(a_1v+v_1b)b_1 \\ (w_1a+b_1w)a_1+b_1bw & b_1bb_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ w_1 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} a_2(1-a)(1-a_1a) & a_2(1-a)(-a_1v-v_1b)+(-a_2v+v_2(1-b)(1-b_1b)) \\ (w_2(1-a)-b_2w)(1-a_1a)+b_2(1-b)(-w_1a-b_1w) & b_2(1-b)(1-b_1b) \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 1-a_1a & -a_1v-v_1b \\ -w_1a-b_1w & 1-b_1b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此推出，$a_1aa_1=a_1$，$a_2(1-a)(1-a_1a)=1-a_1a$ 和 $b_1bb_1=b_1$，$b_2(1-b)(1-b_1b)=1-b_1b$. 这证明 A,B 都是 Exchange 环.

“$\Leftarrow$”. 设 A,B 都是 Exchange 环, 由文献 [10, Coroll.2.4] 知 $A/J(A)$ 与 $B/J(B)$ 都是 Exchange 环, 且 A,B 的幂等元分别模 $J(A),J(B)$ 可提升. 因为 $J(C)=\begin{pmatrix} J(A) & V \\ W & J(B)\end{pmatrix}$, $C/J(C)\cong A/J(A)\times B/J(B)$, 所以 $C/J(C)$ 是 Exchange 环, 且其幂等元模 $J(C)$ 可提升. 再由文献 [10, Coroll.2.4] 知 C 为 Exchange 环.

称一个环 R 是 Potent 环 [10], 如果 R 的幂等元模 $J(R)$ 可提升, 且 R 的任何不含于 $J(R)$ 的左理想都包含一个非零幂等元. clean 环, Exchange 环都是 Potent 环 [10,11].

定理 2.3 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B\end{pmatrix}$ 是 Potent 环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 Potent 环.

证明 “$\Rightarrow$”. 设 C 是 Potent 环, I 是 A 的一个左理想且 $I\not\subseteq J(A)$, 则 $\bar I=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是 C 的一个左理想且由引理 2.1(1) 知 $\bar I\not\subseteq J(C)=\begin{pmatrix} J(A) & V \\ W & J(B)\end{pmatrix}$. 于是 $\bar I$ 中包含一个非零幂等元 $\bar e=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 即 $\bar e^2=\bar e$. 这推出 $e^2=e\in I\subseteq A$, 故 I 中含有非零幂等元 e. 再设 J 是 B 的一个左理想且 $J\not\subseteq J(B)$, 则 $\bar J=\begin{pmatrix} 0 & VJ \\ 0 & J\end{pmatrix}$ 是 C 的一个左理想且 $\bar J\not\subseteq J(C)$. 故 $\bar J$ 中包含非零幂等元 $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & f\end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & f\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & vf \\ 0 & f^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & f\end{pmatrix}.$$

这推出 $f^2=f\in J, vf=v$. 又由 $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & f\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 知 f,v 不能都为 0, 故必 $f\neq 0$. 因此 J 中含有非零幂等元 $f\in B$. 据引理 2.1(2) 知 A,B 都是 Potent 环.

“$\Leftarrow$”. 设 A,B 都是 Potent 环, $\bar I$ 是 C 的一个左理想且 $\bar I\not\subseteq J(C)$, 则存在 $\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}\in\bar I$ 使得 $\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}\notin J(C)=\begin{pmatrix} J(A) & V \\ W & J(B)\end{pmatrix}$. 这推出或者 $a\notin J(A)$ 或者 $b\notin J(B)$. 现在考虑 C 的左理想 $C\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Aa & Av+Vb \\ Wa+Bw & Bb\end{pmatrix}\subseteq\bar I$. 如果 $b\notin J(B)$, 则 $Bb\not\subseteq J(B), Bb$ 中包含有非零幂等元 f, 故 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f\end{pmatrix}$ 是 $C\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}$ 中的一个非零幂等元. 如果 $a\notin J(A)$, 则 $Aa\notin J(A), Aa$ 中包含幂等元 $e=a_0a\in Aa$. 由于 $ea_0a=e\cdot e=e\neq 0$, $\begin{pmatrix} e & ea_0v \\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} e & ea_0v \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 故 $\begin{pmatrix} e & ea_0v \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是 $C\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}$ 中的一个非零幂等元. 再根据引理 2.1(2) 知 C 是 Potent 环.

称一个环 R 是 GM- 环 [12], 如果对任何 $x,y\in R$, 存在幂等元 $e,f\in R$ 和 $u\in U(R)$ 使得 $x-eu, y-fu^{-1}\in U(R)$. Exchange PI- 环, 具有有界幂零指数的 Exchange 环与半完备环都是 GM- 环.

定理 2.4 $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B\end{pmatrix}$ 是 GM- 环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 GM- 环.

证明 我们首先证明: R 是 GM- 环当且仅当 $R/J(R)$ 是 GM- 环. 事实上, 设 R 是 GM- 环, 对 $\forall\bar{x},\bar{y}\in\bar{R}=R/J(R)$, 有幂等元 $e,f\in R$ 和 $u\in U(R)$ 使得 $x-eu,y-fu^{-1}\in U(R)$, 于是有 $\bar{x}-\bar{e}\bar{u}\in U(\bar{R}),\bar{y}-\bar{f}\bar{u}^{-1}\in U(\bar{R})$, 故 $R/J(R)$ 是 GM- 环. 反之, 设 $R/J(R)$ 是 GM- 环, 对 $\forall x,y\in R$, 有幂等元 $\bar{e},\bar{f}\in\bar{R}$ 和 $\bar{u}\in U(\bar{R})$ 使得 $\bar{x}-\bar{e}\bar{u}\in U(\bar{R}),\bar{y}-\bar{f}\bar{u}^{-1}\in U(\bar{R})$. 于是有 $v\in R$ 使得 $(x-eu)v-1=v(x-eu)-1\in J(R)$, 有 $z\in R$ 使 $z(y-fu^{-1})-1=(y-fu^{-1})z-1\in J(R)$. 这样就有 $a\in R$ 使得 $a+(x-eu)v-1+a[(x-eu)v-1]=0$, 即 $(x-eu)v(1+a)=1$, 这说明 $x-eu$ 右可逆. 类似地, 有 $v(x-eu)-1\in J(R)$ 可推出 $x-eu$ 左可逆, 从而 $x-eu\in U(R)$. 同理可证 $y-fu^{-1}\in U(R)$. 这证得 R 是 GM- 环.

由于 $C/J(C)=A/J(A)\times B/J(B)$ 是 GM- 环 $\Leftrightarrow A/J(A),B/J(B)$ 都是 GM- 环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 GM- 环. 故有 C 是 GM- 环 $\Leftrightarrow A,B$ 都是 GM- 环.

参考文献:

[1] CHEN Huan-yin. *Morita contexts with many units* [J]. Comm. Algebra, 2002, **30**(3): 1499–1512.
[2] HAGHANY A. *Morita contexts and torsion theories* [J]. Math. Japon., 1995, **42**(1): 137–142.
[3] HAGHANY A. *Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts* [J]. Comm. Algebra, 1999, **27**(1): 477–492.
[4] MORITA K. *Duality for modules and its application on the theory of rings with minimum conditions* [J]. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigoku Sect. A, 1958, **6**: 83–142.
[5] JACOBSON N. *Structure of Rings* [M]. American Mathematical Society, Providence, R.I. 1964.
[6] YE Yuan-qing. *Semiclean rings* [J]. Comm. Algebra, 2003, **31**(11): 5609–5625.
[7] NICHOLSON W K. SÁNCHEZ C E. *Rings with the dual of the isomorphism theorem* [J]. J. Algebra, 2004, **271**(1): 391–406.
[8] MONK G S. *A characterization of exchange rings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**: 349–353.
[9] 王尧, 任艳丽. 具有一对零态射的 Morita Context 环 (I)[J]. 吉林大学学报 (理学版), 2006, **44**(3): 318–324. WANG Yao, REN Yan-li. *Morita context rings with a pair of zero homomorphisms. I* [J]. J. Jilin Univ. Sci., 2006, **44**(3): 318–324. (in Chinese)
[10] NICHOLSON W K. *Lifting idempotents and exchange ring* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **229**: 269–278.
[11] HAN J, NICHOLSON W K. *Extensions of clean rings* [J]. Comm. Algebra, 2001, **29**(6): 2589–2595.
[12] CHEN Huan-yin, CHEN Miao-sen. *GM-conditions and GM-rings* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 2003, **27**(1): 1–8.

Morita Context Ring with a Pair of Zero Homomorphisms (II)

WANG Yao, REN Yan-li
(Department of Mathematics, Nanjing Xiaozhuang University, Jiangsu 211171, China)

Abstract: Let (A,B,V,W,ψ,φ) be a Morita Context with a pair of zero homomorphisms and $C=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ the corresponding Morita Context ring. This paper deals with the relations between C and A,B,V,W on π-regular, semiclean, morphic propenties and exchange, potent, GM properties of rings.

Key words: Morita Context ring; semiclean ring; Morphic ring; exchange ring; Potent ring.