第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0939-05 **文献标识码**: **A**

两步投影对变分不等方程组解的迭代逼近

赵良才, 王雄瑞, 张正亮
(宜宾学院数学系, 四川 宜宾 644007)
(E-mail: zhaolcyb@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文研究 Hilbert 空间中两步投影方法及其对变分不等方程组解具误差的迭代序列的收敛性. 本文结果发展和改进了 Verma 等人的最新结果.

关键词: 非线性变分不等方程组; 两步投影方法; r- 强单调映象; 收敛性分析.
MSC(2000): 47H05; 47H09; 49M05
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

近年来 Verma 等人在文献 [1–5] 中引入和研究了 Hilbert 空间 H 中在某些单调和 Lipschitz 连续条件下的投影型方法及其对变分不等方程解的收敛性分析与应用. 本文研究 Hilbert 空间中两步投影方法及其对变分不等方程组近似解的具误差的逼近问题. 本文结果发展和改进了 Verma 等人的最新结果.

本文处处假定 H 是一实的 Hilbert 空间, 其内积与范数分别记成 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $||\cdot||$, K 是 H 的非空闭凸子集, $T: K\to H$ 是一映象. 考虑以下两个非线性变分不等方程组 (简记成 SNVI) 问题: 求 $x^*, y^*\in K$ 使得

$$\langle\rho T(y^*)+x^*-y^*, x-x^*\rangle\geq 0,\quad \forall\, x\in K,\ \rho>0, \tag{1}$$

$$\langle\eta T(x^*)+y^*-x^*, x-y^*\rangle\geq 0,\quad \forall\, x\in K,\ \eta>0, \tag{2}$$

而 SVNI (1) 和 (2) 的问题等价于以下投影计算式

$$x^*=P_K[y^*-\rho T(y^*)],\quad \rho>0; \tag{3}$$

$$y^*=P_K[x^*-\eta T(x^*)],\quad \eta>0, \tag{4}$$

其中 P_K 表示 H 在 K 上的投影.

特例 1). 如果 $\eta=0$, 则 SVNI (1),(2) 的问题化为非线性变分不等方程 (简记为 NVI) 的问题: 求 $x^*\in K$ 使得

$$\langle T(x^*), x-x^*\rangle\geq 0,\quad \forall\, x\in K. \tag{5}$$

2). 如果 $K^*=\{f\in H:\langle f,x\rangle\geq 0,\forall x\in K\}$ 是 H 中闭凸锥 K 的极锥, 则 SNVI (1),(2) 问题等价于非线性相补问题组: 求 $x^*, y^*\in K$ 使得 $T(x^*)\in K^*, T(y^*)\in K^*$ 且

$$\langle\rho T(y^*)+x^*-y^*, x^*\rangle=0,\quad \rho>0; \tag{6}$$

收稿日期: 2005-06-01; **接受日期**: 2007-03-22

$$\langle \eta T(x^*) + y^* - x^*, y^* \rangle = 0, \quad \eta > 0. \tag{7}$$

定义 1 设 H 是实的 Hilbert 空间, $T: H \to H$ 是一映象.

1). T 称为单调的，如果对任何 $x, y \in H$ 都有

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0.$$

2). T 称为 r- 强单调的，其中 $r > 0$, 如果对任何 $x, y \in H$ 都有

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq r||x - y||^2.$$

3). T 称为 s-Lipschitz 的，其中 $s \geq 0$, 如果对任何 $x, y \in H$ 都有

$$\|T(x) - T(y)\| \leq s\|x - y\|.$$

引理 1.1[7] 设 $z \in H, x \in K$, 则

$$x = P_K(z) \Longleftrightarrow \langle x - z, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in K.$$

引理 1.2[8] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是二个非负数列，且满足条件

$$a_{n+1} \leq (1 - t_n)a_n + b_n, \quad \forall\, n \geq 0,$$

其中 $t_n \in [0, 1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2 投影方法

为了求解 SNVI (1),(2) 问题，我们提出下面的算法：

算法 2.1 对任给的 $x_0, y_0 \in K$, 计算序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n P_K[y_n - \rho T(y_n)] + \gamma_n u_n, \\ y_n &= (1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n P_K[x_n - \eta T(x_n)] + \delta_n v_n, \end{aligned}$$

其中 P_K 是 H 在 K 上的投影，常数 $\rho, \eta > 0$, $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 K 中的有界序列，且

$$0 \leq \alpha_n + \gamma_n \leq 1, \quad 0 \leq \beta_n + \delta_n \leq 1, \quad \forall\, n \geq 0.$$

若 $\eta = 0, \delta_n = 0$, 则算法 2.1 化为：

算法 2.2 对任给的 $x_0 \in K$, 计算序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n P_K[x_n - \rho T(x_n)] + \gamma_n u_n,$$

其中 $0 \leq \alpha_n + \gamma_n \leq 1, \forall\, n \geq 0$, $\{u_n\}$ 是 K 中有界序列.

若 $\beta_n = 1, \delta_n = 0$, 则算法 2.1 化为：

算法 2.3 对任给的 $x_0, y_0 \in K$, 生成序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n P_K[y_n - \rho T(y_n)] + \gamma_n u_n;$$

$$y_n = P_K[x_n - \eta T(x_n)],$$

其中 $0 \leq \alpha_n + \gamma_n \leq 1, \forall\, n \geq 0$, $\{u_n\}$ 是 K 中有界序列.

3 主要结果

定理 3.1 设 H 是一实的 Hilbert 空间， K 是 H 的非空闭凸子集， $T: K \to H$ 是 r- 强单调且 μ-Lipschitz 连续映象，假设 $x^*, y^* \in K$ 是 SNVI (1),(2) 的解， $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是由算法 2.1 生成的序列，如果下列条件被满足：

(a) $0 \leq \alpha_n + \gamma_n \leq 1$, $0 \leq \beta_n + \delta_n \leq 1$, $\forall\, n \geq 0$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta_n) < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_n + \delta_n) < \infty$;

(c) $0 < \rho < 2r/\mu^2$, $0 < \eta < 2r/\mu^2$.

则序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别收敛于 x^*, y^*.

证明 因为 x^*, y^* 是 SNVI (1),(2) 的解，故

$$x^* = P_K[y^* - \rho T(y^*)], \quad y^* = P_K[x^* - \eta T(x^*)].$$

由算法 2.1 有

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x^*\| \\
&\quad = ||(1-\alpha_n-\gamma_n)(x_n - x^*) + \alpha_n\{P_K[y_n - \rho T(y_n)] - P_K[y^* - \rho T(y^*)]\} + \gamma_n(u_n - x^*)|| \\
&\quad \leq (1-\alpha_n-\gamma_n)||x_n - x^*|| + \alpha_n||P_K[y_n - \rho T(y_n)] - P_K[y^* - \rho T(y^*)]|| + \gamma_n||u_n - x^*|| \\
&\quad \leq (1-\alpha_n)||x_n - x^*|| + \alpha_n||y_n - y^* - \rho[T(y_n) - T(y^*)]|| + M\gamma_n,
\end{aligned} \tag{8}$$

因为 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 K 中的有界序列，故令

$$M = \max\{\sup_{n\geq 0}||u_n - x^*||,\ \sup_{n\geq 0}||v_n - y^*||,\ ||x^* - y^*||\}.$$

又因为 T 是 r- 强单调和 μ-Lipschitz 连续的，于是有

$$\begin{aligned}
&||y_n - y^* - \rho[T(y_n) - T(y^*)]||^2 \\
&\quad = ||y_n - y^*||^2 - 2\rho\langle T(y_n) - T(y^*), y_n - y^*\rangle + \rho^2||T(y_n) - T(y^*)||^2 \\
&\quad \leq ||y_n - y^*||^2 - 2\rho r||y_n - y^*||^2 + \rho^2\mu^2||y_n - y^*||^2 \\
&\quad = [1 - 2\rho r + (\rho\mu)^2]||y_n - y^*||^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

把 (9) 式代入 (8) 式得

$$\begin{aligned}
||x_{n+1} - x^*|| &\leq (1-\alpha_n)||x_n - x^*|| + \alpha_n\theta||y_n - y^*|| + M\gamma_n \\
&\leq (1-\alpha_n)||x_n - x^*|| + \alpha_n||y_n - y^*|| + M\gamma_n,
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\theta = [1 - 2\rho r + (\rho\mu)^2]^{1/2}$, 由条件 (c) 知 $0 < \rho < 2r/\mu^2$, 从而 $\theta < 1$. 类似可得

$$||y_n - y^*||$$

$$
\begin{aligned}
&= ||(1-\beta_n-\delta_n)(x_n-y^*)+\beta_n\{P_K[x_n-\eta T(x_n)]-P_K[x^*-\eta T(x^*)]\}+\delta_n(v_n-y^*)|| \\
&\leq (1-\beta_n)||x_n-x^*||+\beta_n||x_n-x^*-\eta[T(x_n)-T(x^*)]||+(1-\beta_n)||x^*-y^*||+M\delta_n \\
&\leq (1-\beta_n)||x_n-x^*||+\beta_n[1-2\eta r+(\eta\mu)^2]^{1/2}||x_n-x^*||+M[(1-\beta_n)+\delta_n] \\
&\leq (1-\beta_n)||x_n-x^*||+\beta_n\sigma||x_n-x^*||+M[(1-\beta_n)+\delta_n], \qquad (11)
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma=[1-2\eta r+(\eta\mu)^2]^{1/2}$, 由条件 (c) 知 $0<\eta<2r/\mu^2$, 从而 $\sigma<1$. 由 (10), (11) 式得

$$
\begin{aligned}
&||x_{n+1}-x^*|| \\
&\quad \leq (1-\alpha_n)||x_n-x^*||+\alpha_n[(1-\beta_n)+\beta_n\sigma]||x_n-x^*||+\alpha_n M[(1-\beta_n)+\delta_n]+M\gamma_n \\
&\quad \leq [1-(1-\sigma)\alpha_n\beta_n]||x_n-x^*||+M[(1-\beta_n)+\delta_n+\gamma_n].
\end{aligned}
$$

取 $a_n=||x_n-x^*||$, $t_n=(1-\sigma)\alpha_n\beta_n$, $b_n=M[(1-\beta_n)+\gamma_n+\delta_n]$, 则上式化为 $a_{n+1}\leq(1-t_n)a_n+b_n$. 由条件 (b) 知 $t_n\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n<\infty$. 根据引理 1.2 知 $\lim_{n\to\infty}||x_n-x^*||=0$, 即 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*, 再由 (11) 式得 $\{y_n\}$ 收敛于 y^*. 定理得证. □

注 1). 定理 3.1 中，若令 $\alpha_n=\frac{1}{n+1}$, $\beta_n=\frac{n^2+1}{n^2+2}$, 则有

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)(n^2+2)}=\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(1-\beta_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}<\infty, \quad \forall\, n\geq 0.
$$

2). 本文将文献 [5] 的结果推广到具误差的形式，且当 $\gamma_n=0,\delta_n=0$ 时，纠正了文献 [5] 中定理 3.1 的错误，在证明方法上也有较大的改进.

定理 3.2 设 H 是一实的 Hilbert 空间， K 是 H 的非空闭凸子集， $T:K\to H$ 是 r- 强单调且 μ-Lipschitz 连续映象，假设 $x^*,y^*\in K$ 是 SNVI (1),(2) 的解， $\{x_n\},\{y_n\}$ 是由算法 2.3 生成的序列，如果下列条件被满足：

(a) $0\leq\alpha_n+\gamma_n\leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty$;

(b) $0<\rho<2r/\mu^2$, $0<\eta<2r/\mu^2$.

则序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 分别收敛于 x^*,y^*.

证明 在定理 3.1 中取 $\beta_n=1,\delta_n=0$, 结论由定理 3.1 可得.

定理 3.3 设 H 是一实的 Hilbert 空间， K 是 H 的非空闭凸子集， $T:K\to H$ 是 r- 强单调且 μ-Lipschitz 连续映象，假设 $x^*\in K$ 是 NVI (5) 的解， $\{x_n\}$ 是由算法 2.2 生成的序列，如果下列条件被满足：

(a) $0\leq\alpha_n+\gamma_n\leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty$;

(b) $0<\rho<2r/\mu^2$.

则序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*.

证明 在定理 3.1 中取 $\eta=0,\delta_n=0$, 由定理 3.1 即得结论.

参考文献：

[1] DUNN J C. *Convexity, Monotonicity and gradient processes in Hilbert spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1976, **53**(1): 145–158.

[2] VERMA R U. *A class of quasivariational inequalities involving cocoercive mappings* [J]. Adv. Nonlinear Var. Inequal., 1999, **2**(2): 1–12.

[3] VERMA R U. *Generalized class of partially relaxed monotonicities and its connections* [J]. Adv. Nonlinear Var. Inequal., 2004, **7**(2): 155–164.
[4] VERMA R U. *Projection methods, algorithms, and a new system of nonlinear variational inequalities* [J]. Comput. Math. Appl., 2001, **41**(7-8): 1025–1031.
[5] VERMA R U. *General convergence analysis for two-step projection methods and applications to variational problems* [J]. Appl. Math. Lett., 2005, **18**(11): 1286–1292.
[6] HE Bing-sheng. *A new method for a class of linear variational inequalities* [J]. Math. Programming, Ser.A, 1994, **66**(2): 137–144.
[7] KINDERLEHRER D, STAMPACCHIA G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications* [M]. Academic Press, New York-London, 1980.
[8] LIU Li-shan. *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**(1): 114–125.
[9] ZEIDLER E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications (II/B)* [M]. Springer-Verlag, New York, 1990.

Approximating Solutions to System of Variational Inequalities by Two-Step Projection Method

ZHAO Liang-cai, WANG Xiong-rui, ZHANG Zheng-liang
(Department of Mathematics, Yibin University, Sichuan 644007, China)

Abstract: This paper deals with general convergence for two-step projection methods and the approximation solvability of system of nonlinear variational inequalities in Hilbert spaces by the iterative sequences with errors. The results presented extend and improve recent results of Verma etc.

Key words: system of nonlinear variational inequalities; two-step projection methods; r-strongly monotonic mapping; convergence analysis.