

文章编号: 1002-2082(2004)04-0004-05

反 WKB 方法的改进

张长命, 刘永智, 张晓霞, 甘小勇

(电子科技大学 光电信息学院, 四川 成都 610054)

摘要: 改进了用于确定渐变平面波导折射率分布的反 WKB 方法, 这种渐变折射率分布是从在 WKB 近似的条件下得到的本征方程用数值方法求得的。用改进的反 WKB 方法计算 3 种(指数、高斯和阶跃函数)折射率分布, 结果验证了该方法的有效性。先用最小二乘法拟合测量得到的有效折射率, 进而求出有效折射率函数, 再利用改进的算法分布计算出各自的折射率分布, 计算结果同精确值吻合得很好。计算出的波导表明折射率同精确值的绝对误差约为 0.1%。

关键词: WKB 方法; 有效折射率函数; 光波导

中图分类号: O435.1

文献标识码: A

The Improvement of Inverse Wentzel-Kramer-Brillouin (WKB) Method

ZHANG Chang-ming, LIU Yong-zhi, ZHANG Xiao-xia, GAN Xiao-yong

(School of Optic-Electronic Information, UESTC, Chengdu 610054, China)

Abstract: The improvement of inverse Wentzel-Kramer-Brillouin(WKB) method for refractive-index profile of a graded-index planar waveguide calculated numerically from the eigenvalue equation under the WKB approximation is extended. The practicality of this method is demonstrated by application to three types of refractive index distribution (exponential, Gaussian and step refractive index distribution). The refractive-index profiles calculated from the corresponding effective-index function, which can be found approximately by least-square fitting of a set of measured effective indexes, agree well with the exact profile. The absolute errors of the waveguide surface indexes calculated, with respect to the exact values, are about 0.1%.

Keywords: WKB method; effective-index function; optical waveguide

引言

确定波导的折射率分布对于分析波导的传输特性有着重要的意义。有效折射率法是确定光波折射率分布的重要方法^[1~2]。J. W. White 采用反 WKB 方法确定平面波导折射率^[3], 该方法的缺点是能够使用的数据受限于总的导模数。Chiang 认为有效折射率和模阶数(即有效折射率函数)确定了波导的折射率分布^[4]。该方法的思想是利用测量的有效折射率来构造有效折射率函数, 再用有效折射率函数计算出相应的折射率分布^[5~6]。J. W. White 和 Chiang 的方法均不需要预先假定波导的折射率分布模型^[3~6]。T. Shiozawa^[7]等人在预先假定波导折射率模型的情况下利用最小二乘法求

出波导折射率分布参数的最优值。

本文在 J. M. White 和 K. S. Chiang 等人工作的基础上对确定折射率分布的方法进行了改进。改进后的方法能够很好地根据有效折射率确定波导的折射率分布, 并且还能够处理阶跃分布的情况。

1 算法原理

考虑非对称渐变的折射率分布, 根据平面介质波导的 WKB 近似分析方法, 第 m 阶波导的本征值方程可以写为

$$k \int_0^{x_r(m)} [n^2(x) - N_m^2]^{1/2} dx = (m + 0.25)\pi + \Phi(N, n_r) \quad (1)$$

收稿日期: 2003-04-04

作者简介: 张长命(1972-), 男, 河南人, 电子科技大学博士研究生, 主要从事基础光学器件的研究。

$$n[x_t(m)] = N_m \quad (2)$$

式中, $n(x)$ 为波导折射率分布, 假定它是单调下降的, 且波导表面 $x=0$ 处的折射率 $n(0) = n_0$; N_m 是第 m 阶导模的有效折射率; $k = 2\pi/\lambda$ 是自由空间的波数, λ 是波长; x_t 是转折点, 在转折点处折射率等于有效折射率(见(2)式)。波导表面的相位变化由下式给出:

$$\Phi(N, n_c) = \tan^{-1} \left\{ \eta_c \left[\frac{N^2(m) - n_c^2}{n_0^2 - N^2(m)} \right]^{1/2} \right\} \quad (3)$$

式中, n_c 是波导覆盖层的折射率, 对空气覆盖层而言, $n_c = 1$; 对 TE 模而言, $\eta_c = 1$; 对 TM 模而言, $\eta_c = (n_0/n_c)^2$ 。

当波导所支持的模数比较少(比如单模)时, 可以引入有效模阶数^[6]:

$$\bar{m} = m - \frac{\Phi(N, n_a) - \Phi(N, n_c)}{\pi} \quad (4)$$

式中, n_a 是外部参考折射率, 通常取 $n_a = 1$ 。把 \bar{m} 代人(1)式, 则有

$$k \int_0^{x_t(\bar{m})} [n^2(x) - N^2(\bar{m})]^{1/2} dx = (\bar{m} + 0.25)\pi + \Phi(N, n_c) \quad (5)$$

在这里, 有效折射率函数 $N(\bar{m})$ 可以看作是 \bar{m} 的连续函数。由(4)式求出 \bar{m} , $N(\bar{m})$ 也随着外部折射率而变, 尤其在 $\bar{m} = m$ 处, $N(\bar{m})$ 就等于外部折射率 $n_c = 1$ 时的有效折射率。若要改变波导外部的折射率, 可以通过在棱镜与波导之间涂上一层薄折射率匹配液来实现^[6]。

1.1 构造有效折射率函数^[4]

分析本征值方程(5)可知, 折射率分布 $n(x)$ 与有效折射率函数 $N(\bar{m}_i)$ 之间存在一一对应的关系, 可以由棱镜耦合技术测得, 通过多项式拟合的方法得到有效折射率函数 $N(\bar{m}_i)$ (如图 1 所示), 再由本

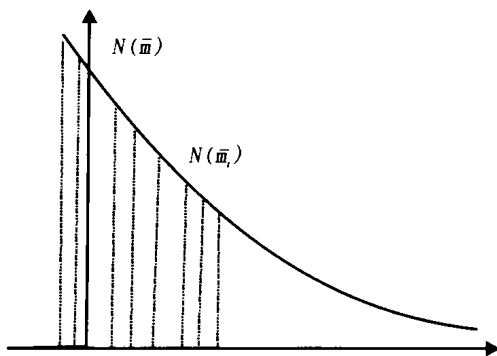


图 1 有效折射率函数

Fig. 1 Effective-index function

征值方程, 利用反 WKB 方法确定波导折射率分布。在拟合有效折射率函数时, 使(6)式最小并作为选择拟合多项式的阶数标准。

$$d(i) = \sum_{j=1}^i | \hat{N}(i) - N(i) |^2 \quad (6)$$

式中, $i = 1, 2, \dots$; $N(i)$ 是测量(或计算)的第 i 阶模有效折射率; $\hat{N}(i)$ 是相应的最佳拟合多项式的函数值。

另外, 在感兴趣的取样区间内, 拟合出的有效折射率函数 $N(\bar{m}_i)$ 应该是单调下降的。

1.2 确定折射率分布

确定了有效折射率函数 n_m (以下用 n_m 代替 N_m 表示有效折射率), 可以由(5)式通过反 WKB 方法确定折射率分布 $n(x)$ 。但是, 直接求解该积分是很困难的。考虑到 J. W. White 的工作, 在 K. S. Chiang 等人工作的基础上进行了算法改进。

对有效折射率函数 n_m 进行取样(不一定等间隔), 由样本 $n_0 > n_1 > n_2 \dots$ 计算出转折点 x_t , 就可以得到折射率分布。为了计算 x_t , 在每个小区间对折射率分布采用梯形近似^[3], 用有限项代替 WKB 积分。为此, 把(5)式改写成

$$\sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} [n(x) - n_j]^2 dx = (\bar{m} + 0.25)\pi + \Phi(N, n_c) \quad (7)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

且有

$$n(x) = n_j + \left(\frac{n_{j-1} - n_j}{x_j - x_{j-1}} \right) (x - x_{j-1}) \quad (8)$$

$(x_j - 1 \leq x \leq x_j)$

以及取

$$n(x) + n_c \approx (n_{j-1} + n_j) / 2 + n_c \quad (9)$$

令 $\alpha_i = (\bar{m}_i + 0.25)\pi + \Phi(N, n_c)$, 由(7)式得

$$x_i = x_{i-1} + \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n_{i-1} + 3n_i}{2} \right)^{-1/2} (n_{i-1} - n_i)^{-1/2} \right] \cdot \left\{ \alpha_i - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n_{j-1} + n_j}{2} + n_c \right)^{1/2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{n_{j-1} - n_j} \right) \cdot [(n_{j-1} - n_c)^{3/2} - (n_j - n_c)^{3/2}] \right\} \quad (10)$$

当 $i = 1$ 时, 可求得

$$x_1 = \frac{9}{16} \left(\frac{n_0 + 3n_1}{2} \right)^{-1/2} (n_0 - n_1)^{-1/2} \quad (11)$$

折射率分布曲线的二阶差分的平方和最小得到最光滑的曲线^[3], 这样可以确定波导表面的折射率 n_0 , 即

$$\sum_{j=0}^{i-2} \left[\frac{n_{j+2}-n_{j+1}}{x_{j+2}+x_{j+1}} - \frac{n_{j+1}-n_j}{x_{j+1}+x_j} \right]^2 \quad (12)$$

(11)式同参考文献[3]给出的递推公式在形式上是一样的,但思想方法却完全不同。(11)式中的折射率不是通过棱镜耦合技术测出的有效折射率,而是通过对有效折射率函数进行取样得到的。样本点的数目可以根据需要进行选取,所求得的折射率分布的平滑性取决于样本点的多少,而由文献[3]给出的递推公式求得折射率分布的平滑程度却受限于波导的导模数量。

2 数值模拟结果

为了评价该算法的精度,我们研究了指数分布、费米分布和阶跃分布的情况,把数值方法计算出的有效折射率当作测量得到的有效折射率。采用(6)式作为拟合有效折射率函数多项式阶数的标准,根据(10)和(11)式分别计算出相应的波导折射率分布。

2.1 指数分布

文献[3]、[7]和[8]已对指数折射率分布进行了讨论。参考文献[8]给出的指数分布为

$$n(x) = n_s + \Delta n \exp(-x/d) \quad (13)$$

选取如下参数: $n_s = 2.177$, $\Delta n = 0.0987$, $d = 2.23 \mu\text{m}$, 波长 $\lambda = 0.638 \mu\text{m}$ 和 $n_s = 2.177$, $\Delta n = 0.0425$, $d = 1.341 \mu\text{m}$, 波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。由文献[9]判断出两种参数的波导分别有8和4个导模。根据TE模的本征值方程,可以用数值方法计算出有效折射率,如表1所示。根据(6)式,选取拟合多项式的阶数 $M = 5$ 。(10)和(11)式的折射率分布计算结果如图1和图3所示。

表1 指数函数分布的有效折射率

Table 1 Effective index of exponential function distribution

Case 1	
$n_s = 1, n_s = 2.177, \Delta n = 0.0987, d = 2.23 \mu\text{m}, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}$	
模阶	有效折射率
0	2.243 171 1
1	2.221 826 4
2	2.207 578 7
3	2.197 317 9
4	2.189 814 9
5	2.184 406 9
6	2.180 678 3
7	2.178 343 1
8	2.177 191 6

Case 2		
$n_s = 2.177, \Delta n = 0.0425, d = 1.34 \mu\text{m}, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}$		
波导覆盖层折射率	模阶	有效折射率
1.0	0.0	2.195 518 8
1.5	-0.011 0	2.195 717 7
1.7	-0.020 1	2.195 886 0
2.0	-0.054 8	2.196 535 9
1.0	1.0	2.183 571 7
1.5	0.986 3	2.183 680 1
1.7	0.974 7	2.183 772 7
2.0	0.929 8	2.184 138 5
1.0	2.0	2.178 375 6
1.5	1.980 7	2.178 420 7
1.7	1.986 81	2.178 459 6
2.0	1.919 1	2.178 617 1

从图2和图3可以看出,计算出的折射率分布与实际折射率分布相吻合,计算出的波导表面折射率与波导表面的实际折射率的绝对误差分别为0.0088和0.0028。

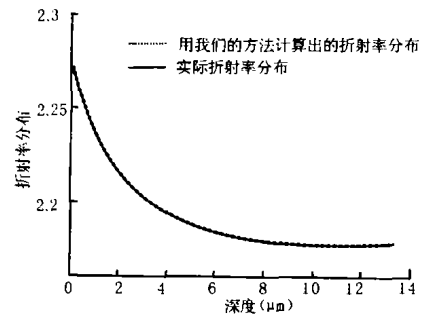


图2 指数分布波导计算的折射率分布 ($\Delta n = 0.0987, d = 2.23 \mu\text{m}$)

Fig. 2 Refractive index distribution computed with exponential distribution waveguide

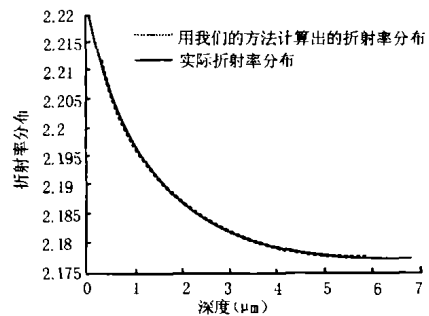


图3 阶跃分布波导计算的折射率分布 ($\Delta n = 0.0425, d = 1.34 \mu\text{m}$)

Fig. 3 Refractive index distribution computed with step distribution waveguide

2.2 费米函数分布

根据文献[10],折射率费米函数分布为

$$n(x) = n_s + \frac{n_0 - n_s}{1 - \exp(-d/a) + \exp[(x-d)/a]} \quad (14)$$

式中, n_s 为衬底折射率; d 为扩散深度; a 为形状因子。参考文献[8]选取如表2所示的参数。根据本征值方程(5)用数值方法计算出波导的有效折射率如表2所示。

表2 费米函数分布的有效折射率

Table 2 Effective index of Fermi function distribution

Case 1		
$n_s=1, n_1=2.177, \Delta n=0.0987, d=2.23 \mu\text{m}, \lambda=0.6328 \mu\text{m}$		
模阶		有效折射率
0		2.2415931
1		2.2329804
2		2.2238025
3		2.2144008
4		2.2051240
5		2.1963430
6		2.1884870
7		2.1820990
8		2.1779441
Case 2		
$n_s=2.177, \Delta n=0.0710, d=0.286 \mu\text{m}, \lambda=0.6328 \mu\text{m}$		
波导覆盖层折射率	模阶	有效折射率
1	0	2.2325253
1.5	-0.0082	2.2327316
1.7	-0.0148	2.2328991
2.0	-0.0382	2.2334839
1	1	2.2059532
1.5	0.9861	2.2063385
1.7	0.9747	2.2066560
2.0	0.9337	2.2077998
1	2	2.1821656
1.5	1.9822	2.1824844
1.7	1.9673	2.1827547
2.0	1.9125	2.1837919

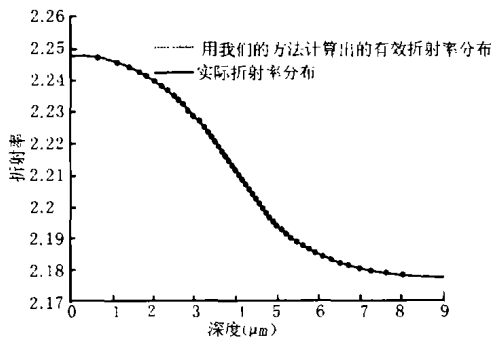


图4 费米函数分布($\Delta n=0.0987, d=2.23 \mu\text{m}$)

Fig. 4 The Fermi function profile

同样,从图4和图5可以看出,计算出的折射率分布与实际的折射率分布吻合得很好,计算出的波导表面折射率与波导表面的实际折射率的绝对误差分别为0.0004和0.0016。

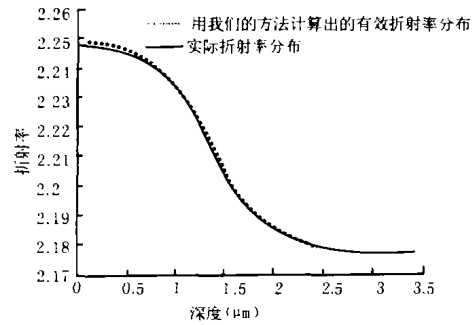


图5 费米函数分布波导计算的折射率分布 ($\Delta n=0.0710, d=2.23 \mu\text{m}$)

Fig. 5 Refractive index distribution computed with Fermi function profile waveguide

2.3 阶跃分布

单纯质子交换的LiNbO₃平面光波导的折射率分布一般为阶跃形^[11],其折射率分布模型为

$$n(x) = n_s + \Delta n \quad (15)$$

式中, n_s 为衬底折射率, Δn 为折射率变化量。对于阶跃形分布传输TM的情况,其本征值方程^[8]为

$$hd = (m+1)\pi + \tan^{-1} \left[\frac{h(r+p)}{h^2 - rp} \right] \quad (16)$$

其中

$$h = k \sqrt{n^2(x) - n_m^2}$$

$$r = k \sqrt{n_m^2 - n_s^2}$$

$$p = k \sqrt{n_m^2 - n_s^2}$$

式中, d 为波导深度。取以下参数: $n_s=2.202$; $\Delta n=0.125$; $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ 。质子交换深度分别为 $d=2.628 \mu\text{m}$ 和 $d=1.280 \mu\text{m}$,用数值方法分别计算出不同交换深度波导导模的有效折射率(如表3所示)。对于折射率阶跃分布的情况,我们仍可以构造有效折射率函数,利用式(10)和(11)式计算折射率分布。计算出的阶跃形分布的折射率分布如图6和图7所示。

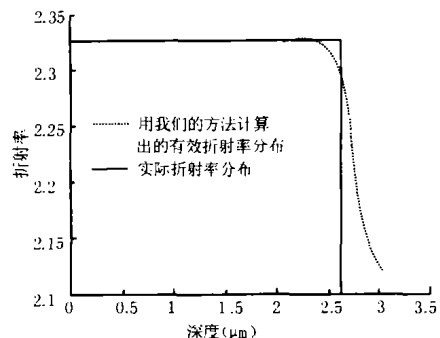


图6 阶跃分布波导计算的折射率分布 ($\Delta n=0.125, d=2.628 \mu\text{m}$)

Fig. 6 Refractive index distribution computed with the step distribution waveguide(Case 1)

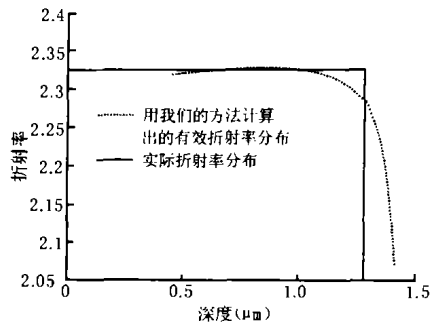


图7 阶跃分布波导计算的折射率分布
($\Delta n=0.125, d=1.28 \mu\text{m}$)

Fig. 7 Refractive index distribution computed with the step distribution waveguide(Case 2)

表3 阶跃函数分布的有效折射率

Table 3 Effective index of step function distribution

Case 1	
$n_c=2.202, \Delta n=0.125, d=2.628 \mu\text{m}, \lambda=0.6328 \mu\text{m}$	
模阶	有效折射率
0	2.324 274 8
1	2.316 092 9
2	2.302 438 8
3	2.283 303 2
4	2.258 732 2
5	2.229 031 3

Case 2	
$n_c=2.202, \Delta n=0.125, d=1.280 \mu\text{m}, \lambda=0.6328 \mu\text{m}$	
模阶	有效折射率
0	2.316 140 9
1	2.285 200 7
2	2.234 376 8

从图6和图7可以看出,计算出的折射率分布与实际的折射率分布吻合较好,在波导折射率边缘处误差较大。

3 结论

本文较为详细地讨论了如何根据有效折射率函数确定二维光波导折射率分布的方法。该方法不需要预先假定计算波导的折射率分布模型。通过棱镜耦合技术准确测量出波导的随外部折射率而变的有效折射率,再用多项式拟合方法求出有效折射率函数,就可以用本文的改进方法计算出光波导的折射率分布。数值计算结果表明,用该方法可以比较准确地计算出光波导的折射率分布。

参考文献:

[1] Ulrich, R Torge. Measurement of thin film parameters with a prism coupler[J]. Appl Opt,1973,12(12):2901-2908.

[2] G B Hocker, W K Burns. Modes in diffused optical waveguides of arbitrary index profile [J]. IEEE J Quantum Electron,1975,11(6):270-276.

[3] J M White, P F Heidrich. Optical waveguide refractive index profiles determined from measurement of mode indices: A simple analysis[J]. Appl Opt, 1976,15(1):151-155.

[4] K S Chiang. Construction of refractive-index profiles of planar dielectric waveguides from the distribution of effective indexes[J]. J Lightwave Technol,1985, 15(2):358-391.

[5] K S Chiang. Refractive-index profiling of graded-index planar waveguides from effective indexes measured for both mode types and at different wavelengths[J]. J Lightwave technol,1996,14(5): 827-832.

[6] K S Chiang. Refractive-index profiling of graded-index planar waveguides from effective indexes measured with different external refractive indexes [J]. J Lightwave Technol, 2000, 18(10): 1412-1417.

[7] T Shiozawa, H Miyamoto, H Ohta, M Yamaguchi, T Oki. Determination of two-dimensional optical waveguide index distribution function parameters from effective indexes [J]. J Lightwave Technol, 1990,8(4):497-505.

[8] P K Tien, S Riva-Sanseverino, R J Martin. Optical waveguide modes in single-crystalline LiNbO₃-LiTaO₃ solid-solution films [J]. Appl Phys Lett, 1974,24:503-506.

[9] D Marcuse. TE mode of graded-index slab waveguides[J]. IEEE J Quantum Electron,1973,9(10): 1000-1006.

[10] 高福斌,金峰,邢汝冰. LiNbO₃ 质子交换波导及其退火效应[J]. 光子学报,1995,24(4):336-339.

[11] 张德龙,丁桂兰,崔宇明,陈才和. 质子交换 LiNbO₃ 光波导[J]. 物理学进展,2001,21(3):45-65.