第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0854-05 **文献标识码**: A

紧型条件下 Sturm-Liouville 问题解的存在性

张玲忠 [1,2], 李永祥 [2]

(1. 甘肃农业大学理学院，甘肃 兰州 730070; 2. 西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070)
(E-mail: zhanglz1201@163.com)

摘 要: 通过对线性方程解算子谱半径的论证，对非紧性测度的精细计算，利用不动点定理，讨论了 Banach 空间 Sturm-Liouville 问题解的存在性与唯一性结果.

关键词: 边值问题；非紧性测度；凝聚映射的不动点定理；特征值.
MSC(2000): 34G10; 47H10
中图分类: O175.25; O177.91

1 引 言

设 E 为 Banach 空间，考虑非线性 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} Lu=f(t,u), \quad t\in I, \\ R_1(u):=\alpha_0u(0)-\beta_0u'(0)=\theta, \quad R_2(u):=\alpha_1u(1)+\beta_1u'(1)=\theta \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性.

其中 $Lu=-(p(t)u'(t))'+q(t)u(t)$, $I=[0,\ 1]$, $f\in C(I\times E,\ E)$, $q(t)$, $p(t)$, α_i, β_i $(i=0,1)$ 满足以下假设:

(P) $p\in C^1(I)$, $p(t)>0$, $\forall t\in I$; $q\in C(I)$, $q(t)\geq 0$, $\forall t\in I$; $\alpha_i\geq 0$, $\beta_i\geq 0$ $(i=0,1)$, 且满足 $(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_1+\beta_1)>0$; 当 $\alpha_0=\alpha_1=0$ 时， 设 $q\not\equiv 0$.

关于问题 (1) 作为无穷维常微分方程组两点边值问题的抽象模型, 当 $p(t)=1, q(t)=0, t\in I$ 的特殊情形，即方程

$$\begin{cases} -u''=f(t,\ u), \quad t\in I, \\ u(0)=u(1)=\theta \end{cases} \tag{2}$$

已被一些学者通过采用拓扑度及相关的不动点方法作过研究, 见文献 [1],[2],[3]. 在使用拓扑度或不动点方法的研究中，该问题通常化为等价的 Banach 空间中的积分方程

$$u(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s:=(Au)(t)$$

来处理，其中 $k(t,s)$ 为相应的 Green 函数. 与普通的常微分方程相比较，主要的困难是：在一般 Banach 空间中，上述积分方程相应的积分算子 A 不再具有紧性. 为对 A 应用凝聚映射的拓扑度理论及相关的不动点定理，通常需要给 f 附加一些用非紧性测度描述的“紧型条件”. 如，文献 [1][2][3] 要求：对任意 $R>0$, f 满足非紧性测度条件:

$$\alpha(f(t,D))\leq L\alpha(D), \forall t\in[0,1], D\subset\overline{B}(\theta,R), \tag{3}$$

收稿日期: 2005-04-18; **接受日期**: 2005-12-15
基金项目: 甘肃省自然科学基金 (ZS031-A25-003-Z).

其中 $L=L(R)\in(0,\frac{1}{2})$ 为常数. 在应用中，此条件是难以检验和使用的，即使对 f Lipschitz 连续的情形，由于要求系数 $L<\frac{1}{2}$, 也难以满足.

本文的目的是对抽象空间中一般的两点边值问题 (1), 在紧型条件下讨论其解的存在性. 我们通过对线性方程解算子谱半径的论证，对非紧性测度的精细计算，将非线性项 $f(t,u)$ 由文献 [2] 中的有界性推广为至多线性增长，并且将 (3) 式中的 L 放宽了许多. 即按本节的方法可将条件 (3) 式中的 L 放宽到 $0<L<4$. 在讨论解的唯一性时，将 L 放宽到 $0<L<\lambda_1$ (其中 λ_1 为问题 (1) 所对应的线性方程的第一特征值). 将此结果作到了最优.

2 主要结果

首先讨论方程 (1) 所对应的线性特征值问题

$$\begin{cases} Lh=\lambda h, \quad t\in I, \\ R_1(h)=R_2(h)=0. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $h\in C^2(I)$, 0 不是问题 (4) 的特征值，若条件 (P) 成立，则方程 (4) 的解等价于如下的积分方程

$$h(t)=\lambda\int_I k(t,\ s)h(s)\mathrm{d}s\equiv\lambda Th(t), \tag{5}$$

其中 $T:\ C(I)\to C(I)$ 全连续， $k(t,\ s)$ 的表示式如下

$$k(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{w}x(t)y(s), \quad 0\le t\le s\le 1, \\ \frac{1}{w}x(s)y(t), \quad 0\le s\le t\le 1. \end{cases} \tag{6}$$

定理 1 设 E 为 Banach 空间，若条件 (P) 成立， $f\in C(I\times E,\ E)$ 且满足下列条件

(P1) 存在常数 $c_0,\ c_1>0$ 使得

$$\|f(t,\ u)\|\le c_0+c_1\|u\|, \quad \forall\ t\in I,\ u\in E; \tag{7}$$

(P2) 存在常数 $L>0$, 对任何有界集 $D\subset E$, 有

$$\alpha(f(I,\ D))\le L\alpha(D);$$

(P3) $c_1<\lambda_1,\ L<\frac{1}{2M}$, 其中 λ_1 为 (5) 式所定义的算子 T 的第一特征值,

$$M=\max_{t\in I}\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s>0.$$

则边值问题 (1) 至少存在一个解.

证明 作积分算子 $A:\ C(I,\ E)\to C(I,\ E)$

$$(Au)(t)=\int_0^1 k(t,\ s)f(s,\ u(s))\mathrm{d}s, \tag{8}$$

则 $A:C(I,\ E)\to C(I,\ E)$ 连续，且方程 (1) 的解等价于 A 的不动点，为证算子 A 有不动点，只需验证同伦族方程

$$\begin{cases} Lu=\lambda f(t,\ u), \quad t\in I, \\ R_1(u)=R_2(u)=0 \end{cases} \tag{9}$$

的所有可能解 $u\in C(I,\ E)$ 有一个不依赖于 $\lambda\in(0,\ 1)$ 的先验界. 下分两步证明.

首先, 设 $B\subset C(I,\ E)$ 有界, 由条件 (P1) 知 $\{-(Au)''\mid u\in B\}$ 有界, 再结合边值条件知 $\{(Au)'\mid u\in B\}$ 有界, 从而知 $A(B)$ 等度连续, 故 $\alpha(A(B))=\max_{t\in I}\alpha(A(B)(t))$, 则有

$$\begin{aligned}(Au)(t)&=\int_0^1 k(t,\ s)f(s,\ u(s))\mathrm{d}s\in(\int_0^1 k(t,\ s)\mathrm{d}s)\overline{\mathrm{co}}\{f(s,\ u(s))\mid s\in I\}\\&\subset(\int_0^1 k(t,\ s)\mathrm{d}s)\overline{\mathrm{co}}(f(I\times B(I))),\end{aligned}$$

从而有

$$(A(B))(t)\subset(\int_0^1 k(t,\ s)\mathrm{d}s)\overline{\mathrm{co}}(f(I\times B(I))).$$

由非紧性测度的性质并结合条件 (P2), 有

$$\begin{aligned}\alpha(A(B)(t))&\le(\int_0^1 k(t,\ s)\mathrm{d}s)\alpha(f(I\times B(I)))\le L\alpha(B(I))\max_{0\le t\le 1}(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s)\\&=LM\alpha(B(I)).\end{aligned}$$

这样, 可得

$$\alpha(A(B)(t))\le LM\alpha(B(I))\le 2LM\alpha(B).$$

对上式两边取最大值, 可得 $\alpha(A(B))\le LM\alpha(B(I))\le 2LM\alpha(B)$, 由条件 (P3) 知 $0<2LM<1$, 从而 A 为凝聚映射.

其次, 设 $u\in C(I,\ E)$, 满足 $u(t)=\lambda Au(t)=\lambda\int_0^1 k(t,\ s)f(s,\ u(s))\mathrm{d}s,\ 0<\lambda<1$, 对此式两边取范数, 得

$$\|u(t)\|=\lambda\|\int_0^1 k(t,\ s)f(s,\ u(s))\mathrm{d}s\|.$$

令 $\psi(t)=\|u(t)\|$, 且由条件 (P1), 有

$$\psi(t)\le\int_0^1 k(t,\ s)(c_0+c_1\psi(s))\mathrm{d}s\le c_0\|T\|+c_1(T\psi)(t),$$

其中 T 是由 (5) 式所定义的算子, 于是有 $\psi\le c_0\|T\|+c_1T\psi$, 累次使用上述不等式, 得

$$\begin{aligned}\psi&\le c_0\|T\|+c_1T(c_0\parallel T\parallel+c_1T\psi)\\&\le c_0\|T\|+c_0c_1\|T\|^2+c_1^2T^2\psi\\&\le\cdots\le c_0\|T\|(1+c_1\|T\|+c_1^2\|T^2\|+\cdots+c_1^{n-1}\|T^{n-1}\|)+c_1^nT^n\psi\\&=c_0\|T\|\sum_{k=0}^{n-1}c_1^k\|T^k\|+c_1^nT^n\psi,\end{aligned}$$

即

$$\psi\le c_0\|T\|\sum_{k=0}^{n-1}c_1^k\|T^k\|+c_1^n\|T^n\|\,\|\psi\|,\tag{10}$$

又因条件 (P) 成立，则由文献 [4] 及 Krein-Rutman 定理知， $r(T)\neq 0$, 且存在正特征函数 $h(t)$ 与第一特征值 $\lambda_1=(r(T))^{-1}$, 使 $h(t)=\lambda_1 Th(t)$. 故由 Gelfand 定理，有

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\frac{1}{\lambda_1}. \tag{11}$$

取 $c_2=\frac{c_1+\lambda_1}{2}\in(c_1,\ \lambda_1)$, 有 $\frac{1}{c_2}>\frac{1}{\lambda_1}$.

由 (11) 式，存在 N_0, 当 $n\geq N_0$ 时， $\sqrt[n]{\|T^n\|}\leq\frac{1}{c_2}$, 即 $\|T^n\|\leq\frac{1}{c_2^n}$, 故有 $c_1^n\|T^n\|\leq(\frac{c_1}{c_2})^n$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{c_1}{c_2})^n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_1^n\|T^n\|$ 收敛. 令 $M_0=c_0\|T\|\sum_{n=0}^{\infty}c_1^n\|T^n\|$, 在 (10) 式中，令 $n\to\infty$ 得 $\psi(t)\leq M_0$, 即 $\|u(t)\|\leq M_0$ (不依赖于 λ), 这样 $\|u\|\leq M_0$, 结合以上两步证明，由凝聚映射的 Leray-Schauder 不动点定理知， A 有不动点. 即边值问题 (1) 至少存在一个解.

注 1 文献 [2] 要求非线性项 $f(t,\ u)$ 有界，这是一个很强的条件. 我们把 $f(t,\ u)$ 的条件限制推广为至多线性增长.

注 2 按本文的论证方法，可将 (3) 式中的 L 由 $0<L<\frac{1}{2}$ 改进为 $0<L<4$.

定理 2 设 E 为 Banach 空间， $f(t,\ u)\in C(I\times E,\ E)$, 若条件 (P) 成立，且 f 满足定理 1 中的条件 (P1) 及条件

($\mathrm{P2}'$) 存在常数 $L>0, \forall t\in I$ 及有界的 $D\subset E$, 有 $\alpha(f(t,\ D))\leq L\alpha(D)$;

($\mathrm{P3}'$) $0<c_1<\lambda_1$, $L<\frac{1}{4M}$ (其中 $M=\max_{t\in I}\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s$),

则边值问题 (1) 至少存在一个解.

证明 设 A 是定理 3.1 的证明中定义的算子，对有界的 $B\subset C(I,\ E)$, 存在可数子集 $B_1=\{u_n\}$, 使得 $\alpha(A(B))\leq 2\alpha(A(B_1))$, 而且有 $\alpha(A(B_1))=\max_{t\in I}\alpha(A(B_1)(t))$, 并结合条件 ($\mathrm{P2}'$), 有

$$\begin{aligned}\alpha(A(B_1)(t))&=\alpha(\{\int_0^1 k(t,\ s)f(s,\ u_n(s))\mathrm{d}s|n\in N\})\leq 2\int_0^1 k(t,\ s)\alpha(\{f(s,\ u_n(s))|n\in N\})\mathrm{d}s\\&\leq 2\int_0^1 k(t,\ s)L\alpha(B_1(s))\mathrm{d}s\leq 2L\int_0^1 k(t,\ s)\mathrm{d}s\,\alpha(B_1)\\&\leq 2LM\alpha(B_1)\end{aligned}$$

对上式两边取最大值得， $\alpha(A(B_1))\leq 2LM\alpha(B_1)$, 故有 $\alpha(A(B))\leq 2\alpha(A(B_1))\leq 4LM\alpha(B_1)$.

由条件 ($\mathrm{P3}'$) 知 A 是凝聚映射，以下证明与定理 1 的证明类似，故略去.

定理 3 设 E 是 Banach 空间， $f\in C(I\times E,E)$, 假设条件 (P) 成立，若存在 L, 且 $0<L<\lambda_1$, 使对 $\forall\ u_1,u_2\in E$, 有

$$\|f(t,u_2)-f(t,u_1)\|\leq L\|u_2-u_1\|, \tag{12}$$

则边值问题 (1) 存在唯一解.

证明 设积分算子 $A:C(I,E)\to C(I,E)$ 为 (8) 式定义的算子，即

$$(Au)(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

则边值问题 (1) 的解等价于算子 A 的不动点，因

$$\|(A^n u_2)(t)-(A^n u_1)(t)\|=\|\int_0^1 k(t,s)[f(s,(A^{n-1}u_2)(s))-f(s,(A^{n-1}u_1)(s))]\mathrm{d}s\|$$

$$\leq L\int_0^1 k(t,s)\|(A^{n-1}u_2)(s)-(A^{n-1}u_1)(s)\|\mathrm{d}s$$
$$= LT(\|(A^{n-1}u_2)(s)-(A^{n-1}u_1)(s)\|),$$

反复使用上述不等式，有

$$\|(A^n u_2)(t)-(A^n u_1)(t)\| \leq L^n T^n(\|u_2(s)-u_1(s)\|) \leq L^n\|T^n\|\|u_2-u_1\|_c.$$

对上式两边取最大值，得

$$\|A^n u_2 - A^n u_1\|_c \leq L^n\|T^n\|\|u_2-u_1\|_c. \tag{13}$$

又因为当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{\|T^n\|}\to r(T)=\frac{1}{\lambda_1}$, 取 $L_1\in(L,\lambda_1)$, $\exists N_0$, 当 $n\geq N_0$ 时, 有 $\|T^n\|\leq\frac{1}{L_1^n}$, 将此式代入 (13) 式，得

$$\|A^n u_2 - A^n u_1\|_c \leq L^n\|T^n\|\|u_2-u_1\|_c \leq (\frac{L}{L_1})^n\|u_2-u_1\|_c.$$

故当 $n\geq N_0$ 时， A^n 是幂压缩映射，从而由幂压缩映射不动点定理知，算子 A 存在唯一不动点，即边值问题 (1) 存在唯一解.

注 3 在定理 3 中，我们要求 $0<L<\lambda_1$, 这里 L 是最优的.

参考文献:

[1] 郭大钧，孙经先．抽象空间常微分方程 [M]. 济南：山东科学技术出版社， 1989.
GUO Da-jun, SUN Jing-xian. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Science Technology Press, 1989. (in Chinese)

[2] CHANDRA J, LAKSHMIKANTHAM V, MITCHELL A R. *Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second-order systems in a Banach space* [J]. Nonlinear Anal., 1978, **2**(2): 157–168.

[3] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. *Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1988, **129**(1): 211–222.

[4] 郭大钧，孙经先．非线性常微分方程泛函方法 [M]. 济南：山东科学技术出版社， 1995.
GUO Da-jun, SUN Jing-xian. *Functional Methods in Nonlinear Ordinary Differential Equations* [M]. Jinan: Shandong Science Technology Press, 1995. (in Chinese)

Existence of Solutions to Sturm-Liouville Problem under Copactness Condition

ZHANG Ling-zhong[1,2], *LI Yong-xiang*[2]

(1. College of Science, Gansu Agricultural University, Gansu 730070, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Gansu 730070, China)

Abstract: Based on the fixed-point theorem, the existence and uniqueness of the solutions to Banach space's Sturm-Liouville boundary value problem is proved precisely calculating the spectral radius of linear operation and the measure of noncompactness.

Key words: boundary value problem; measure of noncompactness; fixed point index of condensing mapping; eigenvalue.