第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

**文章编号**: 1000-341X(2006)03-0557-05 **文献标识码**: **A**

# 幂零群中非正规循环子群的共轭类数

钟祥贵[1], 李世荣[2]

(1. 广西师范大学数学与计算机科学学院, 广西 桂林 541004;
2. 广西大学数学与信息科学学院, 广西 南宁 530004)
(E-mail: xgzhong@mailbox.gxnu.edu.cn)

**摘 要**: 设 $G$ 是有限幂零群, $v^*(G)$ 是其非正规循环子群的共轭类数, 则下列结论之一成立: (1) $v^*(G) \geq c(G)-1$; (2) $G$ 是 Hamilton 群; (3) $G$ 中存在正规子群 $K$ 使 $K/Z(K)$ 有一个同态像与二面体群 $D(2^n), n \geq 3$ 或 $C_2 \times C_2$ 同构.

**关键词**: 幂零群; 非正规子群; 共轭类数.
**MSC(2000)**: 20D10
**中图分类**: O152.1

群 $G$ 的幂零类 $c=c(G)$ 及其非正规子群的共轭类数 $v(G)$ 或非正规循环子群的共轭类数 $v^*(G)$ 是一个有限幂零群的两个重要数字特征. 许多学者利用它们来描述有限群的结构, 得到一系列结果, 例如:

**定理 A** 设 $G$ 是有限幂零群, 那么下述命题两两等价:

(1) $v^*(G)=1$;

(2) $v(G)=1$;

(3) $G \cong M(p^n)=\langle a,b|a^{p^n}=b^p=1, b^{-1}ab=a^{1+p^{n-1}}\rangle$,

其中 $p$ 是素数且当 $p>2$ 时, $n \geq 2$, 当 $p=2$ 时, $n \geq 3$.

这由文献 [3] 定理 1 和文献 [1] 的主要定理立得. 文献 [2] 证明了:

**定理 B** 设 $G$ 是有限幂零群, 那么 $v(G) \geq c(G)-1$ 或 $G$ 为 Hamilton 群.

当 $G$ 是奇阶群的情形, 文献 [3] 给出其推广如下.

**定理 C** 设 $G$ 是奇阶幂零群, 那么 $v^*(G) \geq c(G)-1$; 当且仅当 $G$ 是 Abel 的或 $G \cong M(p^n), n \geq 3$ 时等号成立.

有例子表明定理 C 中关于 $G$ 为奇阶的条件是不能删去的. 比如设 $G \cong S(2^n)=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}\rangle$, 则 $v^*(G)=2$ 而 $c(G)=n-1$, 当 $n \geq 5$ 时, $v^*(G)<c(G)-1$.

一个自然的问题是: 在删去定理 C 中关于 "群 $G$ 为奇阶" 的假设条件后 $G$ 的结构如何? 本文研究了这个问题, 获得如下一般性的结果.

**定理 1** 设 $G$ 是有限幂零群, 那么下列结论之一成立:

(i) $v^*(G) \geq c(G)-1$;

(ii) $G$ 是 Hamilton 群;

(iii) $G$ 中存在正规子群 $K$ 使得 $K/Z(K)$ 有一个同态像同构于 $D(2^n), n \geq 3$ 或 $C_2 \times C_2$.

同时, 我们还对上述不等式等号成立的条件作了分析.

**收稿日期**: 2004-06-28; **接受日期**: 2005-05-11
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10161001), 广西科学基金 (桂科基 0575050)

本文考虑的群均为有限. $D(2^n)$ 是 $2^n$ 阶二面体群, $Q(2^n)$ 是 $2^n$ 阶广义四元数群, $S(2^n)=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}\rangle$ 是 $2^n$ 阶拟二面体群, 而 $K_i(G)$ 表示 $G$ 的下中心群列的第 $i$ 项.

## 1. 几个引理

为了使定理的证明叙述简洁, 先给出几个引理.

**引理 1** 设 $G$ 是非交换 $p$- 群, $G$ 有一个指数为 $p$ 的循环子群, 且 $v^*(G)=2$, 那么下列结论之一成立:

(1) $G\cong D(2^n)=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle,n\geq 3$;

(2) $G\cong S(2^n)=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}\rangle,n\geq 4$;

(3) $G\cong Q(2^n)=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=1,b^2=a^{2^{n-2}},b^{-1}ab=a^{-1}\rangle,n\geq 3$.

**证明** 由于 $G$ 是非 Abel $p$- 群, $G$ 有一个指数为 $p$ 的循环子群, 根据 [4, 定理 5.14], $G$ 同构于 $D(2^n),n\geq 3$; 或 $S(2^n),n\geq 4$; 或 $Q(2^n),n\geq 3$; 或 $M(p^n),n\geq 3(p>2)$ 或 $n\geq 4(p=2)$. 而由定理 A 可知 $v^*(M(p^n))=1$. 下面证明 $G\cong D(2^n)$ 或 $S(2^n)$ 或 $Q(2^n)$ 时均有 $v^*(G)=2$. 若 $G\cong D(2^n),n\geq 3$. 这时 $\langle a\rangle$ 外有 $2^{n-1}$ 个 2 阶元素. 这些元素可分为两个共轭类: $\{\langle b\rangle,\langle ba^2\rangle,\langle ba^4\rangle,\ldots\}$ 共 $2^{n-1}/2=2^{n-2}$ 个共轭的非正规循环子群, 而且由于 $C_G(b)=\langle b,a^q\rangle$, 从而 $|G:C_G(b)|=2^{n-2}$, 故它们构成 $\langle b\rangle$ 的全部共轭. 类似地, 可得 $G$ 的另一个非正规循环子群共轭类 $\{\langle ba\rangle,\langle ba^3\rangle,\langle ba^5\rangle,\ldots\}$. 容易看到, $G$ 已没有其它非正规循环子群共轭类, 故 $v^*(G)=2$. 若 $G\cong S(2^n)$ 或 $Q(2^n)$ 时可类似推出 $v^*(G)=2$.

**引理 2**[2] 如果 $N\trianglelefteq G$, 且 $N\leq H\leq G$, 那么 $\{H_1,H_2,\ldots,H_r\}$ 是 $H$ 在 $G$ 中的一个共轭类当且仅当 $\{H_1/N,H_2/N,\ldots,H_r/N\}$ 是 $H/N$ 在 $G/N$ 中的一个共轭类.

特别, $v^*(G/N)\leq v^*(G)$.

由引理 1, 如果 $v(G/N)=v(G)\neq 0$ 对 $G$ 的某正规子群 $N$ 成立, 那么 $N$ 包含于 $G$ 的所有非正规子群中, 但 $v^*(G/N)=v^*(G)\neq 0$ 时, 这个结论不再成立. 比如: $v^*(S(2^n)/\langle a^{2^{n-1}}\rangle)=v^*(D(2^{n-1}))=2,\langle b\rangle$ 是 $S(2^n)$ 的一个非正规循环子群, 但 $\langle a^{2^{n-1}}\rangle\not\leq\langle b\rangle$. 然而, 对 $G$ 为 $p$- 群的情形, 我们能证明

**引理 3** 设 $G$ 是一个 $p$- 群. $v^*(G/K_c(G))=v^*(G)\neq 0$, 其中 $K_c(G)$ 是 $Z(G)$ 的唯一一个 $p$ 阶子群, 那么 $p=2$ 且

(1) $G$ 有一个正规子群 $K\cong Q(2^n),n\geq 3$; 或者

(2) $\langle x\rangle^G\cong D(2^n),n\geq 3$, 其中 $\langle x\rangle$ 是 $G$ 的某个 2 阶子群.

**证明** 设 $x$ 是 $G$ 的一个 $p$ 阶元. 如果对所有 $x$ 均有 $\langle x\rangle$ 在 $G$ 中正规, 那么由于 $G$ 是一个 $p$- 群, $\langle x\rangle\leq Z(G)$. 由假设, $\langle x\rangle=K_c(G)$. 从而 $G$ 只有唯一的一个 $p$ 阶子群, $G$ 循环或为广义四元数群. 而当 $G$ 循环时, $v^*(G)=0$. 故 $G$ 为广义四元数群, $G\cong Q(2^n),n\geq 3$.

现设 $G$ 中含有非正规的 $p$ 阶子群 $\langle x\rangle$, 则 $x\notin K_c(G)$. 在所有这样的 $p$ 阶元 $x$ 中选择使 $\langle x\rangle^G$ 具有最小可能阶的 $x$, 并记 $H=\langle x\rangle^G$. 设 $H/K$ 是 $G$ 的一个主因子, 那么 $|H/K|=p$. 显见 $K\neq 1$, 又设 $N$ 是 $G$ 的包含于 $K$ 的极小正规子群, 则由 $p$ 群性质知 $N\leq Z(G)$ 且 $|N|=p$. 但假设 $K_c(G)$ 是 $Z(G)$ 的唯一素数阶子群, 故 $N=K_c(G),K_c(G)\leq K\langle H$. 现任取 $K$ 的一个 $p$ 阶元 $y$, 则 $\langle y\rangle^G\leq K$. 由于 $1\neq\langle y\rangle^G$ 且 $N$ 是 $G$ 的极小正规子群, 故 $K_c(G)\leq\langle y\rangle^G\leq K<H$. 由 $x$ 的选择知 $\langle y\rangle\trianglelefteq G$, 从而 $K_c(G)=\langle y\rangle$. 这表明 $K_c(G)$ 是 $K$ 的唯一一个 $p$ 阶子群. 因

此， $K$ 为循环群或广义四元数群．若 $K$ 为广义四元数群，则引理结论 (1) 成立．以下设 $K$ 为循环群，这时 $H$ 有一个指数为 $p$ 的循环子群 $K$. 如果 $H$ 是 Abel 的，则由于 $H$ 的每个生成元均为 $p$ 阶， $H$ 为初等 Abel 的．从而 $K = K_c(G)$ 且 $H = \langle x\rangle K_c(G) = \langle x\rangle \times K_c(G)$. 这表明 $\langle xK_c(G)\rangle/K_c(G) = H/K_c(G) \trianglelefteq G/K_c(G)$; 与 $v^*(G/K_c(G)) = v^*(G)$ 矛盾．如果 $H$ 是非 Abel 的，按 [4, p151 定理 5.14] $H$ 同构于 $D(2^n), n \geq 3; S(2^n), n \geq 4; Q(2^n), n \geq 3$ 或 $M(p^n), n \geq 3$ (当 $p > 2$ 时) 或 $n \geq 4$(当 $p = 2$ 时) 之一．若 $H \cong M(p^n)$, 则由定理 $A$ 可得 $v^*(G) = 1, H$ 的非正规循环子群均在 $H$ 中共轭．此时由于 $H \trianglelefteq G$, 从而 $\langle x\rangle$ 在 $H$ 中非正规 (否则 $\langle x\rangle^g \trianglelefteq H, \forall g \in G. H = \langle\langle x\rangle^g | g \in G\rangle$ 为初等 Abel, 矛盾). $\langle x\rangle^g = \langle x\rangle^{h_g}, h_g$ 是 $H$ 的某个元素．因此， $H = \langle x\rangle^H$. 现在因为 $H$ 为 $p$- 群，故 $H/\Phi(H)$ 是初等 Abel 的， $\Phi(H)\langle x\rangle \trianglelefteq H$, 考虑 $\Phi(H)\langle x\rangle$ 在 $H$ 中的正规闭包， $H = \langle x\rangle$. 矛盾．因此， $H = \langle\langle x\rangle^{g_1}, \langle x\rangle^{g_2}, \ldots, \langle x\rangle^{g_{|G|}}\rangle$ 中的 $\langle x\rangle^{g_i}, i = 1, 2, \ldots, |G|$ 分裂为 $H$ 的两个 $p = 2$ 阶循环子群共轭类．但由引理 1 知 $v^*(D(2^n))$ 或 $v^*(S(2^n))$ 或 $v^*(Q(2^n))$ 均为 2. 所以，它们是 $H$ 的全部非正规循环子群的共轭类．然而 $Q(2^n)$ 只有唯一的一个 $p = 2$ 阶元， $S(2^n)$ 的两个非正规循环子群的共轭类其代表元的阶不同，从而 $H \cong D(2^n), n \geq 3$. 这是引理的结论 (2).

**引理 4** 设 $G$ 是有限群，则 $v^*(G) = 0$ 当且仅当 $v(G) = 0$.

**证明** 如果 $v^*(G) = 0$, 则当 $G$ 非交换时，我们断言 $G$ 是 Hamilton 群．事实上，若存在 $G$ 的非正规子群 $H$, 我们取 $G$ 的所有非正规子群中阶为最小的一个，记为 $K$. 则 $K$ 的所有真子群均正规于 $G$, 而 $K$ 在 $G$ 中非正规．从而 $K$ 只有唯一的一个极大子群．这导致 $K$ 为循环，即 $v^*(G) \neq 0$. 矛盾．故 $G$ 是 Hamilton 群， $v(G) = 0$.

## 2. 主要定理的证明

**定理 1 的证明** 如果 $v^*(G) = 0$, 则由引理 4 知 $G$ 的所有子群均为 $G$ 的正规子群，从而 $G$ 或者是 Abel 的，这时 $c(G) = 1, v^*(G) = 0$, 定理中结论 (i) 成立；或者 $G$ 是 Hamilton 群，定理中的结论 (ii) 成立.

如果 $v^*(G) = 1$, 由定理 $A$ 知 $G \cong M(p^n) : p$ 为素数且 $p \geq 3$ 时 $n \geq 2$, 而当 $p = 2$ 时 $n \geq 3$. 此时 $c(G) = c(M(p^n)) = 2$, 定理中结论 (i) 成立.

如果 $v^*(G) \geq 2$. 我们断言定理中 (i), (ii), (iii) 必有一个成立．否则，设 $G$ 是极小阶反例．易知 $c(G) \geq 4$. 下面分两种情形讨论.

情形 1. $G$ 的中心 $Z(G)$ 包含一个素数阶真子群 $N \neq K_c(G)$. 显然， $N$ 是 $G$ 的真正规子群，由引理 2， $v^*(G/N) \leq v^*(G)$. 又 $N \neq K_c(G)$, 故 $c(G/N) = c(G)$. 现在因为 $G$ 是极小阶反例， $G$ 幂零，从而 $G/N$ 幂零并且对 $G/N$ 而言定理中 (i), (ii), (iii) 必有一个成立.

如果 $v^*(G/N) \geq c(G/N) - 1$. 则 $c(G) - 1 = c(G/N) - 1 \leq v^*(G/N) \leq v^*(G)$. 这与 $G$ 是极小阶反例矛盾.

如果 $G/N$ 是 Hamilton 群，则 $c(G) = c(G/N) = 2$, 与 $c(G) \geq 4$ 矛盾.

如果 $(K/N)/(Z(K/N))$ 有一个同态像与 $D(2^n)$ 或 $C_2 \times C_2$ 同构，则因

$$((K/N)/(Z(K)/N))/((Z(K/N))/(Z(K)/N)) \cong (K/N)/(Z(K/N))$$

及 $(K/N)/(Z(K/N)) \cong K/Z(K)$, 可以看到， $K/Z(K)$ 有一个同态像与 $(K/N)/(Z(K/N))$ 同构，从而 $K/Z(K)$ 有一个同态像与 $D(2^n)$ 或 $C_2 \times C_2$ 同构，这矛盾于 $G$ 是极小阶反例.

情形 2. 现在可设 $G$ 的中心 $Z(G)$ 没有异于 $K_c(G)$ 的素数阶真子群 $N$, 从而或者 $Z(G)$ 本身是素数阶的，或者 $G$ 的中心 $Z(G)$ 的每个素数阶真子群都等于 $K_c(G)$. 考虑到 $G$ 幂零，如果 $G$ 不是 $p$- 群，可设 $G=P_1\times P_2\times\ldots\times P_r, r>1$, $P_i$ 是 $G$ 的 Sylow $p_i$- 子群， $i=1,2,\ldots,r$. 则 $Z(G)=Z(P_1)\times Z(P_2)\times\ldots\times Z(P_r), r>1$. 其中每个 $Z(P_i)>1$. 这与 $Z(G)$ 是素数阶的，或者 $Z(G)$ 的每个素数阶真子群都等于 $K_c(G)$ 矛盾. 故 $G$ 是一个 $p$- 群.

考虑 $G/K_c(G)$, 易知 $c(G/K_c(G))=c(G)-1$, 而对 $G/K_c(G)$ 而言定理中的结论 (i), (ii), (iii) 之一必成立. 如果 $G/K_c(G)$ 是 Hamilton 群或 $G/K_c(G)$ 的中心商有一个同态像与 $D(2^n)$ 或 $C_2\times C_2$ 同构. 类似于情形 1 可导出矛盾. 从而必有 $c(G)-2=c(G/K_c(G))-1\leq v^*(G/K_c(G))$. 同时， $v^*(G/K_c(G))\leq v^*(G)$. 因此， $v^*(G)\geq c(G)-2$. 另一方面， $G$ 是一个极小阶反例. 从而 $v^*(G)\leq c(G)-1$. 故 $v^*(G)=c-2=v^*(G/K_c(G))$. 利用引理 3， $G$ 有正规子群 $H$ 同构于 $D(2^n)$ 或 $Q(2^n)$. 若 $H\cong D(2^n)$, 则 $H/Z(H)\cong D(2^{n-1})$ 当 $n\geq 4$ 或 $C_2\times C_2$ 当 $n=3$. 矛盾. 若 $H\cong Q(2^n)$, 则当 $n\geq 4$ 时， $H/Z(H)\cong D(2^n)$ 而当 $n=3$ 时， $v^*(G)=0$. 亦矛盾.

**定理 2**　设有限幂零群 $G$ 的任何正规子群 $K$ 的中心商 $K/Z(K)$ 无同态像与 $D(2^n), n\geq 3$ 或 $C_2\times C_2$ 同构. 那么 $c(G)=1+v^*(G)$ 当且仅当 $G$ 是 Abel 的或者 $G\cong M(p^n)$, 并且当 $p>2$ 时 $n\geq 2$, 当 $p=2$ 时 $n\geq 3$.

**证明**　当 $c(G)=1$ 时，等号成立当且仅当 $G$ 是 Abel 的. 当 $c(G)=2$ 时， $v^*(G)=1$, 由定理 A 可知，等号成立当且仅当 $G\cong M(p^n)$. 且 $n\geq 2(p>2$ 时$)$ 或 $n\geq 3(p=2$ 时$)$.

当 $c(G)\geq 3$ 时，我们断言等号不成立，从而完成定理 2 的证明. 假设存在 $G$ 能使 $v^*(G)=c(G)-1$.

设 $G$ 是它们中阶最小的一个，如果存在 $Z(G)$ 的某个素数阶子群 $N\neq K_c(G)$, 那么

$$c(G)-1=v^*(G)\geq v^*(G/N)\geq c(G/N)-1=c(G)-1$$

导致 $v^*(G/N)=c(G/N)-1$, 并且 $c(G/N)=c(G)\geq 3$. 与定理 1 证明中情形 1 类似的推理可知 $G/N$ 的任意一个正规子群 $K/N$ 既不同构于 Hamilton 群，其中心商也没有同态像与 $D(2^n)$ 或 $C_2\times C_2$ 同构. 这与 $G$ 是极小阶反例矛盾.

因此， $K_c(G)$ 是 $Z(G)$ 的唯一素数阶子群. 故仿定理 1, 情形 2 证明的第一段可知 $G$ 是一个 $p$- 群. $K_c(G)$ 是 $p$ 阶循环群，而 $G/N$ 的幂零类是 $c(G)-1$. 由于 $G/N$ 不是 Hamilton 群，其正规子群 $K/N$ 的中心商无同态像与 $D(2^n)$ 或 $C_2\times C_2$ 同构，并且

$$v^*(G)=C(G)-1=C(G/N)\leq v^*(G/N)+1\leq v^*(G)+1,$$

$G$ 为极小阶反例. 故当 $c(G)\geq 4$ 时， $c(G/N)<1+v^*(G/N)$. 上式迫使 $v^*(G/N)=v^*(G)=c-1\geq 3$. 根据引理 3, $G$ 有正规子群 $K$ 同构于 $D(2^n)$ 或 $Q(2^n), n\geq 3$. 当 $n\geq 4$ 时，无论何种情形，均有 $K/Z(K)\cong D(2^{n-1})$. 而 $C(Q(8))=2, D(8)/Z(D(8))\cong C_2\times C_2$, 均矛盾. 因此，$c(G)\leq 3$. 进一步，$c(G)=3, v^*(G/N)\neq v^*(G)=2$. 从而 $v^*(G/N)=c(G/N)-1=c(G)-2=1$. 利用定理 A, $G/K_c(G)\cong M(p^n)=\langle\bar{a},\bar{b}|\bar{a}^{p^{n-1}}=\bar{b}^p=1,\bar{a}^{\bar{b}}=\bar{a}^{1+p^{n-2}}\rangle$, 并且 $v^*(G)=2$.

如果 $K_c(G)\cap\langle a\rangle=1$, 那么 $K_c(G)$ 是 $Z(G)$ 的唯一 $p$ 阶子群，不可能成立 $\langle a\rangle\trianglelefteq G$. 若 $a^p\neq 1$, 则 $\langle a^p\rangle\trianglelefteq G$ 不能成立. 那么 $G$ 至少有三个非正规循环子群共轭类： $\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle a^p\rangle$. 矛盾于 $v^*(G)=2$. 从而 $a^p=1, n=2$. 矛盾.

如果 $K_c(G)\leq\langle a\rangle$, 此时 $\langle a\rangle$ 是 $G$ 的指数为 $p$ 的极大子群，且 $v^*(G)=2$. 利用引理 1, $G\cong D(2^n), n\geq 3$; 或 $S(2^n), n\geq 4$; 或 $Q(2^n), n\geq 3$. 当 $n\geq 4$ 时，无论何种情形，均有

$G/Z(G) \cong D(2^{n-1})$. 矛盾. 而 $n = 3$ 时, $c(D(8)) = c(Q_8) = 2$. 矛盾于 $c(G) = 3$. 定理证毕.

## 参考文献：

[1] BRANDL R. *Finite groups with few non-normal subgroups* [J]. Comm. Algebra, 1995, **23**: 2091–2098.
[2] POLAND J, RHEMTULLA A. *The number of conjugacy classes of non-normal subgroups in nilpotent groups* [J]. Comm. Algebra, 1996, **24**: 3237–3245.
[3] LI Shi-rong. *The number of conjugacy classes of non-normal cyclic subgroups in nilpotent groups of odd order* [J]. J. Group Theory, 1998, **1**: 165–171.
[4] 徐明曜. 有限群导引 (上册) [M]. 北京：科学出版社， 1999.
XU Ming-yao. *Introduction to Finite Group Theory (Vol.1)* [M]. Publishing House of Science, Beijing, 1999. (in Chinese)

# The Number of Conjugacy Classes of Nonnormal Cyclic Subgroups in Nilpotent Groups

*ZHONG Xiang-gui*[1], *LI Shi-rong*[2]
(1. School of Math. & Comput. Sci., Guangxi Normal University, Guilin 541004, China;
2. School of Math. & Info. Sci., Guangxi University, Nanning 530004, China )

**Abstract**: This paper proves that for a nilpotent group $G$ of nilpotency class $c = c(G)$, the number $v^*(G)$ of conjugacy classes of nonnormal cyclic subgroups satisfies the inequality $v^*(G) \geq c(G) - 1$, or $G$ is a Hamiltonian group, or there is a normal subgroup $K$ of $G$ such that $K/Z(K)$ has a homomorphic image isomorphic to the dihedral group $D(2^n)$ with $n \geq 3$ or $C_2 \times C_2$.

**Key words**: nilpotent group; nonnormal subgroup; number of conjugacy classes