单点水平重置期权的定价

张寄洲，李松芹
(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：通过鞅定价方法并借助于极值的概率分布研究了单点水平重置期权的定价问题，并且得到了单点水平重置看涨期权与看跌期权的定价公式.

关键词：重置期权；鞅定价；单点水平
中图分类号：F830.9　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-5137(2006)03-0001-05

0 引　言

期权是风险管理的核心工具，早在1973年，Black－Scholes 就已经建立了著名的B－S定价模型. 近年来，国际金融市场飞速发展，涌现出大量的新型期权，重置期权就是其中的一种. 由于重置期权相对于其他期权来说具有更多的权利而没有义务执行期权，因此重置期权受到了投资人的青睐，重置期权的公平定价也受到了市场从业者相当的重视.

本文研究的就是一种单点水平的重置期权，就是事先设置好一个重置水平，如果原生资产价格的最值在期权的有效期内达到此价格水平，就会对事先设置的敲定价格进行重置，此处对于看涨期权是原生资产价格的最小值，而看涨期权是原生资产价格的最大值. 文献[1]推导了单点时间重置看跌期权的定价公式. 文献[2～4]都是在确定重置时间情形下研究的重置期权定价问题. 因此本文作者给出的给定水平的重置期权的定价公式具有一定的价值.

1 市场模型与鞅测度

假定原生资产的价格遵循几何 Brownian 运动

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = (r - q)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t^Q. \tag{1.1}$$

式中常数 r, q 和 σ 分别为 S_t 的无风险利率、红利率和波动率；$(W_t^Q)_{t\geqslant 0}$ 为标准的 Brownian 运动，由 Doléase-Dade 指数公式，(1.1)的解为

$$S_t = Se^{(\mu t+\sigma W_t^Q)}.$$

这里，S 为期初的原生资产的价格，$\mu = r - q - \dfrac{\sigma^2}{2}$.

记：

$$\min_{(0\leqslant t<T)} S_t = S_m；\ \max_{(0\leqslant t<T)} S_t = S_M；$$

收稿日期：2006-02-11
基金项目：上海市科技发展基金资助项目(05D210)；上海市重点学科建设项目资助(T0401).
作者简介：张寄洲(1958－)，男，上海师范大学数理信息学院教授；李松芹(1977－)，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生.

$$X_t = \ln\frac{S_t}{S};\ X_m = \ln\frac{S_m}{S};\ X_M = \ln\frac{S_M}{S}.$$

引理 1(Girsanov 定理) 设 $W = (W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 为 Brownian 运动, $H \in \wedge^2_\omega(S,B)$, 令

$$Z_t(H) \triangleq \exp[\int_0^t H_S d\, W_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_S^2 d\, S].$$

假定 $EZ_T(H) = 1$,对任意的 $A \in \mathscr{F}_\tau$,令 $Q(A) \triangleq \int_A Z_T(H)dP$ 及 $W_t^* \triangleq W_t - \int_0^t H_S d\, S$, $0 \leqslant t \leqslant T$,则 Q 为与 P 等价的概率测度, W^* 为关于测度 Q 的 Brownian 运动.

其中, $\wedge^2_\omega(S,B) = \{H \in S$: 任意的 $t \in R_+, \int_{I[0,T]} Hd\mu_B^2 < \infty\}$. B 表示某过程, $\mathscr{F}_\tau$: τ 前事件的 σ-代数[5].

引理 2 原生资产价格的最高值 X_M 最低值 X_m 与 X_t 的概率分布为[1]

(1) X_M 与 X_t 的共同概率分布为

$$P_r(X_t \leqslant x, X_M \leqslant y) = N(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{2\mu y/\sigma^2}N(\frac{x - 2y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

此处: $x \geqslant 0$, $y \geqslant x$, $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{\frac{-\omega^2}{2}}d\omega$ 为标准正态分布的累计概率分布函数.

(2) X_m 与 X_t 的共同概率分布为

$$P_r(X_t \geqslant x, X_m \geqslant y) = N(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{2\mu y/\sigma^2}N(\frac{-x + 2y + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) \quad (y \leqslant 0,\ y \leqslant x).$$

(3) X_M 的概率分布为

$$P_r(X_M \leqslant y) = N(\frac{y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{2\mu y/\sigma^2}N(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) \quad (y \geqslant 0).$$

(4) X_m 的概率分布为

$$P_r(X_m \geqslant y) = N(\frac{-y + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{2\mu y/\sigma^2}N(\frac{y + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}) \quad (y \leqslant 0).$$

2 单点水平重置期权的定价

定义 1 单点水平欧式重置看涨期权是指事先约定的敲定价格为 K ,事先约定的价格水平为 K_1 , $K > K_1$,一旦在期权的有效期内原生资产价格的最小值下降到事先约定的价格水平,就对敲定价格重置. 到期的收益为 $R_{C_T} = \max(S_T - \hat{K}, 0)$, $\hat{K}$ 为最终的敲定价格.

考虑下列两种情形:

(I):若原生资产价格的最小值在到期日 ($t = T$) 达到.

(II):若原生资产价格的最小值在 $[0,T)$ 时段内达到.

设

$$R_{C_T} = \begin{cases} R_{C_{T_I}} \\ R_{C_{T_{II}}} \end{cases}.$$

这里

$$R_{C_{T_I}} = \begin{cases} S_T - K & S_T > K_1 \text{ 且 } S_T > K \\ 0 & S_T \leqslant K_1 \text{ 且 } S_T > K_1. \\ 0 & K_1 < S_T \leqslant K \end{cases}$$

$$R_{C_{T_{II}}}=\begin{cases}S_T-K & S_m>K_1\text{且}\ S_T>K\\ S_T-K_1 & S_m\leqslant K_1\text{且}\ S_T>K_1\\ 0 & S_m>K_1\text{且}\ S_T\leqslant K\ \text{或}\ S_m\leqslant K_1\text{且}\ S_T\leqslant K_1\end{cases}$$

对第一种情形(I)，分别考虑以下 3 种情况：

情况(1)：若在到期日 ($t=T$)，原生资产的价格 S_T 高于事先约定的价格水平 K_1，则无需重置原敲定价格 K．且在到期时原生资产的价格 S_T 刚好高于原敲定价格 K，则此时看涨期权的到期收益为 S_T-K．

情况(2)：若在到期日 ($t=T$)，原生资产的价格 S_T 低于或等于事先约定的价格水平 K_1，则重新设置敲定价格为 K_1，则此时看涨期权的到期收益为零．

情况(3)：若在到期日 ($t=T$)，原生资产的价格 S_T 刚好高于事先约定的价格水平 K_1，则无需重置原敲定价格 K，但 S_T 又低于或等于 K，则此时看涨期权的到期收益为零．

对第 2 种情形(II)，我们也分别考虑以下 3 种情况：

情况(1)：若在$[0,T)$内，原生资产的价格的最小值 S_m 高于事先约定的价格水平 K_1，则无需重置原敲定价格 K．但在到期时原生资产的价格 S_T 高于原敲定价格 K，则此时看涨期权的到期收益为 S_T-K．

情况(2)：若在$[0,T)$内，原生资产价格的最小值 S_m 低于或等于事先约定的价格水平 K_1，则重新设置敲定价格为 K_1，在到期时原生资产的价格 S_T 高于重新设置的敲定价格 K_1，则此时买权的到期收益为 S_T-K_1．

情况(3)：若在$[0,T)$内，原生资产的价格的最小值 S_m 刚好高于事先约定的价格水平 K_1 ($S_m>K_1$)，无需重置原敲定价格，且到期时原生资产的价格 S_T 低于或等于原敲定价格 K ($S_T\leqslant K$)．另一种情况，若在$[0,T)$内重新设置敲定价格为 K_1 ($S_m\leqslant K_1$)，但在到期时原生资产的价格 S_T 低于或等于 K_1 ($S_T\leqslant K_1$)，则此时看涨期权的到期收益亦为零．

定义 2　单点水平欧式重置看跌期权是指事先约定的敲定价格为 K，事先约定的价格水平为 K_1 ($K<K_1$)，一旦在期权的有效期内原生资产价格的最大值上升到事先约定的价格水平，就对敲定价格重置．到期的收益为 $R_{P_T}=\max(\hat{K}-S_T,0)$，$\hat{K}$ 为最终的敲定价格．

对单点水平欧式重置看跌期权我们可类似于上面的看涨期权分两种情形考虑，在此略去．

定理 1　单点水平重置买权期初的定价公式为

$$R_{C_I}=Se^{-qT}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2) \tag{2.1}$$

$$R_{C_{II}}=Se^{-qT}\{N(d_1)+e^{-2\mu' x_0/\sigma^2}[N(d_{1d})-N(d_{1b})]\}-K_1e^{-rT}e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{2d})-Ke^{-rT}[N(d_2)-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{2b})],$$

其中，

$$u'=r-q+\frac{\sigma^2}{2},$$

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},\qquad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T},$$

$$d_{1b}=\frac{-\ln\frac{S}{K_1}-\ln\frac{K}{K_1}+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},\qquad d_{2b}=d_{1b}-\sigma\sqrt{T},$$

$$d_{1d}=\frac{-\ln\frac{S}{K_1}+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},\qquad d_{2d}=d_{1d}-\sigma\sqrt{T}.$$

证明 根据单点水平重置看涨期权的定义,在风险中性条件下,单点水平重置看涨期权的定价公式为

$$R_{C_I}=e^{-rT}E^Q(S_T-K\mid S_T>K_1,S_T>K)P_r^Q(S_T>K_1,S_T>K)=$$
$$e^{-rT}E^Q(S_T-K\mid S_T>K)P_r^Q(S_T>K)=$$
$$Se^{-qT}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2). \tag{2.2}$$

$$R_{C_{II}}=e^{-rT}E^Q(S_T-K\mid S_m>K_1,S_T>K)P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K)+$$
$$e^{-rT}E^Q(S_T-K_1\mid S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)P_r^Q(S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)=$$
$$C_1+C_2.$$

$$C_1=e^{-rT}E^Q(S_T-K\mid S_m>K_1,S_T>K)P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K)=$$
$$e^{-rT}E^Q(S_T\mid S_m>K_1,S_T>K)P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K)-Ke^{-rT}P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K)=$$
$$A_1-B_1.$$

$$B_1=Ke^{-rT}P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K)=Ke^{-rT}P_r^Q(\ln\frac{S_m}{S}>-\ln\frac{S}{K_1},\ln\frac{S_T}{S}>-\ln\frac{S}{K_1}+\ln\frac{K}{K_1})$$

(令 $X_T=\ln\frac{S_T}{S}$, $x_0=\ln\frac{S}{K_1}$, $X_m=\ln\frac{S_m}{S}$, $n=\ln\frac{K}{K_1}$).

则

$$B_1=Ke^{-rT}P_r^Q(X_m>-x_0,X_T>-x_0+n).$$

利用最高及最低原生资产价格的概率分布,我们可知

$$B_1=Ke^{-rT}\{N[\frac{x_0-n+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}]-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N[\frac{-x_0-n+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}]\}=$$
$$Ke^{-rT}\{N[d_2]-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N[d_{2b}]\}.$$

$$A_1=Se^{-qT}P_r^R(X_m>-x_0,X_T>-x_0+n)=$$
$$Se^{-qT}\{N[\frac{x_0-n+\mu' T}{\sigma\sqrt{T}}]-e^{-2\mu' x_0/\sigma^2}N[\frac{-x_0-n+\mu' T}{\sigma\sqrt{T}}]\}=$$
$$Se^{-qT}\{N[d_1]-e^{-2\mu' x_0/\sigma^2}N[d_{1b}]\}.$$

由此可知

$$C_1=A_1-B_1=Se^{-qT}\{N[d_1]-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N[d_{1b}]\}-Ke^{-rT}\{N[d_2]-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N[d_{2b}]\}. \tag{2.3}$$

再求解 C_2 如下,

$$C_2=e^{-rT}E^Q(S_T-K_1\mid S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)P_r^Q(S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)=$$
$$e^{-rT}E^Q(S_T\mid S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)P_r^Q(S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)-K_1e^{-rT}P_r^Q(S_m\leqslant K_1,S_T>K_1)=$$
$$A_2-B_2.$$

先求解 B_2 如下,

$$B_2=K_1e^{-rT}P_r^Q(S_T>K_1)-K_1e^{-rT}P_r^Q(S_m>K_1,S_T>K_1)=$$
$$K_1e^{-rT}P_r^Q(S_T>K_1)-K_1e^{-rT}P_r^Q(\ln\frac{S_T}{S}>-x_0,\ln\frac{S_m}{S}>-x_0)=$$
$$K_1e^{-rT}P_r^Q(S_T>K_1)-K_1e^{-rT}P_r^Q(X_T>-x_0,X_m>-x_0)=$$
$$K_1e^{-rT}P_r^Q(S_T>K_1)-K_1e^{-rT}[N(\frac{x_0+\mu T}{\sigma\sqrt{T}})-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(\frac{-x_0+\mu T}{\sigma\sqrt{T}})]=$$
$$K_1e^{-rT}N(d'_1)-K_1e^{-rT}[N(d'_1)-e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{2d})]=$$
$$K_1e^{-rT}e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{2d}).$$

其中 $d'_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S}{K} + (r - q + \dfrac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}$. 同理可得 A_2 如下:

$$A_2 = Se^{-qT}e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{1d}).$$

由此可知

$$C_2 = A_2 - B_2 = Se^{-qT}e^{-2\mu' x_0/\sigma^2}N(d_{1d}) - K_1e^{-rT}e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(d_{2d}). \tag{2.4}$$

所以,由式(2.2),(2.3)和(2.4)定理得证.

定理2　事先设置的敲定价格为 K,约定的价格水平为 $K_1(K < K_1)$ 的单点水平重置看跌期权期初的定价公式为

$$R_{P_I} = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1), \tag{2.5}$$

$$R_{P_{II}} = Se^{-qT}\{-N(-d_1) - e^{-2\mu' x_0/\sigma^2}[N(-d_{1d}) - N(-d_{1b})]\} - Ke^{-rT}[-N(-d_{2a}) + e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(-d_{2b})] + K_1e^{-rT}e^{-2\mu x_0/\sigma^2}N(-d_{2d}).$$

证明　同定理1的证明类似.

推论1　对于单点水平的重置期权,若原生资产的价格的最值在到期日达到,则此单点水平的重置期权就退化成了一般的欧式期权.定价公式见式(2.1)和式(2.5).

参考文献:

[1]　陈松男,金融工程学[M].上海:复旦大学出版社,2002. 255 - 301.

[2]　欧辉等,重置期权的创新及其在随机利率情形下的定价[J].湖南文理学院学报,2004,16(3):6 - 10.

[3]　王莉君,张曙光,随机利率下重置期权的定价问题[J].高校应用数学学报A辑,2002,17(4):471 - 478.

[4]　姜礼尚,期权定价的数学模型与方法[M].北京:高等教育出版社,2003.

[5]　金治明,随机分析基础及其应用[M].北京:国防工业出版社,2003.

Pricing of the single-point-level reset options

ZHANG Ji-zhou, LI Song-qin

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: We study single-point-level reset options pricing problems by using the martingale pricing method and the probability distribution of extremes. Thus we get the pricing formulas for the single-point-level reset call options and put options.

Key words: reset options; martingale pricing; single-point-level

(责任编辑:冯珍珍)