CSA共轭定理(可解情形)证明之简化

邵淞春

引　言

为了使用根系去研究特征O的代数闭域F上的半单纯李代数L，必须证明L单独决定了Φ，即要证明共轭定理"李代数L的任意二个Cartan子代数在Int L下共轭"。大多数较老的方法都使用解析方法($F=C$)或代数几何的方法。Humphreys[1]介绍了近年来所创建的一套方法。Winter[4]用初等方法证明了"任意李代数L的Borel子代数都在E(L)下共轭"，于是导出"任意李代数L的Cartan子代数都在E(L)下共轭"。但为了从前者导出后者，必须先证明其特殊情况"可解李代数L的Cartan子代数都在E(L)下共轭"，但其证明比较烦琐，这是由于论证过程中用到的L中非零的、维数最小的Abel理想没有构造出来。本文将这个理想构造出来，而且十分简单，从而就将证明过程作了简化。

预　备　知　识

(1) 对任意的$x\in L$，考虑其伴随表示adx对L的直和分解(作为向量空间)

$$L=\coprod_{a\in F}L_a(adx),$$

那末$L_0(adx)$是L的一个子代数，当$a\neq0$时，非$\{0\}$的$L_a(adx)$的每一个元素都是ad-幂零的。

Barnes称$L_0(adx)$为Engel子代数[5]。

(2) 设$x\in L$，如果存在$y\in L$以及ady的某一个非零特征值a，使$x\in L_a(ady)$，则称x是强ad-幂零的。

显然，强ad-幂零元x必定是ad-幂零的。

用N(L)表示所有的强ad-幂零元的集合，且用E(L)表示由所有$\exp adx$，$x\in$N(L)所生成的Int$L$的子群。

(3) 李代数L的Cartan子代数(简记为CSA)定义为一个与其正规化子相等的幂零子代数。

H是L的CSA当且仅当H是极小的Engel子代数。

(4) 引理　如L可解，那末L中一定含有一个一维的Abel理想。

证明　∵L可解，由Lie定理，L内存在一个adL的公共特征向量$w\neq0$，即

$[x,w]=adx(w)=a(x)\cdot w$，$a(x)\in F$，$\forall x\in L$，显然Fw就是L的一维Abel理想。

本文于80年10月17日收到

定理的证明

定理 设L可解，则L的任意二个CSAH_1，H_2在E(L)下共轭。

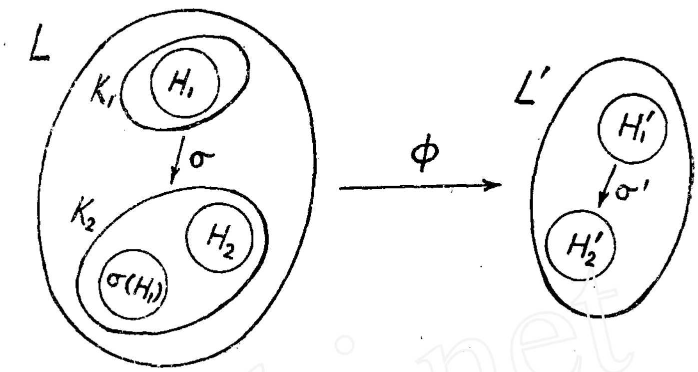
证明 下面主要叙述的是简化的这一部分证明过程，其余的可查阅原书[1](或参照后面的另一证法)，因而尽可能简略。

对dim$L$使用归纳法。

(1) 当dim$L=1$，证明是显然的。

(2) 假设dim$L<n$时，定理成立。

当 dim$L=n$，可设L本身不是幂零的。由上面引理，可在L中找到一个一维的 Abel 理想F_w，于是有典范映照



$$\phi: L \to L' = L/F_w,$$

那末$H_1'=\phi(H_1)$，$H_2'=\phi(H_2)$都是L'的CSA。令

$$K_1=\phi^{-1}(H_1'),\ K_2=\phi^{-1}(H_2'),$$

则可在E(L)中找到一个σ，使$\sigma(K_1)=K_2$，而且H_1是K_1的CSA，$\sigma(H_1)$、H_2都是K_2的CSA。

下面再就K_2的维数分二种情况讨论。

1° 如dim$K_2<n$，定理易于得证。

2° 如 dim$K_2=n$，∵dim $L=n$，∴$L=K_2=K_1$，从而 $L=H_1+F_w=H_2+F_w$. 但是CSA H_2必是$L_0(adx)$形，$x\epsilon L$，且$[x,w]=aw$，$a\neq 0$，这是因为如$a=0$，则$w\epsilon L_0(adx)$. ∴$F_w\subset L_0(adx)=H_2$，则 $L=H_2+F_w=H_2$，即 L 是幂零的。这与上面假设L不是幂零的相矛盾，∴$a\neq 0$。

∵$x\epsilon L=H_1+F_w$，∴可设$x=y+bw$，$y\epsilon H_1$，$b\epsilon F$，再令 $z=\frac{b}{a}w$，有 $(adx-a)z=[x,z]-az=[x,\frac{b}{a}w]-bw=0$，∴$z\epsilon L_a(adx)$，$a\neq 0$，即 $z\epsilon$N(L)，于是exp$adz\epsilon$E(L)。又从 $z\epsilon F_w$，可得 $(adz)^2=0$，∴exp $adz=1+adz$，于是

exp $adz(x)=(1+adz)x=x-[x,z]=x-bw=y$. 最后可得到

$$\exp adz(H_2)=L_0(ady)=H_1,$$

这就说明H_1，H_2在E(L)下共轭，定理证毕。

为了看清 exp adz的作用，将上述方法稍微改变一下，得到另外的证明方法。

另证 对dim$L$使用归纳法。

(1) 当dim$L=1$(此时L为幂零李代数)，L的CSA即为自身，于是定理得证。

(2) 假设dim$L<n$时定理成立。

当 dim$L=n$，由上面引理，可在L中找到一个一维的Abel理想F_w，其中$w\neq 0$是 adL的公共特征向量。令$L'=L/F_w$，则有典范映照

$$\phi:\begin{cases} L\longrightarrow L' \\ x\longrightarrow x' \end{cases}$$

因为H_1，H_2都是L的CSA，于是它们的同态象H_1'，H_2'也是可解李代数L'的CSA。$\because \dim L'<n$，由归纳假设，H_1'，H_2'在$\mathrm{E}(L')$下共轭，即有$\sigma'\in\mathrm{E}(L')$使$\sigma'(H_1')=H_2'$。从而有$\sigma\in\mathrm{E}(L)$，使下面的图形可交换

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & L' \arrow[d, "\sigma'"] \\ L \arrow[r, "\phi"'] & L' \end{tikzcd}$$

再令$K_1=\phi^{-1}(H_1')$，$K_2=\phi^{-1}(H_2')$，则$\phi(\sigma(K_1))=\sigma'(\phi(K_1))$，即$\phi(\sigma(K_1))=H_2'$，$\therefore \sigma(K_1)\subset K_2$。$\because \dim K_1=\dim H_1'+1=\dim H_2'+1=\dim K_2$，$\therefore \sigma(K_1)=K_2$。

由于H_2是L的CSA，当然也是K_2的CSA，同理H_1也是K_1的CSA。因为同构映射σ将K_1映到K_2上，$\therefore \sigma(H_1)$也是K_2的CSA。

下面再分二种情形进行讨论。

1）如$w\in H_1$，$\because \exp adx(w)\in Fw$，$\therefore \sigma(w)\in Fw$，不妨设$\sigma(w)=cw$，$\because \sigma$是内自同构，$\therefore c\neq 0$。$\because w\in H_1$，$\therefore H_1=K_1$，则$K_1$为$L$的幂零子代数，于是$K_2=\sigma(K_1)$也是$L$的幂零子代数。如$H_2\subsetneqq K_2$，那末$H_2$不能自正规，这与$H_2$为CSA相矛盾，$\therefore H_2=K_2$。因此从$\sigma(K_1)=K_2$立即可得$\sigma(H_1)=H_2$，$\sigma\in\mathrm{E}(L)$。

2）如$w\notin H_1$则$w\notin H_2$。这是因为如$w\in H_2$，与1)同样可证得$w\in H_1$，矛盾。$\therefore$必须有$w\notin H_2$。令　$K_1=H_1+Fw$，　　$K_2=H_2+Fw$，

由于CSAH_1必是$L_0(adx)$形，$x\in L$，且$[x,\ w]=aw$，$a\neq 0$。若不然，如$a=0$，则$w\in L_0(adx)=H_1$，矛盾，$\therefore a\neq 0$。又$\sigma([x,\ w])=\sigma(aw)$，$[\sigma(x),\sigma(w)]=a\cdot\sigma(w)$，$[\sigma(x),\ cw]=ac\cdot w$，$\because c\neq 0$，$\therefore [\sigma(x),\ w]=aw$。$x$当然属于$L_0(adx)=H_1\subset K_1$，$\therefore \sigma(x)\in K_2$，于是$\sigma(x)$可表为$y+bw$，$y\in H_2$，$b\in F$。令

$$z=\frac{b}{a}w,$$

与前面一样可证得

$$\exp adz=1+adz\in\mathrm{E}(L)。$$

所以

$$\begin{aligned}\exp adz(\sigma(x))&=(1+adz)\sigma(x)\\&=\sigma(x)+[z,\ \sigma(x)]\\&=\sigma(x)-[\sigma(x),\frac{b}{a}w]\\&=\sigma(x)-bw\\&=y。\end{aligned}$$

接下去再证明

$$((\exp adz)\sigma)H_1=L_0(ady)。$$

记$\tau=(\exp adz)\sigma$，由于上面已得到$\tau(x)=y$，于是只要证明$\tau(L_0(adx))=L_0(ad\tau(x))$。任取$u\in L_0(adx)$，则$(adx)^m\cdot u=0$，$\therefore 0=\tau(0)=\tau((adx)^m\cdot u)=(ad\tau(x))^m\cdot\tau(u)$，$\therefore \tau(u)\in L_0(ad\tau(x))$，则　　$\tau(L_0(adx))\subset L_0(ad\tau(x))$

反之，任取$v\epsilon L_0(ad\tau(x))$，则$(ad\tau(x))^m\cdot v=0$。$\because\tau=(\exp adz)\sigma$为自同构，$\therefore$存在$u$，使$\tau(u)=v$，于是$(ad\tau(x)^m\cdot\tau(u)=0$，$\tau((adx)^m\cdot u)=0$，$\therefore(adx)^m\cdot u=0$，即$u\epsilon L_0(adx)$。则$v=\tau(u)\epsilon\tau(L_0(adx))$，从而

$$L_0(ad\tau(x))\subset\tau(L_0(adx))。$$

所以

$$\tau(L_0(adx))=L_0(ad\tau(x)),$$

即 $\tau(H_1)=L_0(ady)$，且$L_0(ady)$也是L的CSA。

最后指出， $L_0(ady)=H_2$。

$\because H_2$是L的CSA，于是存在m，使$(ady)^m\cdot y'=0$，$\forall y'\epsilon H_2$，$\therefore H_2\subset L_0(ady)$。但$H_2$和$L_0(ady)$都是$L$的CSA，从而都是$L$的极小的Engel子代数，所以

$$H_2=L_0(ady)。$$

即$\tau(H_1)=H_2$，其中$\tau=(\exp adz)\sigma\epsilon\mathrm{E}(L)$。定理证毕。

（注） 对于$w\bar{\epsilon}H_1\cup H_2$这一情形，我们来进一步考察exp adz的作用。

任取$x'\epsilon H_1$，设$[x', w]=a'w$，同上面一样，可得到$[\sigma(x'), w]=a'w$。因为上面已证明了K_2中的元素$\sigma(x')\epsilon\sigma(H_1)$被exp adz映射到H_2，所以可设

$$\exp adz(\sigma(x'))=y_1\epsilon H_2。$$

但$\sigma(x')$又可表为$y'+b'w$，$y'\epsilon H_2$，$b'\epsilon F$。所以

$$\begin{aligned}y_1&=\exp adz(\sigma(x'))\\&=(1+adz)\cdot\sigma(x')\\&=\sigma(x')-[\sigma(x'), z]\\&=y'+b'w-\frac{ba'}{a}w,\end{aligned}$$

即

$$y_1-y'=b'w-\frac{ba'}{a}w。$$

但$y_1-y'\epsilon H_2$，$b'w-\frac{ba'}{a}w\epsilon F_w$，$H_2\cap F_w=0$。$\therefore y_1-y'=b'w-\frac{ba'}{a}w=0$，则$y_1=y'$，$b'=\frac{ba'}{a}$。所以exp adz的作用是将

$$\sigma(x')=y'+b'w\rightarrow y',$$

其中$b'/a'=b/a$或$b'=a'=0$。这样看清了exp adz所起的作用，有助于了解$\sigma(H_1)$的构造。

最后，作者对赵嗣元先生的帮助与指导表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, 1978.
〔2〕 万哲先，李代数.
〔3〕 N. Jacobson，李代数（曹锡华译）.
〔4〕 D. J. Winter, Abstract Lie Algebra, 1972.
〔5〕 D. W. Barnes, On Cartan Subalgebra of Lie Algebra, Math. Z. 101(1967), 350～355.