

Hénon 映射周期点分布的混沌区

迟洪钦

吴忠英

(上海师范大学, 计算机科学系)

(上海交通大学, 应用数学系)

提 要 本文报道了应用 PC 机大量迭代计算找到的一个 Hénon 映射周期点分布的混沌区, 以及一些较长周期的周期环, 参数取值范围为 $1.0 \leq a \leq 1.2$, $-0.5 \leq b \leq -0.4$. 根据混沌动力学的理论对所得到的结果进行分析, 给出解释.

关键词 Hénon 映射; 周期点; 混沌; 周期环

中图法分类号 C177.91

0 引 言

Hénon 映射是具有两个参数的平面映射族

$$\begin{cases} x_1 = 1 + y - ax^2 & (1) \\ y_1 = by & (2) \end{cases}$$

它只有一个非线性项, 是高维情形最简单的非线性映射.

由[7]知, 在参数范围 $1.1 \leq a \leq 1.5$, $-0.4 \leq b \leq -0.2$ 内, 取周期 1, 2, 3, 6, Hénon 映射的参数分布图与一维非线性映射——Logistic 映射的参数分布图相比, 两者有极大的不同. 这从一个方面说明了非线性映射中高维与一维的区别. 本文从另一个方面来说明两者的区别. 我们取参数范围 $1.0 \leq a \leq 1.2$, $-0.5 \leq b \leq -0.4$; 步长 $h_a = 0.001$, $h_b = 0.001$, 在 PC 机上进行了大量的迭代计算, 得到了该范围内从周期 1 到周期 350 之间许多周期的参数分布图, 同时得到了许多周期环. 根据混沌动力学理论, 我们可以说是找到了一个 Hénon 映射周期点分布的混沌区. 在混沌区内, 存在着各种周期的周期点, 相应地, 存在着各种周期的周期环. 为了使讨论方便与简化起见, 我们将周期 1 与周期 2 的参数分布, 周期 3 与周期 6 的参数分布, 周期 7 至周期 350 与尚未找到周期的参数分布, 分别打印成图, 予以分析和解释. 另外, 我们还选取若干周期环打印出来, 表明在混沌区内确实存在着各种周期的周期环.

1 周期 1 到周期 6 的参数分布

本节中的 (a, b) 参数分布图, a 轴从左到右为正向, b 轴从上到下为正向, 步长 $h_a = 0.001$, $h_b = 0.001$. 初始点均取 $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$. 精度控制取 $\varepsilon = 10^{-11}$. 循环次数取 200, 参数范围取 $1.0 \leq a \leq 1.2$, $-0.5 \leq b \leq -0.4$.

从图 1 (在计算机彩色显示器屏幕上显示得十分清楚) 可见, 在所计算的参数范围内, 周期 1

本文于 1993 年 3 月 1 日收到.

的点约占二分之一. 我们原来打算将周期1与周期2的点一起打印出来, 因为在该范围内没有周期2的点, 所以只能单独打印周期1的点. 另外, 在所计算的参数范围内, 也没有周期4和周期5的点.

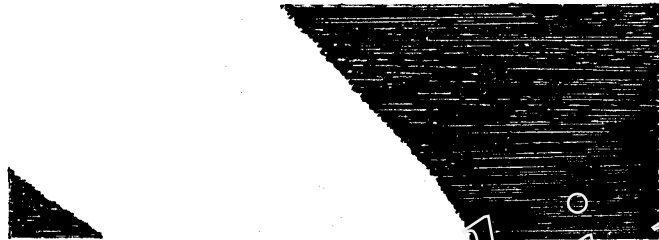


图 1 周期1的参数分布图

Fig. 1 The distribution of parameters of period 1

从图2可见, 在所计算的参数范围内, 周期3与周期6的点约占五分之二. 从图3可见, 在这些点中大部分是周期3的点. 图4给出周期6的点, 与图3相比, 不足周期3的点的一半. 从图2, 3, 4可见, 周期3与周期6的点的交界不是光滑的, 而是互相渗透的. 另外, 周期6的点的分布图中有一斜的细长条空白, 耐人寻味.

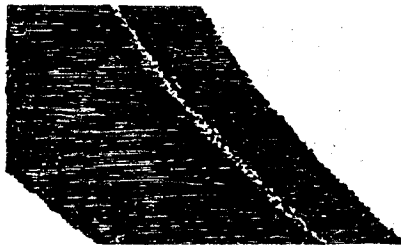


图 2 周期3与周期6的参数分布图

Fig. 2 The distribution of parameters of period 3 and period 6

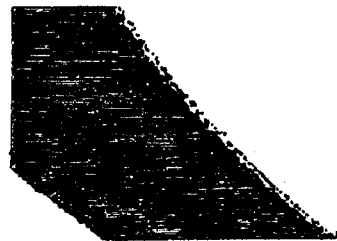


图 3 周期3的参数分布图

Fig. 3 The distribution of parameters of period 3



图 4 周期6的参数分布图

Fig. 4 The distribution of parameters of period 6

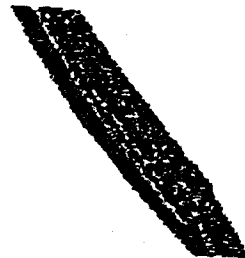


图 5 尚未找到周期与从周期7至周期350的参数分布图

Fig. 5 The distribution of parameters of un-period and period 7-350

图2中倍周期点的交界的不光滑与互相渗透,刚好反映了非线性映射中高维情形与一维情形的显著区别. 倍周期点的交界虽然不是光滑的,但是呈斜直线形状还是十分明显的. 我们认为这正好反映了 Hénon 映射中一个斜直线方程的特征.

2 周期7至周期350的参数分布

图7给出周期7至周期350的参数分布,图6给出尚未找到周期的参数分布,而图5是两者的合并. 图中的分布呈斜线形状也是十分明显的. 我们认为图6就是一个 Hénon 映射周期点分布的混沌区. 因为随着周期的增大,不断在该区内找到新的周期点. 限于时间,我们目前只计算到周期350,以后有条件的话,还将继续计算下去. 从图5,6,7可见,周期7至周期350与尚未找到周期的点的交界互相渗透更加明显,这也反映了周期点分布的混沌.



图 6 尚未找到周期的参数分布图

Fig. 6 The distribution of parameters of un-period



图 7 从周期7至周期350的参数分布图

Fig. 7 The distribution of parameters of period 7-350

根据混沌动力学的理论,在一维非线性映射中,周期3意味着混沌. 即找到周期3的点就能找到一切其他周期的点. 但是,在高维非线性映射中则未必如此. 在 Hénon 映射这一参数范围内的计算结果证实了这一点. 也就是说,在高维非线性映射中,找到周期3的点未必能找到其他一切周期的点. 然而,我们认为在高维非线性映射中,周期3意味着混沌,这一论断仍然是成立的. 只是这里的混沌不是指能找到一切其他周期的周期点,而是指能找到无数周期的周期点. 这也是非线性映射中,高维与一维的区别之一. 我们觉得,这种区别类似于在微积分中一元函数与多元函数在一些基本概念上的区别. 例如,函数连续的概念,函数极限的概念等等. 因为变量在高维中的变化方式要比在一维中丰富得多,所以同一概念在高维中与在一维中产生差异是很自然的事情.

仔细检验在该范围内所得到的周期点,我们发现除了不动点以外所有的周期点其周期都是3的倍数. 我们认为这不是偶然的. 它进一步使我们确信,周期3意味混沌,在高维非线性映射中仍然成立. 从运动学的角度来看,在迭代映射中出现周期点就意味着运动是稳定的. 三角形是几何图形中最简单的图形. 不共线的三点确定一个三角形. 三角稳定性是众所周知的. 因此,我们认为周期3在非线形映射中的地位就如同三角形在几何中的地位. 周期3是非线形映射中最基本的周期,无论是一维还是高维,都是如此. 有待进一步研究的问题是,在高维非线性映射中周期点分布的混沌区内它们的周期是否一定是3的倍数?以及它们的周期在3的倍数中是如何分布的?

3 周期环

我们在计算周期点分布时,为了检验其真伪,就要计算周期环,以便去伪存真.于是,我们发现一个周期点的确认,或者说一个周期环的确认,是与精度控制 ε 的取法有关的.为了说明问题,我们打印了若干周期环,下面择要进行分析.

在 $a = 1.094, b = -0.454$ 处,有一个周期为324的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-9}$ (我们取 $\varepsilon = 10^{-11}$),那么它则成为一个周期为108的周期环.

在 $a = 1.101, b = -0.447$ 处,有一个周期为288的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-8}$,那么它则成为一个周期为96的周期环.

在 $a = 1.125, b = -0.412$ 处,也有一个周期为288的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-8}$,那么它则成为一个周期为72的周期环.

在 $a = 1.108, b = -0.445$ 处,有一个周期为264的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-10}$,那么它则成为一个周期为132的周期环.

在 $a = 1.125, b = -0.416$ 处; $a = 1.122, b = -0.414$ 处,各有一个周期为144的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-10}$,那么它则成为一个周期为72的周期环.

在 $a = 1.083, b = -0.474$ 处,也有一个周期为144的周期环.如果改取 $\varepsilon = 10^{-9}$,那么它则成为一个周期为72的周期环.

由此可见,如果精度控制 ε 取得不同,所得到的周期点分布会有差别.这种现象,在周期较长的周期环中常常出现.如何处理精度控制与周期点确认之间的关系,还需要进一步研究.

4 结 语

经过将近一年断断续续地工作,终于找到了一个 Hénon 映射周期点分布的混沌区,使我们感到欣慰.进一步扩大参数范围,寻找周期点的实际应用,是我们今后努力的两个方向.我们设想可以将周期点应用到计算机加密算法与软件保护装置中去,具体的想法将另文报道.

参 考 文 献

- [1] R. Devang, An Introduction to Chaotic Dynamical System, 1986
- [2] Francis C. Moon, Chaotic Vibrations, 1987
- [3] M. V. Berry, F. R. S., I. C. Percival, F. R. S., and N. O. Weiss, Dynamical Chaos, 1987
- [4] Heinz Georg Schuster, Deterministic Chaos, 1988
- [5] 张筑生, 微分动力系统原理, 科学出版社, 1987
- [6] 迟洪钦, 关于 Logistic 映射的分叉值, 上海师范大学学报(自然科学版), 1992, 2: 77-81
- [7] 迟洪钦, 吴忠英, 关于 Hénon 映射的参数分布, 上海交通大学学报, 1994, 5
- [8] 王兆强, 分形、分维、混沌与全息, 科技导报, 1993, 1

The Chaotic Region of Distribution of Period Points for the Hénon Mapping

Chi Hong qin

(Department of Computer Science, Shanghai Teachers University)

Wu Zhongying

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiatong University)

Abstract

In this paper, a chaotic region of distribution of period points for the Hénon mapping is found by using a PC computer, where the range of parameters used is $1.0 \leq a \leq 1.2$ and $-0.5 \leq b \leq -0.4$. We analyse the graphs of the parameter distribution and a few periodic ring according to the theory of the chaotic dynamical system, and give a brief explanation.

Keywords Hénon mapping; period point; chaos; periodic ring