# Alfven波在不均匀稀薄背景等离子体内的畸变

石 长 和

**摘 要**

本文应用平滑扰动法，处理了一维情况下Alfven波在双等离子体流模型中的传播问题。在此模型中，认为稠密的等离子体束流是入射于一稀薄的不均匀等离子体之中的。结果表明，波内磁场受不均匀性的影响将发生畸变，为束流内的扰动磁场与背景等离子体内的磁场间的耦合提供了通道。

## 一、引 言

在双等离子体流模型中，当等离子体束流的流速超过折合Alfven波速时，将激发Alfven波不稳定性[1,2]，这类不稳定性和发生在天体物理中，或在地球外层空间内的许多物理现象有关，因此讨论Alfven波在由等离子体束流和背景等离子体所组成的系统中的传播是有意义的。

通常Alfven波的波长均有较大值，因此讨论在不均匀介质中的波动过程所常用的WKB法，对Alfven波来说，并不是经常合适的。

但是，当背景等离子体的密度和等离子体束流密度相差很大时，可以采用平滑扰动法进行处理。得到的结果表明，在一维情况下，当稀薄背景等离子体的不均匀尺度可以和波长相比或远小于波长时，原在束流内传播的Alfven波，受不均匀性的影响，将发生畸变。应该予料，在这不均匀的背景等离子体内，波在传播过程中也将发生反射，本文的主要目的是想对这些问题在文献[3]的基础上，再作进一步的讨论。

我们在第二节内将给出所要讨论问题的基本方程；在第三节中则提出问题的处理模型和给出相应方程的解；在第四节内，我们则讨论边界条件及分析所得到的结果，并表明Alfven波畸变的一些特性；第五节为结论。

## 二、基 本 方 程

我们将采用双等离子体流模型讨论问题，即假设在背景等离子体介质中，入射一股其密度不同于背景介质的等离子体流。在流体近似条件下，这一模型的线性化方程应为[4,1]

本文于1983年1月4日收到

$$-i\omega\rho\vec{v}=\frac{1}{C}[\vec{j}\vec{H}_0], \tag{1}$$

$$\vec{E}+\frac{1}{C}[\vec{v}\vec{H}_0]=0, \tag{2}$$

$$-i\rho_B\left[\omega-\frac{1}{i}(\vec{v}_0\cdot V)\right]\vec{v}_B=\frac{1}{C}[\vec{j}_B\vec{H}_0], \tag{3}$$

$$\vec{E}+\frac{1}{C}[\vec{v}_0\vec{h}]+\frac{1}{C}[\vec{v}_B\vec{H}_0]=0, \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E}=\frac{i\omega}{C}\vec{h}, \tag{5}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{h}=\frac{4\pi}{C}(\vec{j}_B+\vec{j}) \tag{6}$$

式中所用的符号及所作的假设可参阅文献[5]。

在方程(1)至(6)中，消去电场以外的其他各量后可得

$$\hat{L}\vec{E}=0, \tag{7}$$

其中 $\hat{L}$ 为一线性微分算子，它有如下形式

$$\begin{aligned}L_{im}=&(\delta_{ij}-\tau_i\tau_j)\left(\delta_{jm}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\\&+\frac{\omega}{V_{AB}^2}\left(\omega-\frac{1}{i}v_{0l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\left(\delta_{im}+\frac{1}{i\omega}\varepsilon_{ijk}v_{0j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\\&+\frac{\omega^2}{V_A^2}\delta_{im},\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$V_A=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, \tag{9}$$

为在背景等离子体中的 Alfven 波速；

$$V_{AB}=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_B}}, \tag{10}$$

为在等离子体流中的 Alfven 波速；$\vec{\tau}$ 为定磁场的单位方向矢量，在以下的讨论中，将设 $\vec{\tau}=\{0,0,1\}$；$\delta_{ij}$ 为 Kronecker 符号；$\varepsilon_{ijk}$ 为反对称单位张量，式中脚标重复二次表示求和。

## 三、问题的模型及方程的解

我们讨论均匀的等离子体束流以速度 $\vec{v}_0$，沿磁力线方向入射到不均匀的稀薄背景等离子体中的情况，假设背景等离子体不均匀性的方向和定磁场、束流流速 $\vec{v}_0$ 在同一方向上，这时就可用一维的常微分方程来讨论问题。

忽略电场的散度项，即有

$$\mathrm{div}\ \vec{E}=0, \tag{11}$$

这相当于要求在磁场方向上无空间电荷的积累和电流存在，这在电导率为无限值时是成立的。这样方程(7)就有如下形式

$$\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)\frac{d^2E_x}{dz^2}-\frac{2\omega v_0}{iV_{AB}^2}\frac{dE_x}{dz}+\left(\frac{\omega^2}{V_{AB}^2}+\frac{\omega^2}{V_A^2}\right)E_x=0, \tag{12}$$

电场的$Y$分量满足相同的方程，而电场的$z$分量为零。

我们假设，不均匀的背景等离子体介质可分成两个区域，在区域Ⅰ内密度是均匀的，其值为$\rho_0$，这样方程（12）成为

$$\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)\frac{d^2E_x}{dz^2}-\frac{2\omega v_0}{iV_{AB}^2}\frac{dE_x}{dz}+\left(\frac{\omega^2}{V_{AB}^2}+\frac{\omega^2}{V_{A0}^2}\right)E_x=0, \tag{13}$$

其中

$$V_{A0}=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \tag{14}$$

由于$V_{AB}$也为一常数，因此方程（13）有平面波形式的解，设此解为

$$E_x(I)=E_0e^{ikz}, \tag{15}$$

相应的色散方程是

$$k^2=\frac{\omega^2}{V_{A0}^2}+\frac{(\omega-kv_0)^2}{V_{AB}^2}, \tag{16}$$

与（15）式对应的磁场有形式

$$h_y(I)=\frac{ck}{\omega}E_0e^{iKz}, \tag{17}$$

在区域Ⅱ内，假设背景等离子体的密度将随$z$有指数变化的规律，即

$$\rho=\rho_0e^{-\frac{z}{L}}, \tag{18}$$

$L$为不均匀尺度；$\rho_0$是$z=0$处背景等离子体的密度，因此$z=0$是两不同区域的分界面。在区域Ⅱ内，方程（12）有形式

$$\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)\frac{d^2E_x}{dz^2}-\frac{2\omega v_0}{iV_{AB}^2}\frac{dE_x}{dz}+\left(\frac{\omega^2}{V_{AB}^2}+\frac{\omega^2}{V_{A0}^2}e^{-\frac{z}{L}}\right)E_x=0, \tag{19}$$

根据假设，$\rho_B\gg\rho_0$，即等离子体束流密度远大于背景等离子体的密度，因此在方程（19）内的各项具有不同的量级，而可以采用平滑扰动法进行处理[6]。

令

$$\ln\frac{E_x}{E'}=\phi, \tag{20}$$

$E'$为一待定常数。$\phi$可按$x=\rho_0/\rho_B$的幂级数进行展开

$$\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2+\cdots, \tag{21}$$

因此我们对所讨论的问题所加的限制条件是：必须保证级数展开式（21）是收敛的。

利用（20）式和（21）式，代入方程（19）中，便可得到相对于$\phi$的各级近似的方程链，它们的形式可参阅文献[3]。零级近似所对应的是在均匀等离子束流内传播的Alfven平面波，即

$$\phi_0=ik'z,$$

而$k'$满足色散方程

$$k'^2=\frac{(\omega-k'v_0)^2}{V_{AB}^2}, \tag{22}$$

对于一级近似$\phi_1$来说，在作了代换

$$\phi_1=exp\left(\frac{-\phi_0}{1-\frac{v_0}{v_{AB}}}\right)\cdot\psi_1, \tag{23}$$

后，$\psi_1$ 应满足下列非齐次方程

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2}+K^2\psi_1=-\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)V_{A0}^2}exp\left(iKz-\frac{z}{L}\right), \tag{24}$$

其中 $K=\frac{k'}{1-v_0/V_{AB}}$，当然我们排除 $v_0=V_{AB}$ 的情况在讨论之外。因此方程 (24) 的特解为

$$\psi_1=-\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)V_{A0}^2}\frac{L^2}{1+4K^2L^2}(1+2iKL)exp\left(iKz-\frac{z}{L}\right), \tag{25}$$

如果我们在展开式 (21) 中只保留第一和第二项，则在区域Ⅱ内，相应波内的电场和磁场分别是

$$E_x(\text{Ⅱ})=E'exp(ik'z-De^{-\frac{z}{L}}), \tag{26}$$

$$h_y(\text{Ⅱ})=\frac{ck'}{\omega}E'\left(1+\frac{D}{ik'L}e^{-\frac{z}{L}}\right)exp\left(ik'z-De^{-\frac{z}{L}}\right), \tag{27}$$

其中系数 $D$ 是

$$D=\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)V_{A0}^2}\frac{L^2}{1+4K^2L^2}(1+2iKL), \tag{28}$$

从表达式 (25) 中可看到，除其他各因子外，我们限于保留展开式中第一和第二两项的条件是 $V_{A0}^2$ 为一大数，即要求 $\rho_0$ 和 $\rho_B$ 相比是一小量，这和以前的假设条件是相符合的。

在区域Ⅱ内，方程 (24) 的通解应该包括齐次方程

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2}+K^2\psi_1=0, \tag{29}$$

的解在内，而方程 (29) 的解是

$$\psi_1=C_1e^{iKz}+C_2e^{-iKz}, \tag{30}$$

这样，方程 (24) 的通解就有如下形式

$$\psi_1=C_1e^{iKz}+C_2e^{-iKz}-D\,exp\left(iKz-\frac{z}{L}\right), \tag{31}$$

其中 $C_1$ 和 $C_2$ 为两待定常数。在乘以 $e^{-iKz}$ 因子后，(31) 式就有

$$\phi_1=C_1+C_2e^{-2iKz}-De^{-\frac{z}{L}}, \tag{32}$$

相应的电场和磁场为

$$E_x(\text{Ⅱ})=E'exp(ik'z+C_1+C_2e^{-2iKz}-De^{-\frac{z}{L}}), \tag{33}$$

$$h_y(\text{Ⅱ})=\frac{Ck'}{\omega}E'exp(ik'z+C_1+C_2e^{-2iKz}-De^{-\frac{z}{L}})\left(1-\frac{2K}{k'}C_2e^{-2iKz}+\frac{D}{ik'L}e^{-\frac{z}{L}}\right), \tag{34}$$

我们可注意到，在 (33) 和 (34) 式中位相内任何与 $z$ 无关的常数部分，都可归结到 $E'$ 中去，因此在不失却讨论的普遍意义情况下，可以令 $C_1=0$。常数 $C_2$ 和 $E'$ 则需根据相应的边界条件决定。这样 (33) 和 (34) 式成为

$$E_x(\text{Ⅱ})=E'exp(ik'z+C_2e^{-2iKz}-De^{-\frac{z}{L}}), \tag{35}$$

$$h_y(\mathrm{II}) = \frac{Ck'}{\omega}E'\,exp\,(ik'z + C_2 e^{-2iKz} - D\,e^{-\frac{z}{L}})\Big(1 - \frac{2K}{k'}C_2 e^{-2iKz} + \frac{D}{ik'L}e^{-\frac{z}{L}}\Big), \tag{36}$$

## 四、边界条件及对解的讨论

在区域Ⅰ和区域Ⅱ的分界面上（即 $z=0$ 平面），波内电场和磁场的切向分量应该连续[7]，即有下列边界条件

$$[\vec{n}\,\vec{E}(\mathrm{I})] = [\vec{n}\,\vec{E}(\mathrm{II})] \quad 当\ z=0\ 时, \tag{37}$$

$$[\vec{n}\,\vec{h}(\mathrm{I})] = [\vec{n}\,\vec{h}(\mathrm{II})] \quad 当\ z=0\ 时, \tag{38}$$

其中 $\vec{n}$ 是 $z=0$ 平面的单位法线方向矢量。在我们所讨论的情况下，应有

$$E_x(\mathrm{I}) = E_x(\mathrm{II}) \quad 当\ z=0\ 时, \tag{39}$$

$$h_y(\mathrm{I}) = h_y(\mathrm{II}) \quad 当\ z=0\ 时, \tag{40}$$

在区域Ⅰ内，一般来说，将有反射波存在，而我们给出的（15）式解的形式，实际上是忽略了波在界面上反射的影响。在我们所讨论的问题中，这是允许的，因为我们假设了不均匀背景等离子体密度是远小于均匀分布的等离子体束流的密度，而波在分界面上的反射效应是和界面二侧波速之比有关的，也即和密度的比值有关，后者则是一小量，在区域Ⅰ中的入射波对区域Ⅱ中 $\phi_1$ 的影响是一级小量，而在界面上的反射部分对区域Ⅱ中 $\phi_1$ 的影响将是一次级小量，故忽略这部分的影响，在我们的讨论中，可以认为是合理的。于是在 $z=0$ 的平面上，可得下列方程

$$E_0 = E'e^{C_2-D}, \tag{41}$$

$$kE_0 = k'E'e^{C_2-D}\Big(1 - \frac{2K}{k'}C_2 + \frac{D}{ik'L}\Big), \tag{42}$$

从这两方程中便能决定 $C_2$ 和 $E'$，它们分别是

$$E' = E_0\,exp\Big[\frac{k-k'}{2K} + \Big(1 - \frac{1}{2iKL}\Big)\Big]D, \tag{43}$$

$$C_2 = -\frac{k-k'}{2K} + \frac{D}{2iKL}, \tag{44}$$

因此在区域Ⅱ内的场强将是

$$E_x(\mathrm{II}) = \tilde{E}\,exp\Big[ik'z - \Big(\frac{k-k'}{2K} - \frac{D}{2iKL}\Big)e^{-2iKz} - De^{-\frac{z}{L}}\Big], \tag{45}$$

$$h_y(\mathrm{II}) = \frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\,exp\Big[ik'z - \Big(\frac{k-k'}{2K} - \frac{D}{2iKL}\Big)e^{-2iKz} - De^{-\frac{z}{L}}\Big] \cdot \Big[1 + \frac{k-k'}{k'} - \frac{D}{ik'L}\Big)e^{-2iKz} + \frac{D}{ik'L}e^{-\frac{z}{L}}\Big], \tag{46}$$

在式中 $\frac{k-k'}{2K}$ 有 $\left(\frac{\rho_0}{\rho_B}\right)^{1/2}$ 的量级，同时根据假设，$D$ 和 $\frac{D}{KL}$ 也都远小于1的，因此对（45）和（46）式可作级数展开，并只保留相对于这些量的线性部分，于是就有

$$E_x(\mathrm{II}) = \tilde{E}e^{ik'z} - \tilde{E}\Big(\frac{k-k'}{2K} - \frac{D}{2iKL}\Big)e^{-i(2K-k')z} - \tilde{E}D\,exp\Big(ik'z - \frac{z}{L}\Big), \tag{47}$$

$$h_y(\mathrm{II})=\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\,e^{ik'z}+\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\left(\frac{2K}{k'}-1\right)\left(\frac{k-k'}{2K}-\frac{D}{2iKL}\right)e^{-i(2K-k')z}$$
$$-\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\left(1-\frac{1}{ik'L}\right)D\,exp\left(ik'z-\frac{z}{L}\right), \tag{48}$$

其中
$$\tilde{E}=E_0\,exp\left[\frac{k-k'}{2K}+\left(1-\frac{1}{2iKL}\right)D\right], \tag{49}$$

可以予料，当有
$$\rho=\rho_0\,e^{\frac{z}{L}}, \tag{50}$$

分布时，这时波内的场强就应有
$$E_x(\mathrm{II})=\tilde{E}e^{ik'z}-\tilde{E}\left(\frac{k-k'}{2K}+\frac{D'}{2iKL}\right)e^{-i(2K-k')z}-\tilde{E}D'\,exp\left(ik'z+\frac{z}{L}\right), \tag{51}$$
$$h_y(\mathrm{II})=\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\,e^{ik'z}+\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\left(\frac{2K}{k'}-1\right)\left(\frac{k-k'}{2K}+\frac{D'}{2iKL}\right)e^{-i(2K-k')z}$$
$$-\frac{Ck'}{\omega}\tilde{E}\left(1+\frac{1}{ik'L}\right)D'\,exp\left(ik'z+\frac{z}{L}\right), \tag{52}$$

其中
$$D'=\frac{\omega^2}{\left(1-\frac{v_0^2}{V_{AB}^2}\right)V_{A0}^2}\,\frac{L^2}{1+4K^2L^2}(1-2iKL), \tag{53}$$

从(47)和(51)式中可看到，式内第一项代表在均匀等离子体束流内传播的入射 Alfven 波。式中的第二项的指数部分中，由于 $2K>k'$，因此这一项实际上是在区域Ⅱ中，由于不均匀分布而引起的上行平面波。在式中的第三项，也是下行波，但它和第一项不同，因为 $D$ 和 $D'$ 一般是一复数，因此除了位相和原来入射的 Alfven 波有一相移外，它的波幅还与背景不均匀等离子体的密度分布有同样的指数变化规律。这一项表示由于不均匀性对原有 Alfven 波所造成的畸变。在强不均匀性的情况下，即 $KL\ll1$，如果背景等离子体的密度随 $z$ 而增加，则从(52)式中可看到，$h_y(\mathrm{II})$ 将随 $z$ 而减小，也就是说，原在入射波内的一部分磁场将逐渐"扩展"到背景等离子体中去。相反，如果背景等离子体的密度随 $z$ 的增加而减小，则在波的传播过程中，原先散布在背景等离子体内的磁场将重新收聚到束流内的 Alfven 波中去。当然，这是一种次级效应，因为我们作了背景等离子体是稀薄的假设。

在极限情况下，当 $\rho_0\to0$ 时，不难看到，
$$E_x(\mathrm{II})=E_0e^{ikz}, \tag{54}$$
$$h_y(\mathrm{II})=\frac{Ck}{\omega}E_0e^{ikz}, \tag{55}$$

而
$$k^2=\frac{(\omega-kv_0)^2}{V_{AB}^2} \tag{56}$$

这也是所应该预料的结果。

## 五、结　　论

由束流不稳定性所激起的 Alfven 波，如何使其磁场耦合到背景等离子体介质中去，仍是

一个值得研究的课题。我们在这里所发展的理论表明，当背景等离子体的密度分布是空间不均匀时，波内磁场将有可能"扩展"到背景等离子体介质中去的，即为磁场耦合提供了条件，这对解释一些天体物理现象是重要的。

本文在写作过程中，曾和项协恭同志作过讨论，在此表示感谢。

## 参 考 文 献


[1] В. П. Докугаев, ж. Астр., 39 (1962), 1009。

[2] 石长和，物理学报，21 (1965), 1700。

[3] 石长和，物理学报，31 (1983), 25。

[4] V. L. Ginzburg, The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, (1970).

[5] 石长和，物理学报，28 (1979), 263。

[6] V. I. Tatarskii, The Effects of the Turbulent Atmosphere on Waves Propagation, (1971).

[7] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, (1960).


# The Distortion of the Alfvenic Wave in the Rare Inhomogeneous Background Plasma

*Shi Changhe*


### Abstract

We use the smooth perturbation method to treat the problem of Alfvenic wave propagation in the two-fluids model for one dimensional case. In this model we regard the background medium as a inhomogeneous rare plasma, in which moves a dense homogeneous plasma beam. It has been demonstrated that the magnetic field in wave will be distorted under the influence of the inhomogeneous property of the background plasma. This is to provide a way of connection between the magnetic fields in the beam and in the background plasma.