

五次样条插值函数 及其对空间场图的应用

吕 洪 猷

本文推导了五次样条插值公式，用于求二维轴对称或镜对称场的空间场图，获得了满意的结果。

关键词 五次样条插值函数，二维空间场。

一、问题的提出

要求严格的电磁铁装置，必须获得精确的空间场图。对轴对称或镜对称磁场的空间场图的求法，通常是测得中心平面上若干离散点的场值，进行曲线拟合，然后按电磁场方程导出空间场的表示式，求出空间场图。实践表明：用最小二乘法进行曲线拟合，对于较复杂的场形，要求较高的拟合，即使幂级数表示式的幂次取得较高，结果仍不理想。例如条形垫片场^[1]的曲线拟合幂次取到 12 时，只拟合到千分之一的精度，即使取到 24 次幂，也只拟合到万分之五的精度。因而提出另一种办法，实测边界场值，解拉氏方程求界内空间场图。这样从测量中心平面的单分量，改成沿边界测场的诸分量，虽然结果是好的，但对测量的要求变得严峻而复杂。因此，考虑采用函数逼近中最活跃的分支——样条函数。然而，我们对空间场分布要求按一级小量 z 展开， H_z 分量（或 H_y 分量）展开到 z^3 项， H_x 分量展开到 z^4 项，从而空间场的逼近涉及三阶导数和四阶导数。目前一般书籍中现成的三次样条函数公式显然不能满足要求，于是推导了五次样条函数公式，用它作空间场的逼近，实际结果，计算误差比场本身截断误差小一个量级。从而可以保持中心平面单分量的精密测量，保证计算出的空间场精度不低于测量精度。

二、五次样条插值公式的推导

设 $y_i = f(x_i)$ 为区间 $[a, b]$ 上的型值点 ($i=0, 1, \dots, n$)，其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ 称为节点。如果函数 $s(x)$ 满足以下三个条件：

- (1) $s(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$)。
- (2) $s(x)$ 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 上是一个五次多项式。
- (3) $s(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上有连续的一阶至四阶导数。则称 $s(x)$ 为过 n 个点的五次样条函数。

我们从 Hermite 带导数的插值多项式^[2] $P(x)$ 出发，

$$P(x) = \sum_{i=1}^n [1 - 2\omega'_i(x_i)(x - x_i)]\omega_i^2(x)y_i + \sum_{i=1}^n (x - x_i)\omega_i^2(x)y'_i. \quad (1)$$

$$\text{其中 } \omega_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \quad (2)$$

导出五次样条插值函数。要求(1)式满足上述三条件。先考察 x 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ 上的插值, 对 $n=3$ 这种特殊情况, 由(2)式可得:

对 $i=j-1$,

$$\omega_{j-1}(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j-1} - x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})}, \quad (3-1 a)$$

$$\omega'_{j-1}(x_{j-1}) = \frac{1}{x_{j-1} - x_{j+1}} + \frac{1}{x_{j-1} - x_j}. \quad (3-1 b)$$

对 $i=j$,

$$\omega_j(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})}, \quad (3-2 a)$$

$$\omega'_j(x_j) = \frac{1}{x_j - x_{j+1}} + \frac{1}{x_j - x_{j-1}}. \quad (3-2 b)$$

对 $i=j+1$,

$$\omega_{j+1}(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)}, \quad (3-3 a)$$

$$\omega'_{j+1}(x_{j+1}) = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} + \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}}. \quad (3-3 b)$$

令 $x_{j+1} - x_j = h_j$; $x_j - x_{j-1} = h_{j-1}$; $x_{j+1} - x_{j-1} = h_j + h_{j-1}$; $P(x) = s(x)$ 。当 $n=3$ 时, (1)式可写成:

$$\begin{aligned} s(x) = & \left[1 + 2\frac{A}{D}(x - x_{j-1})\right] \left[\frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{D}\right]^2 y_{j-1} \\ & + \left[1 + 2\frac{B}{E}(x - x_j)\right] \left[\frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{-E}\right]^2 y_j \\ & + \left[1 - 2\frac{C}{F}(x - x_{j+1})\right] \left[\frac{(x - x_j)(x - x_{j-1})}{F}\right]^2 y_{j+1} \\ & + (x - x_{j-1}) \left[\frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{D}\right]^2 y'_{j-1} \\ & + (x - x_j) \left[\frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{-E}\right]^2 y'_j \\ & + (x - x_{j+1}) \left[\frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{F}\right]^2 y'_{j+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$A = h_j + 2h_{j-1}; \quad B = h_{j-1} - h_j; \quad C = 2h_j + h_{j-1};$$

$$D = h_{j-1}(h_j + h_{j-1}); \quad E = h_j h_{j-1}; \quad F = h_j(h_j + h_{j-1}).$$

对于 y'_{j-1}, y'_j, y'_{j+1} 值的确定, 可通过四阶导数的连续条件导出, 对(4)式求四阶导数得:

$$\begin{aligned}
 s^{(4)}(x) = & \left\{ 96 \frac{A}{D^3} (2x - x_i - x_{i+1}) + \frac{24}{D^2} \left[1 + 2 \frac{A}{D} (x - x_{i-1}) \right] \right\} y_{i-1} \\
 & + \left\{ 96 \frac{B}{E^3} (2x - x_{i-1} - x_{i+1}) + \frac{24}{E^2} \left[1 + 2 \frac{B}{E} (x - x_i) \right] \right\} y_i \\
 & - \left\{ 96 \frac{C}{F^3} (2x - x_{i-1} - x_i) - \frac{24}{F^2} \left[1 - 2 \frac{C}{F} (x - x_{i+1}) \right] \right\} y_{i+1} \\
 & + \left\{ \frac{48}{D^2} (2x - x_i - x_{i+1}) + \frac{24}{D^2} (x - x_{i-1}) \right\} y'_{i-1} \\
 & + \left\{ \frac{48}{E^2} (2x - x_{i-1} - x_{i+1}) + \frac{24}{E^2} (x - x_i) \right\} y'_i \\
 & + \left\{ \frac{48}{F^2} (2x - x_i - x_{i-1}) + \frac{24}{F^2} (x - x_{i+1}) \right\} y'_{i+1}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

令 (5) 式的 x 在 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 各点上的左右极限相等。得四阶导数连续方程:

$$\left. \begin{aligned}
 s^{(4)}(x_{i-1})_+ &= s^{(4)}(x_{i-1})_-, \\
 s^{(4)}(x_i)_+ &= s^{(4)}(x_i)_-, \\
 s^{(4)}(x_{i+1})_+ &= s^{(4)}(x_{i+1})_-.
 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

对序列 $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 共有 $n+1$ 个节点。为使方程 (6) 对 $j=0$ 到 $j=n$ 的每节点都成立, 需将区间 $[a, b]$ 各向外延伸两个虚设点, $x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}$, 共 $n+5$ 个节点, 从而可列出 $n+1$ 个方程, 但解并不唯一确定。因边界延伸, 边界条件待定。

设 (4) 式满足前述三条件, 则 $s(x)$ 即为五次样条插值函数。当再给出四个边界值时, $s(x)$ 存在而且唯一。

在我们的问题中, 可使

$$\begin{aligned}
 s'(x_{-2}) &= y'_{-2}; \quad s'(x_{-1}) = y'_{-1}; \\
 s'(x_{n+1}) &= y'_{n+1}; \quad s'(x_{n+2}) = y'_{n+2};
 \end{aligned}$$

从方程 (6) 的三个式子消去二个未知量 y'_{i-2} 和 y'_{i+2} 可得到一个便于导出递推公式的方程:

$$\alpha_i y'_{i-1} + \beta_i y'_i + \gamma_i y'_{i+1} = \lambda_i. \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \lambda_i = & -\frac{120}{D^2} h_{i-1} (2h_i - h_{i+1}) y_{i-2} \\
 & + \left\{ 48 \frac{B}{E^3} [(3h_{i-1} + 2h_{i-2})(h_{i-2} - 2h_{i-1}) + 2B_-(3h_{i-1} + h_{i-2})] \right. \\
 & \times (2h_i - h_{i+1}) + 48 \frac{A}{D^3} [(3h_i + h_{i-1})(3h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2h_{i-1}) \\
 & - 2A(3h_{i-1} + h_{i-2})(2h_i - h_{i+1})] + \frac{24}{D^2} [(h_{i-2} - 2h_{i-1})(3h_i + h_{i+1}) \\
 & \left. + (3h_{i-1} + h_{i-2})(2h_i - h_{i+1})] - \frac{120}{E^2} h_{i-1} (2h_i - h_{i+1}) \right\} y_{i-1} \\
 & + \left\{ 48 \frac{A}{D^3} [2A_+(2h_i - h_{i+1}) - (h_i - 2h_{i+1})(3h_i + h_{i+1})] (h_{i-2} - 2h_{i-1}) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 48 \frac{B}{E^3} [(3 h_i + 2 h_{i-1})(3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i-1}) - (3 h_{i-1} + 2 h_i) \\
 &\quad \times (3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1})] \\
 &- 48 \frac{C}{F^3} [2 C_-(h_{i-2} - 2 h_{i-1}) - (2 h_{i-2} - h_{i-1})(3 h_{i-1} + h_{i-2})] (2 h_i - h_{i+1}) \\
 &\quad - \frac{120}{D^2} h_i (h_{i-2} - 2 h_{i-1}) \\
 &+ \frac{24}{E^2} [(3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1}) + (3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i-1})] \\
 &\quad - \frac{120}{F^2} h_{i-1} (2 h_i - h_{i+1}) \} y_i, \\
 &+ \left\{ 48 \frac{B_+}{E^3} [(3 h_i + 2 h_{i+1})(2 h_i - h_{i+1}) + 2 B_+(3 h_i + h_{i+1})] (h_{i-2} - 2 h_{i-1}) \right. \\
 &\quad + 48 \frac{C}{F^3} [(3 h_{i-1} + h_i)(3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1}) \\
 &\quad - 2 C(3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i-1})] + \frac{24}{F^2} [(3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i-1}) \\
 &\quad + (3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1})] - \frac{120}{E^2} h_i (h_{i-2} - 2 h_{i-1}) \} y_{i+1} \\
 &\quad - \frac{120}{F^2} h_i (h_{i-2} - 2 h_{i-1}) y_{i+2}, \tag{8-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{24}{D^2} [2 A(3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1}) - (3 h_i + h_{i-1})(3 h_i + h_{i+1}) \\
 &\times (h_{i-2} - 2 h_{i-1})] - \frac{24}{E^2} [(3 h_{i-1} + 2 h_{i-2})(h_{i-2} - 2 h_{i-1}) + 2 B_-(3 h_{i-1} + h_{i-2})] \\
 &\quad \times (2 h_i - h_{i+1}), \tag{8-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_i &= \frac{24}{E^2} [(3 h_{i-1} + 2 h_i)(3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1}) \\
 &\quad - (3 h_i + 2 h_{i-1})(3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i-1})] \\
 &+ \frac{24}{F^2} [(2 h_{i-2} - h_{i-1})(3 h_{i-1} + h_{i-2}) - 2 C_-(h_{i-2} - 2 h_{i-1})] (2 h_i - h_{i+1}) \\
 &+ \frac{24}{D^2} [(h_i - 2 h_{i+1})(3 h_i + h_{i+1}) - 2 A_+(2 h_i - h_{i+1})] (h_{i-2} - 2 h_{i-1}), \tag{8-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_i &= -\frac{24}{E^2} [2 B_+(3 h_i + h_{i+1}) + (3 h_i + 2 h_{i+1})(2 h_i - h_{i+1})] (h_{i-2} - 2 h_{i-1}) \\
 &\quad - \frac{24}{F^2} [2 C(3 h_i + h_{i+1})(h_{i-2} - 2 h_{i+1}) \\
 &\quad - (3 h_{i-1} + h_i)(3 h_{i-1} + h_{i-2})(2 h_i - h_{i+1})]. \tag{8-4}
 \end{aligned}$$

这里,

$$\begin{aligned}
 A_+ &= h_{i+1} + 2 h_i; \quad B_+ = h_i - h_{i+1}; \quad C_+ = 2 h_{i+1} + h_i; \\
 D_+ &= h_i(h_{i+1} + h_i); \quad E_+ = h_{i+1} h_i; \quad F_+ = h_{i+1}(h_{i+1} + h_i); \\
 A_- &= h_{i-1} + 2 h_{i-2}; \quad B_- = h_{i-2} - h_{i-1}; \quad C_- = 2 h_{i-1} + h_{i-2};
 \end{aligned}$$

$$D_- = h_{j-2}(h_{j-1} + h_{j-2}); \quad E_- = h_{j-1}h_{j-2}; \quad F_- = h_{j-2}(h_{j-1} + h_{j-2}).$$

从 (7) 式, 当 $j=0$ 时有

$$\begin{aligned} \alpha_0 y'_{-1} + \beta_0 y'_0 + \gamma_0 y'_1 &= \lambda_0, \\ y'_0 &= \frac{-\gamma_0}{\beta_0} y'_1 + \frac{\lambda_0 - \alpha_0 y'_{-1}}{\beta_0} = A_0 y'_1 + B_0, \\ A_0 &= -\frac{\gamma_0}{\beta_0}; \quad B_0 = \frac{\lambda_0 - \alpha_0 y'_{-1}}{\beta_0}. \end{aligned} \tag{9-1}$$

当 $j=1$ 时, 有
则

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'_0 + \beta_1 y'_1 + \gamma_1 y'_2 &= \lambda_1, \\ y'_1 &= A_1 y'_2 + B_1, \end{aligned}$$

$$A_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1 A_0 + \beta_1}, \quad B_1 = \frac{\lambda_1 - \alpha_1 B_0}{\alpha_1 A_0 + \beta_1}.$$

当 $j=n$ 时,

$$\begin{aligned} y'_n &= A_n y'_{n-1} + B_n, \\ A_n &= -\frac{\gamma_n}{\alpha_n A_{n-1} + \beta_n}, \quad B_n = \frac{\lambda_n - \alpha_n B_{n-1}}{\alpha_n A_{n-1} + \beta_n}. \end{aligned}$$

由此可得 y'_j 的递推公式为:

$$\left. \begin{aligned} y'_j &= A_j y'_{j+1} + B_j, \quad j = n, n-1, \dots, 0 \\ A_j &= -\frac{\gamma_j}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ B_j &= \frac{\lambda_j - \alpha_j B_{j-1}}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \tag{9-2}$$

如果取等距节点, 即

$$\begin{aligned} h_{j-2} &= h_{j-1} = h_j = h_{j+1} = h, \\ A &= A_+ = A_- = C = C_+ = C_- = 3h, \\ B &= B_+ = B_- = 0, \\ E &= E_+ = E_- = h^2, \\ D &= D_+ = D_- = F = F_+ = F_- = 2h^2. \end{aligned}$$

于是,

$$\lambda_j = -\frac{30}{h^2} y_{j-2} - \frac{840}{h^2} y_{j-1} + \frac{840}{h^2} y_{j+1} + \frac{30}{h^2} y_{j+2}. \tag{10-1}$$

$$\alpha_j = \frac{360}{h}; \quad \beta_j = \frac{1080}{h}; \quad \gamma_j = \frac{360}{h}. \tag{10-2}$$

方程(7)可改写成:

$$\frac{1}{3} y'_{j-1} + y'_j + \frac{1}{3} y'_{j+1} = C_j. \tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned} C_j &= -(y_{j-2} + 28y_{j-1} - 28y_{j+1} - y_{j+2})/36h, \\ j &= 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

同样, 可得递推公式为:

$$\left. \begin{aligned} y'_j &= \left(-\frac{1}{3}y'_{j+1} + A_j \right) / B_j, \quad j=n, n-1, \dots, 0 \\ B_j &= 1 - \frac{1}{9B_{j-1}}, \quad j=1, 2, \dots, n \\ A_j &= -\frac{A_{j-1}}{3B_{j-1}} + C_j, \quad j=1, 2, \dots, n \\ B_0 &= 1, \quad A_0 = -\frac{1}{3}y'_{-1} + C_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

至此，五次样条插值函数 (4) 具备完全确定的形式和计算插值的顺序。

1. 根据给定 $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ 节点及所对应的 $[y_{i-1}, y_i, y_{i+1}]$ 函数值，计算出 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 及 λ_i (或 C_i) 值。
2. 给出相应的边界条件: $y'_{-2}, y'_{-1}, y'_{n+1}, y'_{n+2}$, 可定出相应的 B_i, A_i , 并求出相应 y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1} 值。
3. 由公式 (4) 计算出在 $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ 节点间的插值。

三、用五次样条函数逼近空间场

我们分别研究二种情况下，应用五次样条函数逼近空间场的效果。其一，使用理论场。对理论场取离散点。用五次样条插值函数逼近空间场，得出空间场图，与理论值比较，考察采用五次样条作计算时，所产生的计算误差是否超过场表示式本身的截断误差。其二，使用实测场。用五次样条插值函数逼近空间场。考察空间场的精度能否保持在测量精度范围内。

1. 逼近 $h(\rho) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n}$ 场。众所周知这种场采取级数展开形式时，中心平面的场展开式为：

$$h(\rho) = 1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + a_5\rho^5 + \dots$$

空间场展开式为：

$$\begin{aligned} H_z(\rho, \xi) &= h(\rho) - \frac{1}{2}[\rho^{-1}h^{(1)}(\rho) + h^{(2)}(\rho)]\xi^2 \\ &\quad + \frac{1}{24}[\rho^{-3}h^{(1)}(\rho) - \rho^{-2}h^{(2)}(\rho) + 2\rho^{-1}h^{(3)}(\rho) + h^{(4)}(\rho)]\xi^4 \\ &\quad + \dots, \end{aligned}$$

$$H_r(\rho, \xi) = h^{(1)}(\rho)\xi + \frac{1}{6}[\rho^{-2}h^{(1)}(\rho) - \rho^{-1}h^{(2)}(\rho) - h^{(3)}(\rho)]\xi^3 + \dots$$

其中，

$$\rho = \frac{r-r_0}{r_0}, \quad \xi = \frac{z}{r_0}$$

$$a_1 = -0.5, \quad a_2 = 0.125, \quad a_3 = 0.0625, \quad a_4 = -0.11328125, \quad a_5 = 0.073476565.$$

h 的右上角标表示导数的阶次。

我们对 $h(\rho)$ 场取 0.025 等间隔离散。用五次样条插值函数逼近空间场，用拉格朗日插值函数方法取五点定边界导数。结果在 $z_0 = 0.16, |\rho| \leq 0.775$ 范围内，场分量的计算误差为 $|\Delta H_r| \leq 1 \times 10^{-6}, |\Delta H_z| \leq 4 \times 10^{-6}$ 。而场展开式本身的截断误差 $O(H_z)$ 为 10^{-6} ，

$O(H_z)$ 为 10^{-4} 。计算误差比场的截断误差小一个量级以上。

2. 逼近条形垫片理论场。F3 条形垫片^[1]中心平面上的场形如图 1 所示。幂级数展开表示为:

$$h(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n.$$

空间场, 忽略 z 的五次幂以上的表示式, 为:

$$H_z(y, z) = h(y) - \frac{1}{2} h^{(2)}(y) z^2 + \frac{1}{24} h^{(4)}(y) z^4 + \dots,$$

$$H_y(y, z) = h^{(1)}(y) z - \frac{1}{6} h^{(3)}(y) z^3 + \dots.$$

我们对 $h(y)$ 场取等间距 0.04 作离散。从 $y = -1.6$ 到 2.16 在 $z = 0.12$ 的空间作样条逼近的结果, 其计算误差 $|\Delta H_z| > 1 \times 10^{-6}$, $|\Delta H_y| > 1 \times 10^{-5}$, 而场展开式本身的截断误差 $O(H_z)$ 为 10^{-5} , $O(H_y)$ 为 10^{-4} , 同样小于场展开式本身的截断误差。因此, 这种计算方法是能够很好满足计算要求的。

3. 逼近条形垫片实测场。对 F3 条形垫片场的中心平面和空间 $z = 0.12$ 的平面, y 向间隔为 0.04, 单位为 m, 皆做过实际测量^[3]。其磁场测量精度约为 1×10^{-3} 。取中心平面场的实测数据, 做为样条插值函数的型值点, 从 $y = -0.14$ 到 2.14, 对 $z = 0.12$ 的空间场逼近, 其结果, H_z 分量在 $y = 0.06 - 1.98$ 范围内与实测场分量比较, 偏差小于 1×10^{-3} , 在此范围外皆大于 3×10^{-3} , H_y 分量, 在 $y = 0.06 - 1.98$ 范围内与实测场分量比较, 除六点偏差在 $1.1 \times 10^{-3} \sim 1.7 \times 10^{-3}$ 外, 其余皆小于 1×10^{-3} , 在此范围外皆大于 5×10^{-3} (如图 1 所示)。

因此, 用五次样条函数就中心平面实测数据对空间场逼近, 除两端之外是能够保持测量精度的。

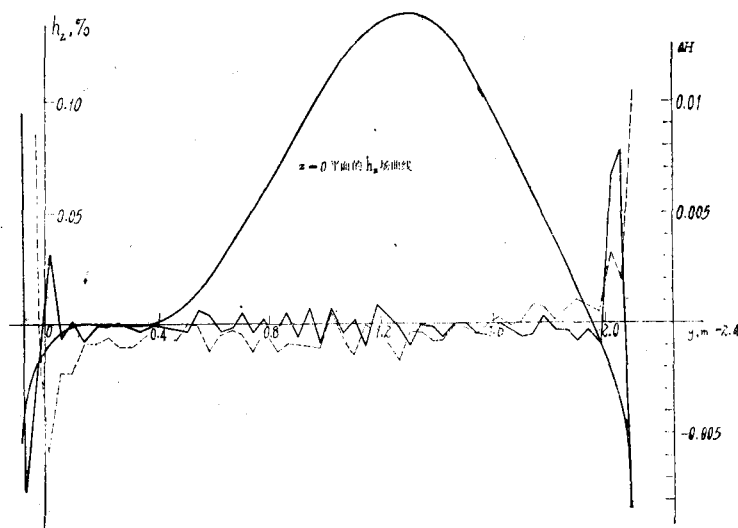


图 1 $z = 0.12$ 平面的样条插值函数场与实测场的偏差
 实测场精度为 0.1%;
 实线: ΔH_z 分量差; 虚线: ΔH_y 分量差。

四、讨 论

1. 用五次样条插值函数来逼近磁场空间的场分布, 精度是高的, 导出公式后, 使用的方法也是简便的, 对从中心平面或轴上场分布来描述空间场的问题, 是一种很好的逼近方法。

2. 由于五次样条插值函数, 要求曲线平滑度高, 需要四阶导数的连续, 采用边值三点(或二点)定导数时, 它们的四阶导数不存在, 因而得出的边界解不稳定, 边界值有较大幅度的跳跃而且延伸较远, 这是要注意的。所以, 我们采用拉格朗日插值函数利用边界五点定出五次样条插值函数的边界导数, 才获得文中的结果。

3. 对场的实测区域的空间逼近。要求在场两端也能保持测量的精度, 可将中心平面测量的型值点, 两端皆向外延伸一段虚设定边界值的型值点, 即可使测量区域的空间全部得到保持测量精度的逼近。

4. 相信将样条函数方法应用到电磁场的计算上会有广泛和深入的发展。

参 考 文 献

- [1] 吕洪猷等, 原子能科学技术, 4, 302 (1976).
- [2] 清华大学、北京大学编写组, 计算方法, 科学出版社, 1973年.
- [3] 孙亲仁等, 原子能科学技术, 4, 350 (1976).

(编辑部收到日期: 1982年1月11日)

(上接第 695 页)

- [19] 蔡善钰等, 用热分解羰基镍方法密封中子源, 内部资料, 1964年.
- [20] 滕克俭等, 小电流环缝氩弧焊机, 二机部焊接会议交流资料, 1978年.
- [21] 滕克俭等, 中子源的氩弧焊密封, 原成 [72]-008, 1972年.
- [22] 张进发等, 氦-85 气体源的研制, 内部资料, 1981年.
- [23] 蔡善钰等, 宫腔钴-60后装治疗机用袖珍钴源的焊封工艺, 内部资料, 1977年.
- [24] 蔡善钰等, 铀-238 低能光子源 5 微米厚不锈钢源窗的焊封试验, 内部资料, 1975年.
- [25] ²³⁸Pu 源制备小组, 原子能科学技术, 3, 269 (1975).
- [26] 曹盘年等, ²¹⁰Po-Be 开关中子源, 内部资料, 1975年.
- [27] 赵阿金等, 千居里级 ²¹⁰Po 热源的封装, 内部资料, 1971年.
- [28] 蔡善钰, 测井技术, 5, 35 (1978).
- [29] 曹盘年等, 低能光子源铍窗的真空高频感应钎封工艺, 内部资料, 1978年.
- [30] 蔡善钰, 国外同位素能源发展概况, 国外原子能消息, 专题资料 75-7, 1975年.
- [31] 蔡善钰, 航天技术中的 ²³⁸Pu 能源, 内部资料, 1975年.
- [32] R. G. Niemeyer, ORNL-4529 (1972).
- [33] IAEA, ISO-1677 (1972).
- [34] IAEA, ISO-2919 (1972).
- [35] British Standards Institution, BS-5288 (1976).

(编辑部收到日期: 1981年11月11日)