

文章编号: 1001-4322(2007)12-2069-05

一种基于波动方程的新高阶 FD TD 方法*

王 烁¹, 邵振海², 文光俊¹, 李世贵³, 谢 康⁴

(1. 电子科技大学 通信与信息工程学院 射频集成电路实验室, 成都 610054; 2. Micro Design Technology Pte Ltd, Singapore 117674;
3. 重庆科技学院 数理学院, 重庆 400042; 4. 电子科技大学 宽带光纤传输与通信网技术教育部重点实验室, 成都 610054)

摘 要: 提出了一种基于二阶波动方程的 $(2M, 4)$ 高阶时域有限差分 (FD TD) 方法, 通过使用辛积分传播子 (SIP) 在时域上获得 4 阶精度, 使用离散奇异卷积 (DSC) 方法在空域上达到 $2M$ 阶精度。与已有的 $(2M, 4)$ 阶 FD TD 方法相比, 虽然两者都采用 SIP 和 DSC 方法, 但是此二者的不同点在于: 第一, 新方法基于二阶波动方程; 第二, 在离散计算空间时使用单一网格而不是传统的 Yee 网格; 第三, 单独计算某一场分量从而节约内存并减少计算量。数值计算结果表明, 与传统高阶算法相比, 基于波动方程的高阶 FD TD 方法耗费的机时只有它的 50%, 内存消耗下降 10%, 而两者的计算结果之间相对误差小于 5%。

关键词: 时域有限差分; 波动方程; 离散奇异卷积; 拉格朗日多项式; 辛积分传播子

中图分类号: TN011; TP311.11 **文献标识码:** A

传统时域有限差分 (FD TD) 法^[1] 在解决实际电磁场问题时, 需要将 6 个场分量同时进行交叉迭代运算。即使在 2 维 TM/ TE 问题中, 基于 Yee 网格的传统 FD TD 法至少需要 3 个分量。而从二阶波动方程出发的 2D-FD TD^[2] 只需要计算 3 个场分量中的一个, 在导波结构场分析等应用中具有较好的灵活性。另一方面, 尽管 FD TD 方法有着广泛的应用, 但其精度却无法与以格林函数为基础的积分方法相比。近年来, 学者们提出了许多方案来提高 FD TD 的精度, 例如具有 $(4, 4)$ 阶精度的基于龙格-库塔方法的 FD TD^[3]、基于辛积分传播子 (SIP) 方法的 FD TD^[4-5]、基于拉格朗日多项式插值与 SIP 方法^[6] 以及基于离散奇异卷积 (DSC) 与龙格-库塔方法的高阶 FD TD^[7] 等。然而, 从已发表的文献来看, 以上这些方案都是 Yee 网格的 FD TD 法。

本文提出一种基于波动方程的具有 $(2M, 4)$ 阶精度的 FD TD 算法。其特点如下: 首先, 波动方程是一个场分量的方程, 故该方案在计算时只需要考虑单个场分量, 减少了计算场量, 从而节约了计算量和存储量。又因为在离散计算区域时只使用单一网格而不需要引入形如 Yee 空间的交错网格, 因此空间结构得以简化。其次, 该 $(2M, 4)$ 方案在空域和时域上都采用高阶算法, 其精度远远高于标准的 FD TD。在空域上, 采用基于拉格朗日核的 DSC 方法, 时域上采用 4 阶精度的 SIP 方法。选择适当的计算带宽 M 值能够大大提高计算精度。

本文介绍基于波动方程的高阶 FD TD 方法的基本理论, 以导波系统为例对所提出的方法进行了计算精度验证并讨论了该方法的优势。

1 基本原理

1.1 空域 $2M$ 阶 DSC 方法

文献[7]提出了一种 DSC 时域方法, 其在计算电磁场问题时, 引用 DSC 方法离散计算空间, 构造高阶插值方程从而提高计算精度。

假设 T 表示系统的特征函数, $f(x)$ 为一个测试函数, 则 $f(x)$ 的奇异卷积表示为

$$F(t) = T(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-x) f(x) dx \quad (1)$$

其离散的奇异卷积 (DSC) 形式为

$$F(t) = \sum_k T(t-x_k) f(x_k) \quad (2)$$

其中 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_k T(x) = T(x)$, x_k 表示空间采样点。

若 $T(x)$ 为 DSC 核, 由式(2)可得任一函数以及它的 n 阶导数

* 收稿日期: 2007-07-17; 修订日期: 2007-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助课题 (60571024, 60771046, 60588502)

作者简介: 王 烁 (1983 -), 男, 硕士, 从事高阶时域有限差分方法的研究; wangshuo53@sohu.com。

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=-M}^M \binom{n}{k} (x - x_k)^{n-k} f(x_k) \tag{3}$$

式中: $\binom{n}{k} (x - x_k)^{n-k} f(x_k)$ 即为核, M 是计算的带宽。本文讨论拉格朗日核 (L K) 的情况, L K 的形式为

$$(x - x_k) = \left[\prod_{i=k-M, i \neq k}^{k+M} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right] \exp \left[- \frac{(x - x_k)^2}{2^2} \right] \tag{4}$$

其中 $\eta(x) = \exp(-x^2/2^2)$ 为窗函数。在实际的数值计算中, 计算带宽不可能为无穷大, 因此在必要时使用它来限制计算带宽。

为了将 DSC 方法应用于波动方程, 在式 (3) 中取 $n = 2$, 即对 x 求二阶导数。为了比较加窗前后 L K 的变化情况, 取 $x_k = 0, x_i = x_k + i \Delta x$, 当 $M = 6$ 时二者比较结果如图 1 所示。

由图 1 可知加窗前后 L K 变化很小, 故窗函数不是必须的。对于式 (3) 中 $n = 2$, 基于 L K 的 $2M$ 阶 DSC 的误差项为

$$E_{LK}(x) = \frac{f^{(2M+1)}(c)}{(2M+1)!} \prod_{i=-M}^M \prod_{j=-M}^M (x - x_j) \tag{5}$$

式中: c 为计算区间内的某个值。

1.2 时域的高阶算法——SIP 方法

参考文献[4-6]提出了一种使用辛积分传播子来提高 FD TD 时域精度的方法。

假设 x 为一向量, 且其微分形式可以表示为

$$dx/dt = Cx \tag{6}$$

式中: C 为一矩阵。则在 t 时间过后, x 可以表示为

$$x(t) = \exp(tC)x(0) \tag{7}$$

$$\exp(tC) = I + tC + \frac{t^2}{2!}C^2 + \frac{t^3}{3!}C^3 + \dots \tag{8}$$

式中: I 为单位阵。

如果 $C = A + B$ 且 A 与 B 不可交换, 则 $\exp(tC)$ 的值可以用辛积分传播子来逼近

$$\exp(tC) = \prod_{p=1}^m \exp(d_p tB) \exp(c_p tA) + o(t^{n+1}) \tag{9}$$

式中: c_p 和 d_p 是表征传播子的实系数; n 为逼近的阶数; m 为总的级数^[4]。

各向同性的无源媒质中电场波动方程为

$$\nabla^2 E = \mu \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{10}$$

式中: μ 与 ϵ 分别为介质的导磁率和介电常数; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 。

如果设 $E_s = \partial E/\partial t$ 为中间变量, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ \frac{1}{\mu} \nabla^2 E - E_s \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} E \\ E_s \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$W = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & I_3 \\ \frac{\nabla^2}{\mu} I_3 & -I_3 \end{pmatrix} = U + V \tag{12}$$

$$U = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & I_3 \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$V = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ \frac{1}{\mu} \nabla^2 & -I_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

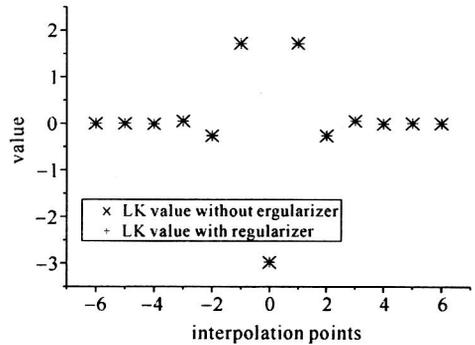


图 1 $M = 6$ 时未加窗的 L K 值与加窗的 L K 值的比较

由于 U 和 V 不可交换,应用 SIP 方法,得到

$$\exp(-tW) = \prod_{p=1}^m \exp(d_p tV) \exp(c_p tU) + o(t^{n+1}) \tag{15}$$

$$\exp(c_p tU) = I_6 + c_p tU \tag{16}$$

$$\exp(d_p tV) = \begin{pmatrix} I_3 & O_{3 \times 3} \\ \frac{1 - \exp(-\frac{d_p t}{\mu})}{\mu} \nabla^2 & \exp(-\frac{d_p t}{\mu}) I_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中的指数函数的值由文献[6]给出的帕德近似来计算

$$\exp(-q) \approx \frac{1}{1 + q + q^2/2}, \quad \frac{1 - \exp(-q)}{q} \approx \frac{1}{1 + q/2 + q^2/12} \tag{18}$$

对于 4 阶精度的 SIP 方法, $m=5$ 。 $c_1, \dots, c_5, d_1, \dots, d_5$ 的值同上。

2 新方法数值算例

无源无耗、各向同性的媒质中电场波动方程为式(10)。

对于规则导波系统,横向场分量与纵向分量通常可以分离开。在直角坐标系下,当 z 方向为纵向时,纵向场分量可以写成

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y) e^{-jz} \tag{19}$$

式中: β 为相位常数。以纵向电场为例,使用空域 $2M$ 阶 DSC 和时域 4 阶 SIP 方法,由式(3)、式(4)、式(11)~(17),对均匀网格,在 $n + r/5$ 时刻, (i, j) 点处,纵向电场

$$E_z^{n+r/5}(i, j) = E_z^{n+(r-1)/5}(i, j) + c_r t E_{z,t}^{n+(r-1)/5}(i, j) \tag{20}$$

$$E_{z,t}^{n+r/5}(i, j) = p(i, j) E_z^{n+(r-1)/5}(i, j) + q(i, j) \left[\sum_{k=-M}^M {}^{(2)}(k-x) E_z^{n+r/5}(i+k, j) + \sum_{k=-M}^M {}^{(2)}(k-y) E_z^{n+r/5}(i, j+k) - 2 E_z^{n+r/5}(i, j) \right] \tag{21}$$

式中: $E_{z,t} = \partial E_z / \partial t$, c_r 和 d_r 是表征第 r 级辛积分传播子的实系数, r 取 1, 2, 3, 4, 5;

$$p(i, j) = \frac{1}{1 + (i, j) d_r t / (i, j) + [(i, j) d_r t / (i, j)]^2 / 2},$$

$$q(i, j) = \frac{d_r t}{\mu (i, j) 1 + [(i, j) d_r t / (i, j)] / 2 + [(i, j) d_r t / (i, j)]^2 / 12}.$$

式(20)、式(21)即为本文提出的基于波动方程的 $(2M, 4)$ 阶 FDTD 的基础。该算法在进行循环迭代计算时,只需同时计算 E_z 和 $E_{z,t}$ 的值,而使用基于 Yee 网格的高阶 FDTD 时,在 2 维 TE 或 TM 问题时,需要进行 3 个分量的循环迭代运算。由于涉及到的场量更少,本文的方法比基于 Yee 方法的 FDTD 节约内存并减少计算量。

由于在空间上采用 $2M$ 阶 DSC 方法来近似内部区域某一点的二阶偏导数,因而在计算时会使用计算区域外的场值。这时需要对边界进行拓展。对于理想电壁,电场的切向分量和磁场的法向分量关于边界奇对称,而电场的法向分量和磁场的切向分量是关于边界偶对称的。对于理想磁壁,法向电场和切向磁场关于边界奇对称,而切向电场和法向磁场关于边界偶对称^[6-7]。

本文以导波系统为例讨论该算法的特性。

首先通过纵向电场的时域解来分析本文算法的精度。考虑一个矩形波导,填充物为空气,如图 2 所示,其截面尺寸为 $0.01 \text{ m} \times 0.01 \text{ m}$ 。将该区域均匀分为 50×50 的均匀网格,激励频率为 21.2 GHz ,工作模式为 TM_{11} ,相位常数 $\beta = 10$, M 为计算带宽, t 取为 $0.000 01 / c_0$ 。图 2 给出了不同的 M 时误差随时间的变化情况,该误差是每一时刻的数值解与解析解的级差,定义为

$$e = \max_{i,j} | E_{an}(i, j) - E_{nu}(i, j) | \tag{22}$$

式中: U 为计算的区域。在图 2 中也可以找出最大误差与计算带宽 M 之间的关系。当 M 在 1~5 之间时,计算的误差随 M 的增大而显著地减小, M 每增大 1,误差减小约 60 dB。该结果与(5)式吻合得较好;当 M 增至 6 时,最大误差稳定在同一个数量级上。

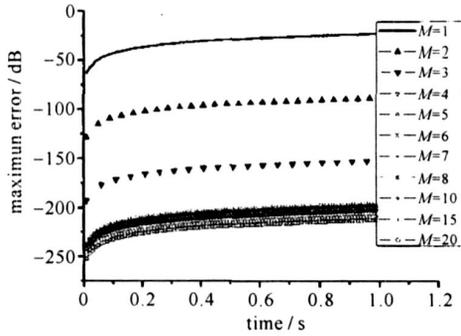


Fig. 2 Maximum error vs time with different band width

图 2 不同带宽时最大误差随时间的变化情况

表 1 不同网格时标准 FDTD 的误差与 CPU 计算时间
Table 1 Maximum error of standard FDTD and its CPU computational time with different mesh size

meshes	maximum error/ dB	computational time/ s
25 ×25	- 10. 814	28
50 ×50	- 22. 826	98
100 ×100	- 34. 997	385

表 1 和表 2 给出了基于波动方程的 (2, 2) 阶精度传统 FDTD 和本文提出的 (2M, 4) 阶精度 FDTD 在误差和占用 CPU 时间的比较, 计算时间为 1 s (归一化)。简要比较可以看出, 当网格数相同时, 以 50 ×50 为例, 随着 M 的增加, (2M, 4) 阶精度的 FDTD 方法的计算精度有显著的提高, 当 M 增加至 5 时, 其误差比基于式 (19) 的 FDTD 小约 190 dB, 而 CPU 的计算时间增大较多。当计算的精度相当时, 以 - 10 dB 为例, (2, 2) 阶精度的 FDTD 需要 25 ×25 的网格, 占用 CPU 时间 28 s; 而 (2M, 4) 阶精度 FDTD 需要的网格数仅为 5 ×5, 计算带宽为 2, CPU 计算时间仅为 7 s。当占用 CPU 的时间相当时, 以 380 s 为例, 传统 FDTD 误差为 - 34. 997 dB; 而 (2M, 4) 阶精度 FDTD 误差仅为 - 202. 500 dB。

另一方面, 本文的方法与基于 Yee 方法的 (2M, 4) 阶精度 FDTD 相比有着相当的精度。Yee 方法的结果参见文献 [6], 但是本文的方法节约内存和计算量。为了比较此二者计算时消耗资源的情况, 分别取 50 ×50 和 100 ×100 的网格计算, M 取为 5, 二者消耗计算资源比较的结果如图 3 所示。定义比例因子为

$$R = C_{W-E} / C_{Yee} \tag{23}$$

式中: C_{W-E} 和 C_{Yee} 分别表示基于波动方程的 (2M, 4) 阶精度 FDTD 和基于 Yee 方法的 (2M, 4) 阶精度 FDTD 各自消耗的内存或 CPU 计算时间。由图 3 可知, 本文的方法消耗的内存约为 Yee 方法的 90%, 而占用的 CPU 时间仅为 50%。

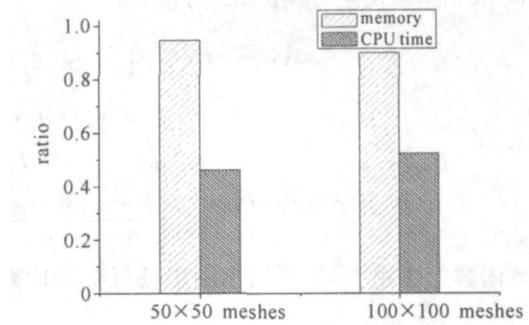


Fig. 3 Comparison of computational consumption between wave-equation based (2M, 4) scheme FDTD and Yee scheme based FDTD

图 3 Yee 方法的与波动方程的 (2M, 4) 阶 FDTD 消耗计算资源的比较

表 2 不同网格时 (2M, 4) 精度的 FDTD 的误差与 CPU 计算时间
Table 2 Maximum error of (2M, 4) scheme FDTD and its CPU computational time with different mesh size

meshes	band width/ M	maximum error/ dB	computational time/ s
5 ×5	2	- 9. 574	7
6 ×6	2	- 14. 910	9
7 ×7	2	- 20. 644	10
10 ×10	2	- 32. 513	16
25 ×25	2	- 64. 319	71
50 ×50	2	- 88. 358	261
50 ×50	3	- 152. 300	315
50 ×50	4	- 202. 500	380
50 ×50	5	- 212. 469	433

表 3 脊波导的前 4 个 TM 模式的截止波数 (rad/mm)

Table 3 First 4 cutoff wavenumbers of ridged waveguide (rad/mm)

model	cutoff wavenumber	
	our results	Ref [8]
1	0. 471 2	0. 471 1
2	0. 740 6	0. 741 0
3	0. 748 5	0. 748 1
4	0. 940 1	0. 942 2

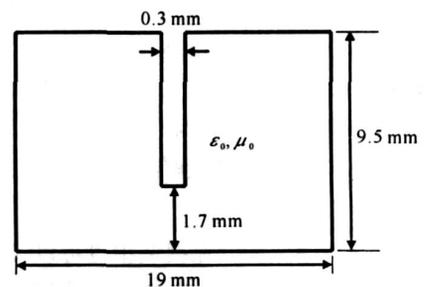


Fig. 4 Cross section of ridged waveguide

图 4 金属脊波导的横截面示意图

综上可得,基于波动方程的 $(2M, 4)$ 阶精度 FDTD 有很高的精度特性,同时又比基于 Yee 方法的 $(2M, 4)$ 阶精度 FDTD 有着更高的计算效率。其次通过计算金属脊波导的截止波数证明本文提出的方法同样适用于不规则边界的导波系统。脊波导横截面如图 4 所示。文献[8]给出了它的前 4 个 TM 模式的截止波数,表 3 给出了本文方法的计算结果及文献[8]的结果。二者结果吻合得非常好,误差在 5%内。

3 结 论

本文提出了一种基于二阶波动方程的 $(2M, 4)$ 阶 FDTD 新方法,该方法在空域上使用基于 LK 的 DSC 方法达到 $2M$ 阶精度,在时域上使用 SIP 方法达到 4 阶精度。与基于 Yee 方法的 $(2M, 4)$ 阶精度 FDTD 相比,本文的方法可达到与之相当的精度,但占用的计算量约为 Yee 方法的 50%,内存消耗为 Yee 方法的 90%。随着网格数的增加,本文的方法将会节约更多的内存。在计算不规则边界的导波系统如脊波导时,本文的方法也同样适用。

参考文献:

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. *IEEE Trans Antennas and Propagat*, 1966, **14**(3):302-307.
- [2] Aoyagi P H, Lee J F, Mittra R. A hybrid Yee algorithm/ scalar-wave equation approach[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1993, **41**(9):1593-1600.
- [3] Turkel E, Yefet A. Fourth order method for Maxwell's equations on a staggered mesh[J]. *IEEE Trans Antennas and Propagat*, 1997, **4**:2156-2159.
- [4] Hirono T, Lui W, et al. A three-dimensional fourth-order finite-difference time domain scheme using a symplectic integrator propagator[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 2001, **49**(9):1640-1648.
- [5] Hirono T, Lui W W, Seki S. Successful application of PML-ABC to the symplectic FDTD scheme with 4th-order accuracy in time and space [J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1999, **3**:1293-1296.
- [6] Shao Z H, Shen Z X. A generalized higher order finite-difference time-domain method and its application in guided-wave problems[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 2003, **51**(3):856-861.
- [7] Shao Z H, Wei G W, Zhao S. DSC time-domain solution of Maxwell's equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **189**:427-453.
- [8] Amari S, Bornemann J. Application of a coupled-integral-equations technique to ridged waveguides[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1996, **44**(9):2256-2264.
- [9] 张恒伟,冯恩信,张亦希,等. 建筑墙体对电磁脉冲响应的 FDTD 分析[J]. 强激光与粒子束, 2007, **19**(3):443-448. (Zhang H W, Feng E X, Zhang Y X, et al. Response of electromagnetic pulse penetrating through building walls. *High Power Laser and Particle Beams*, 2007, **19**(3):443-448)

A new high order FDTD method based on wave equations

WANG Shuo¹, SHAO Zhen-hai², WEN Guang-jun¹, LI Shi-gui³, XIE Kang⁴

(1. School of Communication and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;

2. Micro Design Technology Pte Ltd, Singapore 117674, Singapore;

3. Department of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 400042, China;

4. Key Laboratory of Broadband Optical Fiber Transmission and Communication Networks of Ministry of Education, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: A $(2M, 4)$ scheme of the high-order finite-difference time-domain (FDTD) method based on the second order wave equation is proposed. This scheme is of the fourth order accuracy in time domain using the symplectic integrator propagator (SIP), and is of the $2M$ th order accuracy in space domain using the discrete singular convolution (DSC) method. This scheme is similar to the traditional $(2M, 4)$ scheme where SIP and DSC method is used and the distinction between them are listed as follows. Firstly, this new scheme is based on the wave equation. Secondly, computational region is discretized by uniform mesh rather than Yee mesh. Thirdly, the new scheme can save more memory and computation time because only one field component is used for calculation. Numerical examples show that when compared with traditional high order FDTD method, the new high order scheme based on wave equation involves less computation and memory.

Key words: Finite-difference time-domain methods; Wave equation; Discrete singular convolution; Lagrange polynomial; Symplectic integrator propagator