

实现近似直线轨迹的 λ 形机构综合方法

钱卫香 韩建友

【摘要】 采用解析法对实现近似直线轨迹的 λ 形机构进行综合,建立了通用数学模型,并给出方程中关键参数的求解方法。通过改变独立设计变量,可得到无限多的设计方案,但很难从中选取满意的机构。为避免机构综合过程中设计参数选取的盲目性,利用数值计算方法和图形技术将独立设计变量的可取值域绘制成三维图像。对于综合得到的一系列可行机构的直线近似度、最大杆长、机构类型等性能参数进行了比较和分析,据此设计者可以很容易选取综合性能优越的机构。综合示例和性能分析结果验证了模型与方法的正确性和可行性。

关键词: 直线 四杆机构 综合 性能分析

中图分类号: TH113.2⁺2

文献标识码: A

Synthesis Method of λ -formed Linkages Approximating a Straight Line

Qian Weixiang Han Jianyou

(University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract

A λ -formed four-bar linkage to realize approximate straight tract was designed by using analytic method. A general synthesis model was established, and some key parameters in the equations were solved. By varying the design parameters, an infinite number of possible mechanical solutions can be represented, from which it is difficult for designers to select a satisfactory solution. To avoid aimlessness in choosing design parameters, the variable feasible areas could be computed and displayed with 3-D graph by applying numerical method and graphics technology. The property parameters, such as straight-line deviate tolerance, maximal link-length, mechanism type, have been compared and analyzed. The results of synthesis examples and property analysis verified the correctness and effectiveness of the proposed formulas and method.

Key words Straight-line, Four-bar linkage, Synthesis, Property analysis

引言

关于实现近似直线轨迹的连杆机构综合问题,国内外学者已进行了大量研究,但对于有限分离与无限接近混合的 λ 形近似直线机构(在初始的直线点,两连架杆平行,连杆处于瞬时平动位置,此时外形似“ λ ”,故称 λ 形机构^[1])的综合问题公开发表的文献很少。 λ 形机构生成的连杆曲线可以是对称曲线,也可以是一般曲线。设计要求中的3个分离点可以是等距的($L_{P_1P_2} = L_{P_2P_3}$),也可以是非等距的($L_{P_1P_2} \neq L_{P_2P_3}$)。以往文献如文献[1~2]分别用

几何法和解析法讨论了对称连杆曲线 λ 形机构在分离点等距时的综合方法,文献[3]尝试推导分离点等距时一般曲线 λ 形机构综合公式,而对于非等距非对称连杆曲线 λ 形机构综合方法过去均未提及。另外对综合过程中涉及到的一些关键问题缺乏系统研究,尚未形成完整的理论体系,如设计变量取值范围,对于解析法得到的无限多近似直线机构中哪些机构直线度好、是否满足机构杆长及类型要求、连杆曲线轮廓以及机构优选等问题都是设计者在综合过程中必须考虑的。

为此本文在对各种情况综合考虑的基础上,给

收稿日期: 2007-05-21

钱卫香 北京科技大学机械工程学院 讲师 博士生, 100083 北京市

韩建友 北京科技大学机械工程学院 教授 博士生导师

出λ形机构的通用综合公式,同时绘制设计参数空间三维可行域和机构性能分析曲线,使设计者能够在可行域内有针对性地选取性能优越的λ形机构。

1 通用综合公式的推导

设计条件:已知给定直线上3个有限分离位置点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 和 $P_3(x_3, y_3)$,要求设计λ形机构,使连杆上的点 P 依次通过以上分离点,且在起点 P_1 和终点 P_3 处速度方向相同,都在给定直线方向上。

1.1 建立数学模型

综合机构待求的量为两连架杆的定铰点 $A_0(x_0, y_0)$ (称为圆心)和动铰点 $A_c(x_c, y_c)$ (称为圆点)。建立如图1所示直角坐标系。在初始的直线点 P_1 ,使机构两连架杆平行($A_0A_c // B_0B_c$)且垂直于给定的直线方向, $x_0 = x_c$,从而保证了 P_1 点的速度要求。列出经过3个分离点的2个方程和 P_3 点时的无限接近位置方程。

$$A_{j1}(x_0^2 + y_0 y_c) + A_{j2}(y_0 - y_c)x_0 + (A_{j3} + A_{j5})x_0 + A_{j6}y_c + A_{j7} = 0 \quad (j = 2, 3, 4) \quad (1)$$

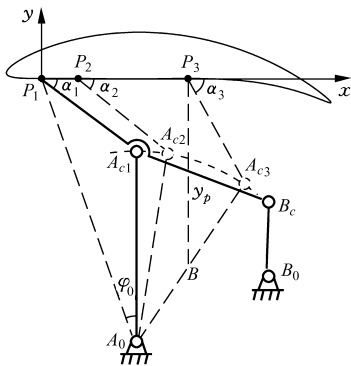


图1 机构综合坐标系

Fig.1 Coordinate system to deduce synthesis formulas

设 (x_{01}, y_{01}, y_{c1}) 是方程组的一组解,解方程式(1)得到另外2个圆心点的 x 坐标

$$x_{02,3} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad (2)$$

相应的 y_0 和 y_c 表达式为

$$\begin{cases} y_0 = \frac{Sx_0^2 + Tx_0 + U}{Rx_0} \\ y_c = \frac{Sx_0 + V}{R} \end{cases} \quad (3)$$

式(1)~(3)中各系数的表达式及具体的求解过程参看文献[2~3]。解方程将得到3组圆心、圆点,两两组合后构成一组3个机构。

1.2 关键参数的确定

求解综合式(1)时涉及到 θ_{12} 、 θ_{13} 、 $\dot{\theta}_{13}$ 、 \dot{x}_3 、 \dot{y}_3 的

求解,其中 $\theta_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$, $\theta_{13} = \alpha_3 - \alpha_1$,而由设计条件, $\dot{y}_3 = 0$, $\dot{\theta}_{13}$ 取任意不为零的值,因此只要求用 x_{01} 、 y_{01} 、 y_{c1} 表示的 θ_{12} 、 θ_{13} 和 \dot{x}_3 的数学表达式即可。位置转角 α_1 、 α_2 、 α_3 及第三点时的速度瞬心纵坐标 y_p 的求解是问题的关键所在。

(1) 位置转角 α_1 、 α_2 、 α_3 的求解

为避免角度变换的麻烦,可采用C++类库中提供的函数,即 $\alpha_1 = \text{atan2}(y_{c1}, x_{01})$,该函数直接返回一个 $[-\pi, \pi]$ 之间的角度。

求解 α_2 首先要确定与 P_2 点对应的动铰点位置 A_{c2} , A_{c2} 是以 P_2 点为圆心、以 P_1A_{c1} 为半径的圆和以 A_0 点为圆心、以 A_0A_{c1} 为半径的圆的两交点之一。选取哪个交点要看 PA_c 是否在连架杆 A_0A_c 的同一侧,取同一侧交点时连杆曲线直线性能好。这样 α_2 即可确定, $\alpha_2 = \text{atan2}(y_{Ac2}, x_{Ac2})$ 。

用同样方法求解 α_3 ,相应地可得到连杆相对其第一位置的转角 $\theta_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$, $\theta_{13} = \alpha_3 - \alpha_1$ 。

(2) 第3点时速度瞬心纵坐标 y_p 的求解

在图1的坐标系中,第3位置的速度瞬心是过 P_3 点 x 轴的垂线与 A_0A_{c3} 延长线的交点 B ,其位置坐标为 $B(x_3, y_p)$ 。 A_{c3} 点在求解 α_3 时已经确定,位置坐标为 $A_{c3}(x_d, y_d)$ 。

则直线 A_0A_{c3} 的方程为

$$y = \frac{y_d - y_{01}}{x_d - x_{01}} x + \frac{y_{01}x_d - y_dx_{01}}{x_d - x_{01}} \quad (4)$$

将 B 点的横坐标 x_3 代入式(4)得

$$y_p = \frac{y_d - y_{01}}{x_d - x_{01}} x_3 + \frac{y_{01}x_d - y_dx_{01}}{x_d - x_{01}} \quad (5)$$

因 \dot{x}_3 是 P_3 点的位移速度,则 $\dot{x}_3 = \dot{\theta}_{13}y_p$ 。

2 可行域分析

在机构综合过程中,独立设计变量 x_{01} 、 y_{01} 和 y_{c1} 的取值要以不违反设计条件为前提,同时保证方程式(1)有解。经分析,设计变量要满足以下约束条件。

约束条件1:设计要求连杆平面上的点要能够通过给定的3个重要分离点 P_1 、 P_2 、 P_3 。通过 P_2 时的约束方程为

$$|y_{c1} - y_{01}| + \sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \geq \sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2} \quad (6)$$

$$||y_{c1} - y_{01}| - \sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2}| \leq \sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2} \quad (7)$$

通过 P_3 时的约束方程为

$$|y_{c1} - y_{01}| + \sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \geq \sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2} \quad (8)$$

$$|y_{c1} - y_{01}| - \sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \leq \sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2} \quad (9)$$

约束条件 2: 在满足设计约束的有效区间内求解方程式(2)时,有

$$b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0 \quad (10)$$

式中, a_1, b_1, c_1 是设计变量 x_{01}, y_{01} 和 y_{c1} 的函数^[2]。联立式(6)~(10)构成不等式方程组,并将各方程统一为 $f_i(x_{01}, y_{01}, y_{c1}) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, 5)$ 的形式。

为直观反映独立设计变量取值范围,本文用 OpenGL 编程绘制其空间可行域。算法基本思想是不等式方程组中每一个方程都可以确定一个空间区域,关于 x_{01}, y_{01} 和 y_{c1} 的空间可行域是由上述 5 个不等式方程所构成空间区域的交集。首先令 x_{01}, y_{01} 和 y_{c1} 中有任意 2 个变量(如 x_{01}, y_{01})取定值,则 $f_i(x_{01}, y_{01}, y_{c1}) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, 5)$ 为一元方程;然后采用离散 Newton 迭代法解方程 $f_i \geq 0$, 计算第 3 个变量(y_{c1})的可行区段集合(需要先分别计算 5 个不等式方程确定的可行区段集合,集合由若干个满足不等式方程的可行区段组成,之后将 5 个可行区段集合取交集构成第 3 个变量最终的可行区段集合)。当 x_{01} 和 y_{01} 按一定间隔不断离散取值时,这些可行区段集合形成一个立体的可行域。算法流程图如图 2 所示。需要指出的是,因为牛顿迭代法存在收敛性问题,因此可以设定一个最大迭代次数限制,如果计算过程中迭代次数超过此限值,则认为计算不成功,改用收敛速度较慢,但不存在收敛性问题的对分区间法重新计算。

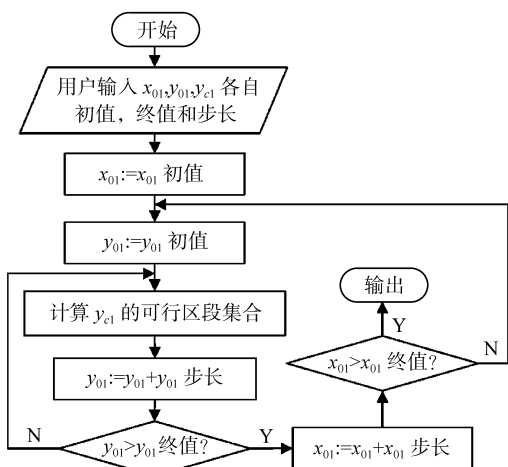


图 2 计算空间可行域算法流程图

Fig. 2 Diagram of spatial feasible areas algorithm

图 3a 所示空间实体为设计条件为 $P_1(0, 0), P_2(10, 0), P_3(40, 0)$ 满足上述两约束的设计变量三维可行域 $(-100 \leq x_{01}, y_{01}, y_{c1} \leq 100)$ 。当 x_{01}, y_{01} 和 y_{c1} 中有一个变量为已知时,变量可行域为二

维剖面图(如图 3b, $y_{01} = -30$)。

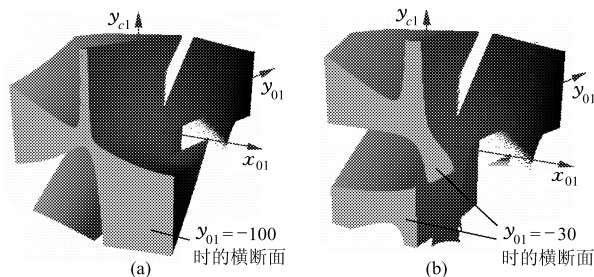


图 3 设计变量可行域

Fig. 3 Feasible areas of design parameters
(a) 空间可行域 (b) $y_{01} = -30$ 时的横断面

3 综合示例

设 $P_1(0, 0), P_2(10, 0), P_3(40, 0)$ 。

(1) 当 $y_{c1} = -5$ 时,按上述方法计算其余设计参数 x_{01}, y_{01} 的平面可行域(如图 4a 阴影区域),其中深色区域表示 A_0 点在此区域取值最多只能得到一个满足最大杆长要求的机构。在可行域内任意选定一点 $A_0(x_{01}, y_{01})$ 后可得到一组 3 个机构,如当 $x_{01} = 30, y_{01} = -23$ 时,与曲线 1 对应的机构为 $A_0A_cB_{01}B_{c1}P_1$,与曲线 2、3 对应的机构分别为 $A_0A_cB_{02}B_{c2}P_1$ 和 $B_{01}B_{c1}B_{02}B_{c2}P_1$ 。

(2) 当 $y_{01} = 30$ 时,机构参数可行域如图 4b 阴影区域。可行域内选定一点 $A_c(x_{01}, y_{c1})$ 如 $x_{01} = -15, y_{c1} = -25$ 时综合所得机构如图 4b 所示。

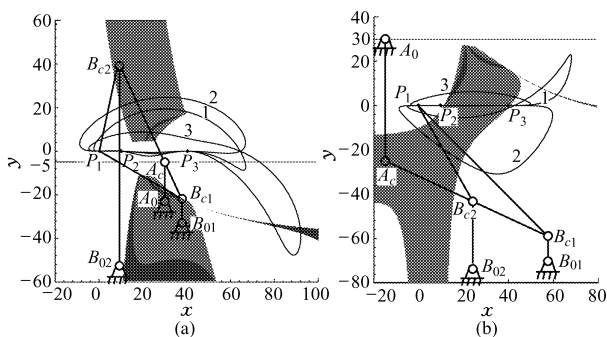


图 4 机构综合示例

Fig. 4 Synthesis examples
(a) $y_{c1} = -5$ (b) $y_{01} = -30$

4 机构性能分析

在实际机构设计中,设计者除了要考虑综合机构连杆曲线直线近似度,综合机构最大杆长、机构类型、连杆曲线轮廓等性能参数也要兼顾。为阐述方便,首先对与机构性能有关的一些参数进行定义。

以图 5 所示非对称连杆曲线为例,直线最大距离差 Δh 指连杆曲线上 P_1 点和 P_3 点之间与理想直线偏离最大的点 E 的纵向距离。找出 E 点关于 x 轴的对称点 E' ,分别过 E 点、 E' 点作平行于 x 轴的

直线 l 和 l' , 直线 l 与其对称线 l' 所夹阴影区域连杆曲线的最大长度 $|F_1F_2|$ 即为近似直线长度, 用 L 表示。定义直线近似度 $D = \frac{\Delta h}{L}$, 表示与理想直线的近似程度, D 值越小直线度越好。连杆曲线宽度和高度分别用 L_a 和 L_b 表示, 综合机构最大杆长用

L_{\max} 表示。

当 3 个独立设计变量中有 2 个变量给定 (如 $y_{c1} = -10, x_{o1} = 22$) 时, 改变第 3 个变量 (y_{o1}) 将得到一系列性能不同的 λ 形近似直线机构。通过图 6 所示性能曲线 (其中横坐标为 y_{o1} 或 φ_0 , $\varphi_0 = \arctan(x_{o1}/y_{o1}$), 当 x_{o1} 一定时, φ_0 与 y_{o1} 一一对应) 可得出以下结论:

(1) 由直线近似度 $\frac{\Delta h}{L} - \varphi_0(y_{o1})$ 曲线 (图 6a) 可知, 机构 2 连杆曲线直线近似度在整个取值范围内都要好于机构 1 和机构 3。

(2) 由高度 $L_b - \varphi_0(y_{o1})$ 曲线 (图 6b) 可分析出机构在取值范围内类型的变化情况 (表 1)。

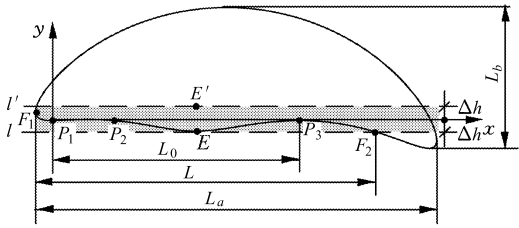
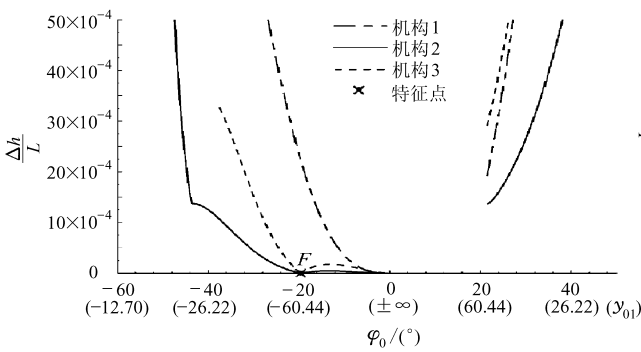
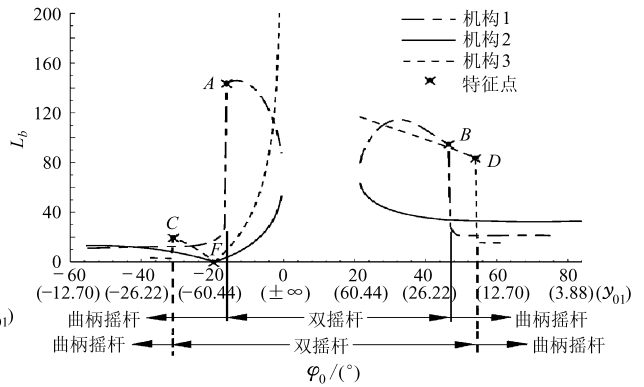


图 5 连杆曲线性能参数

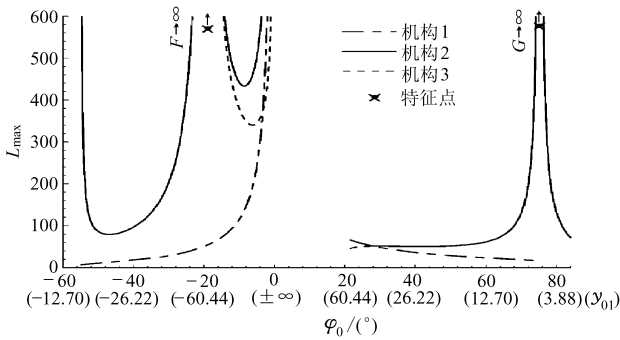
Fig. 5 Property parameters of the coupler curve



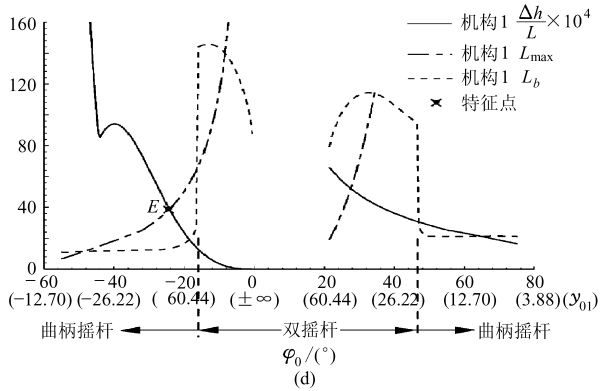
(a)



(b)



(c)



(d)

图 6 机构性能分析图

Fig. 6 Analysis graphs of mechanism property

(a) $\Delta h/L - \varphi_0(y_{o1})$ (b) $L_b - \varphi_0(y_{o1})$ (c) $L_{\max} - \varphi_0(y_{o1})$ (d) 机构 1 性能曲线

表 1 机构类型变化情况

Tab. 1 Mechanism type

机构 1	-55.190°(-15.296)→ 点 A: -16.084°(-76.301) 曲柄摇杆机构	点 A: -16.084°(-76.301)→-0°(-∞)∪ 21.199°(56.722)→点 B: 46.949°(20.552) 双摇杆机构	点 B: 46.949°(20.552)→ 75.304°(5.770) 曲柄摇杆机构
机构 2	双摇杆机构(无类型转变)		
机构 3	-37.618°(-29.018)→ 点 C: -31.004°(-36.608) 曲柄摇杆机构	点 C: -31.004°(-36.608)→-0°(-∞)∪ 21.199°(56.722)→点 D: 54.463°(15.714) 双摇杆机构	点 D: 54.463°(15.714)→ 61.691°(11.850) 曲柄摇杆机构

注:表中数值为 φ_0 和 y_{o1} , 其中括号内为 y_{o1} 值

(3) 结合最大杆长 $L_{\max} - \varphi_0(y_{01})$ 曲线(图 6c) 和直线近似度曲线可知, 在特征点 $F(y_{01} = -62.32), y_{02} = \infty$, 机构 2、3 最大杆长趋向无穷, 直线近似度为零, 两机构由双摇杆机构演化为摇杆滑块机构; 在特征点 $G(y_{01} = 5.77), y_{c2} = \infty$, 机构 2 中出现杆长为无穷大构件, 直线近似度也很大, 在此点附近不可用。

(4) 通过分析直线近似度曲线、最大杆长曲线和高度曲线(图 6d)可知, 当综合考虑直线近似度、最大杆长和曲柄存在条件时, 在特征点 E (机构 1 $y_{01} = -50.19$)附近是可取的。

5 结束语

采用解析法建立了实现近似直线轨迹 λ 形机

构综合的通用数学模型。通过改变独立设计变量 x_{01}, y_{01} 和 y_{c1} , 可得到无限多的设计方案, 为避免机构综合过程中设计参数选取的盲目性, 利用数值计算方法确定了模型求解过程中涉及到的 3 个独立设计变量的取值范围, 运用 OpenGL 编程绘制机构参数空间可行域。对于综合得到的一系列可行机构的性能参数进行了比较和分析, 据此设计者很容易选取满意的机构。同时给出综合示例和性能分析结果验证了模型、方法的正确性和可行性。

参 考 文 献

- 1 Dijkman E A, Smails A T J M. λ -formed 4-bar linkages set in a translation-position to design mechanisms approximating a straight line[J]. Mech. Mach. Theory, 1996, 31(8): 1 033~1 041.
- 2 韩建友, 赵慧设. λ 型铰链四杆近似直线机构综合解析法[J]. 北京科技大学学报, 1999, 21(1): 72~74.
Han Jianyou, Zhao Huishe. Analysis method of synthesis of λ -formed 4-bar linkages approximating a straight line[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 1999, 21(1): 72~74. (in Chinese)
- 3 刘卫东, 韩建友. 一种直线四杆机构综合方法[J]. 北京科技大学学报, 2003, 25(3): 270~272.
Liu Weidong, Han Jianyou. Synthesis method of one kind of four-bar straight-line linkage[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2003, 25(3): 270~272. (in Chinese)
- 4 Dijkman E A, Smails A T J M. How to exchange centric inverted slider cranks with λ -formed 4-bar linkages[J]. Mech. Mach. Theory, 2000, 35: 305~327.
- 5 韩建友. 高等机构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- 6 吴鑫, 宋磊, 邓瑞涛. 基于网络的平面连杆机构函数综合优化设计[J]. 农业机械学报, 2005, 36(2): 108~111.
Wu Xin, Song Lei, Deng Ruitao. Web-based optimization for function synthesis of planar linkage[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2005, 36(2): 108~111. (in Chinese)
- 7 刘国光. 基于改进蚁群算法的四杆机构优化设计[J]. 农业机械学报, 2006, 37(1): 149~151.
Liu Guoguang. Optimization design of four bar mechanism based on the improved ant colony algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(1): 149~151. (in Chinese)

(上接第 149 页)

- 4 金施群, 丁晓牧, 费业泰, 等. 大轴直径的高精度多滚轮法测量[J]. 应用科学学报, 2005, 23(2): 200~203.
Jin Shiqun, Ding Xiaomu, Fei Yetai, et al. The precision measurement for large diameters based on multi-roller method[J]. Journal of Applied Sciences, 2005, 23(2): 200~203. (in Chinese)
- 5 史庆伟, 张国雄, 李真. 新型滚轮法大直径测量研究[J]. 现代仪器, 2005, 11(5): 46~48, 59.
Shi Qingwei, Zhang Guoxiong, Li Zhen. Study on new-type measurement of large diameter with roller method[J]. Modern Instruments, 2005, 11(5): 46~48, 59. (in Chinese)
- 6 郑洪, 施青松. 激光瞄准大轴与半径测量方法的研究与应用[J]. 光电工程, 2002, 29(4): 28~31.
Zheng Hong, Shi Qingsong. Study and application of a big axis measuring method with laser collimation[J]. Opto-electronic Engineering, 2002, 29(4): 28~31. (in Chinese)