

考虑关节耗散的平面两自由度五杆机构动力学建模^{*}

李仁军 刘宏昭 李鹏飞

【摘要】 将摩擦力视为外部非保守力,提出了包含耗散函数的 Appell 方程。应用运动影响系数法进行机构的运动学分析;构建了机构系统的路里叶耗散函数,推导出广义耗散力。建立了包含耗散函数的平面闭链五杆机构的动力学模型,并提出了解算方法。逆动力学计算结果验证了动力学模型的正确性,仿真结果表明关节摩擦对机构运动的影响显著。

关键词: 闭链五杆机构 关节摩擦 耗散函数 广义耗散力 运动影响系数

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A

Dynamics Modeling of 2DOF Five-bar Mechanism in Considering Dissipation of Joint

Li Renjun Liu Hongzhao Li Pengfei

(Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract

The friction was disposed as an external non-inertia force, and a mended Appell equation including the friction of system was put forward. The kinematic characteristics of a planar closed-loop five-bar mechanism were analyzed by using the method of kinematic influence coefficient. The dissipation function of the mechanism system was proposed, then the generalized dissipation forces were deduced. The dynamics model of the mechanism which included the joint friction was proposed by means of the mended equation. And arithmetic was presented to solve these equations. The results of inverse dynamics testified the correction of the model. The outcomes of simulation indicated that joint friction has obvious influence on motion parameters of the mechanism.

Key words Closed-loop five-bar mechanism, Joint friction, Dissipation function, Generalized dissipation force, Kinematic influence coefficient

引言

具有 2 个自由度的平面闭链五杆机构是一种典型的并联机构,不但具有刚性好、累积误差小的优点,且具有一定的运动柔性,因而受到国内外研究者的广泛关注,成为机构学研究的热点。近年来,以该类机构为基础取得了许多研究成果^[1~4],但目前有关该机构动力学建模的文献中,很少考虑关节摩擦因素的影响。实际上,在机构运动过程中,关节摩擦

总是存在的,并且其对机构的运动有显著影响。有研究表明大约 20% 的能量消耗在克服机械手的关节摩擦阻力上^[5]。还有研究表明采用适当的控制方法进行补偿可改善摩擦的影响^[6~7]。在对机构进行动力学建模时考虑关节摩擦是为了最大程度地减少摩擦所带来的不利影响,提高机构的动力学性能和运行精度,具有重要的理论与实际意义。

将摩擦视为外部非保守力,提出包含耗散函数的 Appell 方程。建立机构关节摩擦的数学模型,将

收稿日期: 2008-05-16

^{*} 国家自然科学基金资助项目(项目编号:50575180)和西安理工大学优秀博士基金资助项目(项目编号:207-210001)

李仁军 西安理工大学机械与精密仪器工程学院 博士生, 710048 西安市

刘宏昭 西安理工大学机械与精密仪器工程学院 教授 博士生导师

李鹏飞 西安理工大学机械与精密仪器工程学院 副教授

关节接触面间的作用力转换为理想约束力与摩擦力矩。构建机构系统的路里叶耗散函数,推导广义耗散力。应用运动影响系数法进行机构的运动学分析,建立包含耗散函数的平面闭链五杆机构的动力学模型,并提出解算方法。

1 包含耗散函数的 Appell 方程

1.1 Appell 方程简介

现有的各种动力学的建模方法,如拉格朗日法、Appell 方法、牛顿-欧拉法和 Kane 方法等在本质上是等价的,只是形式不同,因而侧重点和应用领域有所不同^[8]。Appell 方程可描述为:系统的加速度能 S 对准加速度 $\ddot{\theta}_m$ 的一阶偏导数等于作用于系统上相应于准坐标的广义力 $(Q_m + Q_{Um})$,其表达式为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_m} = Q_m + Q_{Um} \quad (m=1,2,\dots,l) \quad (1)$$

式中 m ——第 m 个广义坐标

l ——系统的自由度

Q_m ——非有势力的广义力

Q_{Um} ——有势力的广义力

1.2 考虑摩擦的 Appell 方程

考虑系统中摩擦时,可将摩擦力视为外部非保守力,此时系统仍然满足 Appell 方程,其表达式为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_m} = Q_m + Q_{Um} + Q_{fm} \quad (m=1,2,\dots,l) \quad (2)$$

其中 $Q_{fm} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}_m}$

式中 Q_{fm} ——耗散函数对应的广义耗散力

Φ ——系统的耗散函数

2 考虑关节摩擦的机构动力学模型

以图 1 所示平面 5R 机构为对象。构件 1、2 为原动件,构件 0 为机架,已知工作阻力 M_3 和 F ,机构的结构参数 $(l_i, l_p, r_i, \alpha_i)$,各构件的质量 m_i 、绕各自质心的转动惯量 $J_{ci} (i=1,2,\dots,4)$,驱动力矩 (M_1, M_2) ,要求建立包含关节摩擦的动力学模型,进一步确定机构的运动参数。(注: r_i, α_i 分别为各

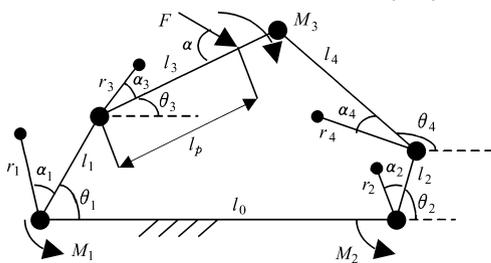


图 1 机构示意图

Fig. 1 Sketch of planar 5R mechanism

构件质心的偏距与偏角)

2.1 机构关节摩擦力矩

本文机构中各构件 $(i, j=0,1,\dots,4)$ 共组成 5 个关节,用 k 表示 $(k=1,\dots,5, ij=01$ 时 $k=1; ij=13$ 时 $k=2; ij=34$ 时 $k=3; ij=42$ 时 $k=4; ij=02$ 时 $k=5)$ 。关节 k 处的正压力记为 \bar{N}_k ,相对运动速度记为 $\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_j - \dot{\theta}_i$,则机构中各关节的摩擦力矩可表示为

$$M_{fk} = \bar{N}_k f(\dot{\theta}_k) r_k \quad (3)$$

式中 $f(\dot{\theta}_k)$ ——摩擦模型,表示摩擦因数与构件相对速度的关系

2.2 机构运动分析

选 $\theta_m (m=1,2)$ 为机构的准坐标,则相应地将 $\dot{\theta}_m, \ddot{\theta}_m$ 定义为准速度和准加速度。应用运动影响系数法进行运动分析。

2.2.1 求 θ_3, θ_4

由图 1 可得机构的几何约束方程

$$\begin{cases} l_1 \cos \theta_1 + l_3 \cos \theta_3 = l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos \theta_4 + l_0 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_3 \sin \theta_3 = l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)进行三角运算可得

$$\theta_3 = \arctan(A/C) - \beta$$

$$\theta_4 = \arctan((b + l_3 \sin \theta_3)/(a + l_3 \cos \theta_3))$$

其中

$$a = l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_0$$

$$b = l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2$$

$$A = l_4^2 - (a^2 + b^2 - l_3^2)$$

$$C = 2l_3 \sqrt{a^2 + b^2} \quad \beta = \arctan(a/b)$$

2.2.2 求 $\dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_4$

式(4)两端分别对 $\theta_m (m=1,2)$ 求一阶偏导数,进行代数运算可得

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} = -\frac{l_1 \sin(\theta_4 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad \frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} = -\frac{l_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} = -\frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{l_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad \frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} = -\frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

对以上各式分别对 θ_m 再求一次偏导数,则可得到 θ_3, θ_4 的二阶偏导数。

θ_1, θ_2 为系统的准速度,所以 θ_3 的一阶影响系数矩阵为

$$G_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

二阶影响系数矩阵为

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}$$

同理可得到 θ_4 相应的影响系数矩阵 \mathbf{G}_4 和 \mathbf{H}_4 , 构件 3 质心 (x_{c3}, y_{c3}) 构件 4 质心 (x_{c4}, y_{c4}) 和外力作用点 (x_p, y_p) 相应的影响系数矩阵 $\mathbf{G}_{xc3}, \mathbf{G}_{xc4}, \mathbf{G}_{yc3}, \mathbf{G}_{yc4}, \mathbf{H}_{xc3}, \mathbf{H}_{xc4}, \mathbf{H}_{yc3}, \mathbf{H}_{yc4}, \mathbf{G}_{xp}, \mathbf{G}_{yp}$

令 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2], \dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2], \ddot{\boldsymbol{\theta}} = [\ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2]$, 则有: $\dot{\boldsymbol{\theta}}_3 = \mathbf{G}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}_4 = \mathbf{G}_4 \dot{\boldsymbol{\theta}}^T, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{H}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}^T + \mathbf{G}_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T$, 同理可得 $\ddot{x}_{c3}, \ddot{y}_{c3}, \ddot{x}_{c4}, \ddot{y}_{c4}, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p$ 用影响系数矩阵表示的表达式。

3 包含机构关节摩擦的 Appell 方程

3.1 加速度能 S

系统各构件的加速度能表示为: $S_i (i = 1, \dots, 4)$ 。构件 1, 2 为定轴转动刚体, 构件 3, 4 为平面运动刚体, 所以

$$S_{1,2} = 0.5(J_{c1,2} + m_{1,2}r_{1,2}^2)(\dot{\theta}_{1,2}^2 + \dot{\theta}_{1,2}^4)$$

$$S_{3,4} = 0.5[m_{3,4}(\ddot{x}_{c3,4}^2 + \ddot{y}_{c3,4}^2) + J_{c3,4}\ddot{\theta}_{3,4}^2]$$

则系统的总加速度能为

$$S = \sum_{i=1}^4 S_i \quad (5)$$

3.2 广义耗散力 Q_{fm}

机构系统的耗散函数 Φ 为

$$\Phi = \sum_{k=1}^5 r_{ki} \bar{N}_k \int_0^{\dot{\theta}_k} f(u) du \quad (6)$$

则广义耗散力 Q_{fm} 可表示为

$$Q_{fm} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}_m} = -\sum_{k=1}^5 r_{ki} \bar{N}_k \frac{\partial \left(\int_0^{\dot{\theta}_k} f(u) du \right)}{\partial \dot{\theta}_m}$$

由微积分基本公式和机构运动分析可得

$$Q_{fm} = -\sum_{k=1}^5 r_{ki} \bar{N}_k f(\dot{\theta}_k) \frac{\partial \dot{\theta}_k}{\partial \dot{\theta}_m} \quad (7)$$

3.3 有势力的广义力 Q_{Um}

系统的势能 $U = \sum_{i=1}^4 m_i g y_{ci}$, 则

$$Q_{Um} = -\frac{\partial U}{\partial \theta_m} \quad (8)$$

3.4 除耗散力外非有势力的广义力 M_d

根据虚功原理可得

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} + M_3 \mathbf{G}_3^T + [\mathbf{G}_3^T \ \mathbf{G}_4^T] \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $F_x = F \cos(\alpha - \theta_3)$ $F_y = F \sin(\alpha - \theta_3)$

将式(5)~(9)代入式(2)并整理可得包含关节摩擦的五杆机构动力学方程为

$$\mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T + \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T = \boldsymbol{\tau} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_{c1} + m_1 r_1^2 & 0 \\ 0 & J_{c2} + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} +$

$$\begin{aligned} & m_3 \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xc3}(J_{c3} + 1) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{xc3}(J_{c3} + 1) \end{bmatrix} \mathbf{G}_{xc3} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{yc3}(J_{c3} + 1) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{yc3}(J_{c3} + 1) \end{bmatrix} \mathbf{G}_{yc3} \right\} + \\ & m_4 \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xc4}(J_{c4} + 1) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{xc4}(J_{c4} + 1) \end{bmatrix} \mathbf{G}_{xc4} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{yc4}(J_{c4} + 1) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{yc4}(J_{c4} + 1) \end{bmatrix} \mathbf{G}_{yc4} \right\} \\ \mathbf{P} = & m_3 \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{xc3} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{xc3} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{xc3} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{yc3} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{yc3} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{yc3} \right\} + \\ & m_4 \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{xc4} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{xc4} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{xc4} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{yc4} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{yc4} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{yc4} \right\} \\ \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{Q}_U + \mathbf{Q}_f + \mathbf{M}_d \end{aligned}$$

4 包含关节摩擦的机构动力学方程求解

由于式(10)右端包含关节的摩擦力矩, 而摩擦力矩由构件关节间的约束力所决定。因此要求解该动力学方程首先必须求各关节的约束反力, 进而求出各关节的摩擦力矩, 然后才可求解包含有关节摩擦力矩的动力学微分方程。本文解算考虑关节摩擦的动力学模型的方法如下:

步骤 1: 首先建立不含关节摩擦的机构正动力学模型, 并根据给定的机构结构参数、输入驱动和工作阻力和初始条件求解得出机构的运动参数。

步骤 2: 建立不含关节摩擦的机构逆动力学模型, 根据步骤 1 中得到的运动学参数求解各关节的约束力。

步骤 3: 建立包含关节摩擦的机构逆动力学模型, 将步骤 2 中求出的约束力作为初值 N^0 , 并根据给定的摩擦模型计算各关节的摩擦力矩, 将其作为常数代入该逆动力学模型中, 求解关节的约束力并与上一次求得的结果相比较, 若 $|N^i - N^{i-1}| < \epsilon$, 则停止迭代, 且 $N = N^i$, 否则 $N^{i+1} = N^i$, 继续下一步迭代。

步骤 4: 根据步骤 3 所求的关约束力 N 和给定的摩擦模型确定各关节的摩擦力矩, 代入含关节摩擦的动力学模型中, 采用数值法即可实现该动力学模型的求解。

5 仿真计算与结果分析

机构的结构参数为: $l_1 = 0.08 \text{ m}, l_2 = 0.05 \text{ m}, l_3 = 0.25 \text{ m}, l_4 = 0.25 \text{ m}, l_0 = 0.29 \text{ m}, l_p = 0.20 \text{ m}, r_1 = 0.05 \text{ m}, r_2 = 0.03 \text{ m}, r_3 = 0.20 \text{ m}, r_4 = 0.15 \text{ m}, r = 0.01 \text{ m}, \alpha = \pi/2, \alpha_i = 0$ 。

构件质量和绕各自质心的转动惯量为： $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 \text{ kg}$, $J_{c1} = J_{c2} = J_{c3} = J_{c4} = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ；
输入力矩和工作阻力为： $M_1 = 2 + 5\sin(8\pi t) \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_2 = 3 + 5\cos(\pi t) \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_3 = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$, $F_p = 50 \text{ N}$ 。

选用摩擦模型为。

$$f(\dot{\theta}_k) = 0.12\text{sign}(\dot{\theta}_k) + 0.02\dot{\theta}_k$$

应用本文所述的方法对考虑机构关节摩擦和不考虑机构关节摩擦 2 种情况进行计算比较, 仿真结果如图 2~6 所示。从图 2~4 中可看出关节摩擦力矩对机构的运动产生了很大影响, 各构件的角位移、角速度和角加速度与不计关节摩擦时相比均有较大差异, 由于累计误差的影响, 这种差异会越来越大,

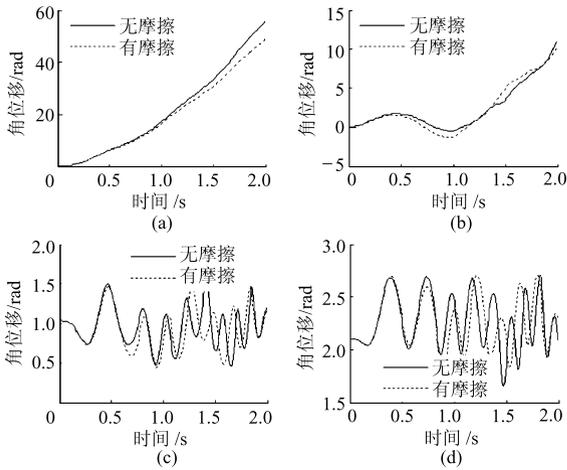


图 2 有、无摩擦时各构件角位移对比曲线

Fig. 2 Comparison on angular displacement of each bar between including joint friction and joint friction free
(a) 构件 1 (b) 构件 2 (c) 构件 3 (d) 构件 4

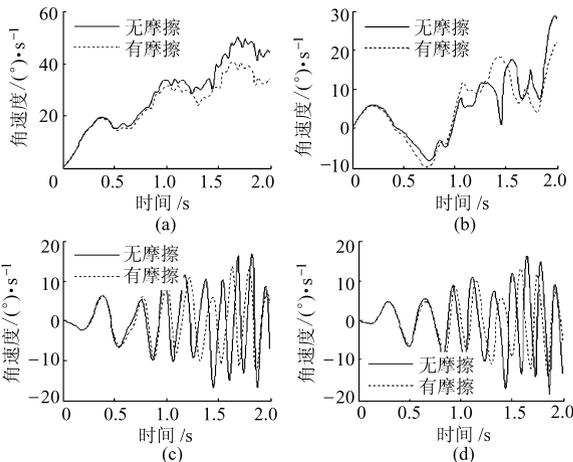


图 3 有、无摩擦时各构件角速度对比曲线

Fig. 3 Comparison on angular velocity of each bar between including joint friction and joint friction free
(a) 构件 1 (b) 构件 2 (c) 构件 3 (d) 构件 4

因此在实际应用中要考虑机构关节摩擦的补偿。图 5 为逆动力学计算结果, 从图可看出逆动力学计算平衡力矩与输入力矩基本吻合, 证明本文所建立的含关节摩擦的机构动力学模型是正确的。图 6 为各关节摩擦力矩, 从图中发现当接触面相对速度反向时, 关节的摩擦力矩有突变, 因此在进行关节摩擦补偿时要特别关注相对速度反向区域附近摩擦力矩突变的影响。

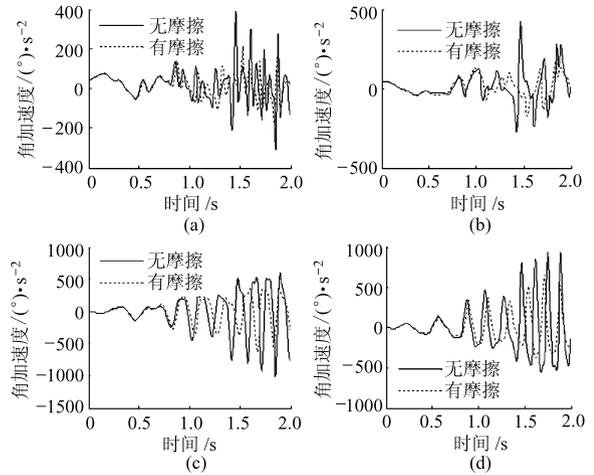


图 4 有、无摩擦时各构件角加速度对比曲线

Fig. 4 Comparison on angular acceleration of each bar between including joint friction and joint friction free
(a) 构件 1 (b) 构件 2 (c) 构件 3 (d) 构件 4

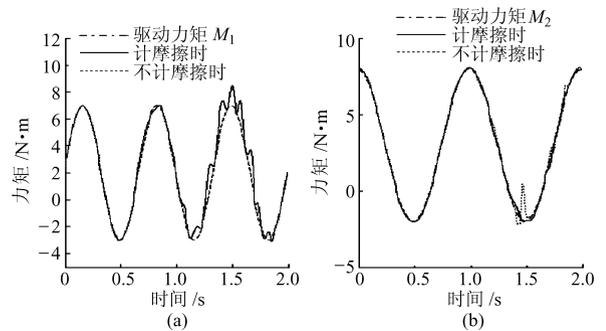


图 5 逆动力学计算结果

Fig. 5 Results of inverse dynamics
(a) 驱动力矩 M_1 (b) 驱动力矩 M_2

6 结束语

提出了包含耗散函数的 Appell 方程。构建了机构系统的路里叶耗散函数, 推导出广义耗散力。应用运动影响系数法进行机构的运动学分析, 建立了包含关节摩擦的平面闭链五杆机构的动力学模型, 并给出了解算方法。逆动力学计算结果验证了模型的正确性, 仿真结果表明关节耗散对机构运动的影响是显著的。

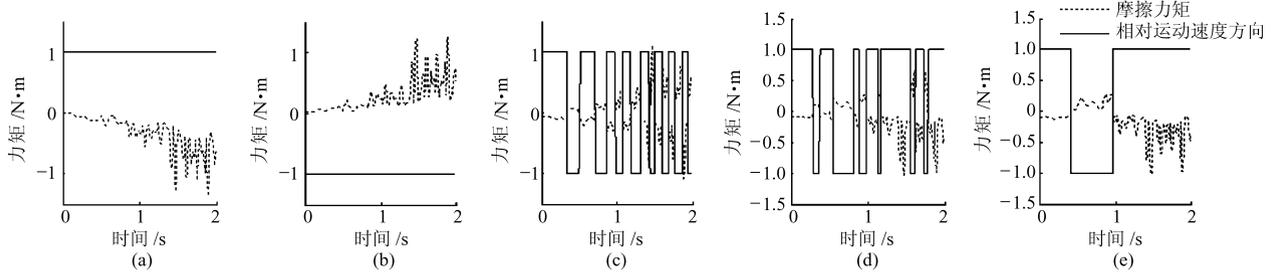


图 6 各关节的摩擦力矩

Fig. 6 Frictional torque of each joint

(a) 关节 1 (b) 关节 2 (c) 关节 3 (d) 关节 4 (e) 关节 5

参 考 文 献

- Ouyang P R, Li Q, Zhang W J, et al. Design, modeling and control of a hybrid machine[J]. *Mechatronics*, 2004, 14(10): 1 197~1 217.
- Yu Hongnian. Modeling and control of hybrid systems—a five bar mechanism case[J]. *Internal Journal of Automation and Computing*, 2006, 3(3): 235~243.
- 于红英, 唐德威, 王建宇. 平面五杆机构运动学和动力学特性分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(6): 940~943.
Yu Hongying, Tang Dewei, Wang Jianyu. Analysis of the kinematic and dynamic characteristics of a planar five-bar mechanism[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2007, 39(6): 940~943. (in Chinese)
- 罗磊, 莫锦秋, 王石刚, 等. 并联机构动力学建模和控制方法分析[J]. *上海交通大学学报*, 2005, 39(1): 75~78.
Luo Lei, Mo Jinqiu, Wang Shigang, et al. Analysis of dynamic modeling and control of parallel mechanism [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2005, 39(1): 75~78. (in Chinese)
- Craig J. Introduction to robotics[M]. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- Armstrong-Helouvry B, Pierre Dupont, Canudas De Wit C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machine with friction[J]. *Automatica*, 1994, 30(7): 1 083~1 138.
- 刘强, 尔联洁, 刘金琨. 摩擦非线性环节的特性、建模与控制补偿综述[J]. *系统工程与电子技术*, 2002, 24(11): 45~52.
Liu Qiang, Er Lianjie, Liu Jinkun. Overview of characteristics, modeling and compensation of nonlinear friction in servo systems[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2002, 24(11): 45~52. (in Chinese)
- 王振发. 分析力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

(上接第 212 页)

(3) 按照国家颁布的方草捆压捆机试验方法和方草捆压捆机打结器可靠性考核方法, 经过打捆作

业试验, 成结率为 100%, 成捆率达到 96%, 能够满足实用要求。

参 考 文 献

- 王国权, 余群, 卜云龙, 等. 秸秆捡拾压捆机设计及捡拾器的动力学仿真[J]. *农业机械学报*, 2001, 32(5): 59~61.
- 道尔吉, 郑钢. 打结器试验台的模拟设计[J]. *农业机械学报*, 1989, 20(2): 85~88.
- 丛宏斌, 王克恒, 李汝莘, 等. 锥辊式玉米秸秆揉搓装置的设计[J]. *农业机械学报*, 2007, 38(12): 81~84.
- 王春光, 谭立东. 基于虚拟样机技术的牧草高密度压捆过程分析[J]. *农业机械学报*, 2005, 36(3): 99~101.
- 安国邦, 计守信. 奔驰 88-A 型高密度固定式干草压捆机的研制[J]. *东北农业大学学报*, 1994, 25(6): 160~168.
- 王春光, 杨明韶, 高焕文, 等. 打捆机草捆后捆绳张力的测试研究[J]. *内蒙古农牧学院学报*, 1998, 15(3): 73~77.