基于最大波动分析的稳健设计*

许焕卫　孙　伟　张　旭

【摘要】 针对稳健设计中目标函数以及约束的稳健性两个方面，提出了一种基于最大波动分析的稳健设计优化方法。通过分析不确定因素对目标函数以及约束的影响，计算目标函数以及约束的最大波动量，将约束的最大波动值添加到原约束中以保证约束的稳健可行性；同时在原有优化模型上添加新约束保证目标函数的最大波动值不超过设计者规定的范围，从而构造了两级稳健设计优化数学模型。顶级优化用来求解原有常规优化的数学模型；次级优化用来判断目标函数以及约束的稳健性。最终实例结果证明该方法是可行的。

关键词：最大波动分析　目标函数稳健性　约束可行性　稳健设计

中图分类号：TH122　　文献标识码：A

Robust Optimization Design Based on Maximal Variation Analysis

Xu Huanwei　Sun Wei　Zhang Xu

(*Dalian University of Technology*, *Dalian* 116024, *China*)

Abstract

In view of robustness of objective function and constraints in robust design, a new robust design method based on maximal variation analysis was proposed. Firstly, the principle of variations which have been generated in objective functions and constraints by considering the uncertain factors in design variables and design parameters were analyzed, then the maximal variations of objective function and constrains were estimated by using maximal variation analysis. The maximal variations of constraints were added to original constraints to guarantee feasibility of constraints; a new constraint has been added to original optimization problem to ensure the variation of objective function was less than the value which designer set, and then a bi-level mathematical optimal model was constructed. The top-level optimization was used to solve the original mathematical model; the lower-level optimization was used to judge the robustness of objective function and constraints. Example results showed that the proposed approach is feasible.

Key words　Maximal variation analysis, Objective function robustness, Constraints feasibility robustness, Robust design

引言

稳健设计是由Taguchi教授提出的一种工程质量优化方法[1]，该方法是研究在考虑不确定性因素的前提下减少不确定性因素对工程质量的影响。稳健设计涉及的内容可分为目标函数的稳健性和约束的稳健可行性。目前，许多学者已提出了多种方法来研究这两个方面的稳健性。方法可分为两类：①非概率方法[2~4]。这类方法大多要求优化问题的目标函数和约束连续、可导、不确定性因素的波动范围小等。②概率方法[5~7]。这类方法大多要求知道设计变量及设计参数的分布类型，目标函数或

收稿日期：2007－10－19

* 国家“973”重点基础研究发展计划资助项目(项目编号：2007CB714000)和辽宁省科学技术计划工业攻关项目(项目编号：2006219012)

许焕卫　大连理工大学精密与特种加工教育部重点实验室　博士生，116024　大连市

孙　伟　大连理工大学精密与特种加工教育部重点实验室　教授　博士生导师

张　旭　大连理工大学精密与特种加工教育部重点实验室　博士生

约束的概率密度等。

本文提出一种稳健设计优化模型，该优化模型分析目标函数及约束在不确定性因素影响下产生波动的原因，提出利用最大波动法分析目标函数及约束的稳健性，利用量化的最大波动值作为稳健分析指标添加到常规工程优化问题的数学模型中，从而建立稳健设计的两级优化数学模型。

1　稳健设计分析

1.1　目标函数的稳健性分析

一般的工程优化问题可表述为

$$\min \quad f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,J) \\ \boldsymbol{x}_L\leqslant \boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{x}_U \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 是设计变量，$\boldsymbol{p}$ 是设计参数，当一个设计方案确定时，其名义值是确定的。目标函数的稳健性指的是如何确定设计变量 x 的值，使由于 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{p}$ 中不确定性因素波动而产生的目标函数的变异 Δf 尽可能的小。它们之间的关系可用图 1 表示。从图 1 中可以清楚地看出，当 $x=x_1$ 且在其容差范围内波动时，目标函数的最大波动值为 Δf_1。当 $x=x_2$ 且在相同的容差范围内波动时，目标函数的最大波动值为 Δf_2。显然 $\Delta f_2<\Delta f_1$。尽管设计方案 x_2 比设计方案 x_1 的目标函数值要“劣”，但是在相同的容差范围内其目标函数值更加稳健。

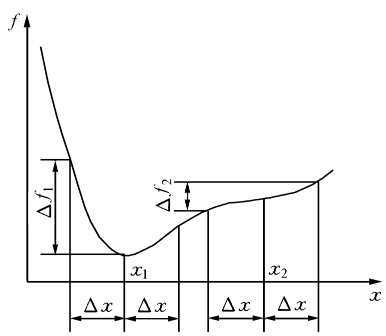

图 1　目标稳健性示意图

Fig. 1　Robustness of objective function

假设已经确定了一个设计方案 x_0，由于设计变量以及设计参数在其名义值附近发生变化，目标函数会发生波动 Δf，则

$$\Delta f=f(x_0+\delta x,p_0+\delta p)-f(x_0,p_0) \tag{2}$$

式中，x_0，p_0 是设计方案中设计变量与设计参数的名义值，$f(x_0,p_0)$为设计方案的名义目标值，$f(x_0+\delta x,\ p_0+\delta p)$为设计变量以及设计参数发生波动 δx，δp（其值可以为零，即没有波动）后的目标值，是设计方案的实际取值。从式(2)可以看出，当 δx，δp 在其容差范围（$-\Delta x\leqslant\delta x\leqslant\Delta x$，$-\Delta p\leqslant\delta p\leqslant\Delta p$）内取不同值时，$\Delta f$ 也会相应取不同值。因此当一个设计方案确定后，其目标函数的波动值不确定，而要根据 δx、δp 的取值而定，然而 δx、δp 的取值是随机的、不确定的，准确地计算出目标函数的波动值是困难的。但是可以找出目标函数在不确定性因素影响下的最大波动值。假设在不确定因素的影响下，目标函数的最大波动一定会发生，则对于目标函数 f 来说，最稳健的设计方案应该是存在这样一个或多个点（设计方案），该点在不确定因素的影响下，目标函数的最大波动值最小

$$\min\{\max\{\Delta f=|f(x_0+\delta x,p_0+\delta p)-f(x_0,p_0)|\}\}$$
$$(-\Delta x\leqslant\delta x\leqslant\Delta x,-\Delta p\leqslant\delta p\leqslant\Delta p) \tag{3}$$

目标函数的稳健优化可视为双目标优化[8]：即一方面使目标值尽可能地达到期望值；另一方面使不确定因素所引起的目标波动最小化。但是由于在实际的工程设计中不是要寻求目标函数最稳健的设计方案，而是要求目标函数在满足设计者规定的波动范围内达到最优，因此可以把目标函数的稳健性指标转换为约束添加到原有的优化问题中

$$\max\{\Delta f=|f(x_0+\delta x,p_0+\delta p)-f(x_0,p_0)|\}\leqslant\Delta f_0 \tag{4}$$

式中　Δf_0——设计者事先规定的一个波动值

1.2　约束的可行性分析

由于不确定性因素的存在，不仅目标函数会发生波动，约束条件也会相应的发生变化。由于在常规优化中，问题的最优解往往在约束条件的边界上，因此这个常规最优解往往会违反变化了的约束条件。约束的稳健可行性指的是在不确定性因素的影响下使求出的设计解仍然满足变化后的约束条件。求稳健可行优化解，关键是确定原约束在不确定因素的影响下发生的变化量。文献[9]提出求此变化量 Δg，并把这个变化量添加到原约束中从而确定新的约束，最终保证求出的最优解的稳健可行性

$$g(x,p)+\Delta g(x,p)\leqslant 0 \tag{5}$$

首先以一个约束为例来推导约束的变化量。设有一个约束条件：$g(x,p)\leqslant 0$，则相应的约束变化量可以表述为

$$\Delta g(x_0,p_0)=g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)-g(x_0,p_0)$$
$$(-\Delta x\leqslant\delta x\leqslant\Delta x,-\Delta p\leqslant\delta p\leqslant\Delta p) \tag{6}$$

式中 $g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)$为考虑不确定性因素变化的约束，$g(x_0,p_0)$为原约束。当一个设计方案$(x_0,p_0)$确定后，$g(x_0,p_0)$是一个定值，但是由于 δx、δp 的随机性无法确定 $g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)$的值，$g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)$的值是围绕 $g(x_0,p_0)$的

值上下波动的，从而无法确定 $\Delta g(x_0,p_0)$ 的值。但是同目标函数的稳健性分析一样可以找出约束在不确定性因素影响下的最大波动值。把这个最大波动值添加到原约束方程中以保证一个设计方案的可行稳健性。所以式(5)可以改写为

$$g(x_0,p_0)+\max\{\Delta g\}\leqslant 0 \tag{7}$$

把式(6)代入式(7)中得到

$$g(x_0,p_0)+\max\{g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)-g(x_0,p_0)\}\leqslant 0 \tag{8}$$

进而得到

$$\max\{g'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)\}\leqslant 0 \tag{9}$$

推广到多个约束，则式(9)变为

$$\begin{cases}\max\{g_1'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)\}\leqslant 0\\ \max\{g_2'(x_0+\delta x,p_0+\delta p)\}\leqslant 0\\ \vdots\\ \max\{g_J'(x_0+\delta x,\ p_0+\delta p)\}\leqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

因此，可以用式(10)作为指标来判断一个设计方案的稳健可行性。

1.3 稳健设计优化模型

包含目标函数稳健以及约束稳健可行性的整体稳健设计优化模型，如图 2 所示。

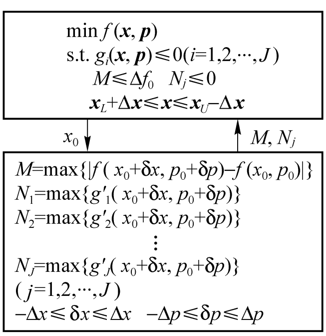

图 2 稳健设计优化模型示意图

Fig. 2 Optimization model of robust design

从图 2 中可以看出，这是一个两级优化数学模型。顶级优化是在原有常规优化的数学模型中添加了目标函数以及约束的稳健性指标；次级优化用来判断目标函数以及约束在不确定性因素影响下的最大波动量。此优化模型首先由顶级优化任意确定一个设计方案(x_0)，将其值传递给次级优化问题；然后在次级优化问题中，求出约束稳健可行性指标 M、N_j，并将其值传递回顶级优化(在次级优化问题中，x_0 是一个定值)；在考虑稳健性指标的前提下对顶级优化重新求解，得到一个更好的设计方案再传递到次级优化中，如此循环，直到顶级优化收敛到最优解。

2 实例分析

设计如图 3 所示焊接梁。设计变量分别为焊接梁高度 t 和宽度 b 以及焊缝高度 h 和长度 l。这 4 个设计变量均为连续变量。目标函数是整个焊接梁的造价最小。由于篇幅关系，在这里直接给出原优化问题的数学模型，并对原问题进行了少许修改。原优化问题的详细描述、计算中其余公式及数据可参考文献[10]。

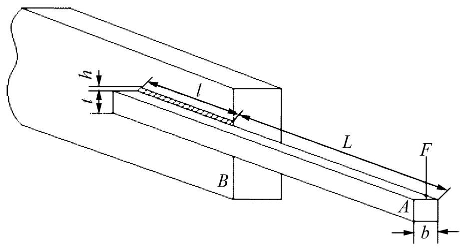

图 3 焊接梁简图

Fig. 3 Welded beam

此焊接梁的常规优化数学模型为：

设计变量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm T}=[t,b,h,l]^{\mathrm T}$

目标函数 $\min F=(1+c_1)x_3^2x_4+c_2x_1x_2(L+x_4)$

约束条件 $g_1=\dfrac{\tau}{\tau_{\mathrm d}}-1\leqslant 0\quad g_2=\dfrac{\sigma}{\sigma_{\mathrm d}}-1\leqslant 0$

$g_3=\dfrac{\delta}{6.35}-1\leqslant 0\quad g_4=\dfrac{F}{P_c}-1\leqslant 0$

$g_5=x_3-x_2\leqslant 0\quad g_6=3.175-x_3\leqslant 0$

$2.54\leqslant x_1\leqslant 254\quad 2.54\leqslant x_2\leqslant 50.8$

$2.54\leqslant x_3\leqslant 50.8\quad 2.54\leqslant x_4\leqslant 254$

设其中 L、c_1 包含不确定性因素且其容差为 $-3\leqslant\Delta c_1\leqslant 3$、$-6.35\leqslant\Delta L\leqslant 6.35$。目标函数的波动范围取为 $\Delta f\leqslant 1.6$。

分别利用提出的目标函数稳健性指标(仅考虑目标函数的稳健性)、约束稳健可行性指标(仅考虑约束的稳健可行性)、以及同时采用这两种指标(综合稳健)对问题进行求解。其优化结果如表 1 所示。同时为了证明本文的方法能够保证目标函数以及约束的稳健性，在 L、c_1 的容差范围内随机产生了 15 组数据，分别把这 15 组数据代入目标函数以及原约束中进行试验，其结果如表 2、图 4 所示。在表 2 中，√号表示求得的优化解满足约束条件，×号表示违反了约束条件。括弧内的数字表示 15 次试验中违反约束的次数。从表 1、2 中可以看出，虽然常规优化方法求得的解最好，但是当存在不确定性因素时，其值极其容易违反约束，达到 10 次之多。在要求优化解严格满足约束条件的实际工程问题中这种结果显然是无法接受的。相反，考虑约束稳健性的 2 种方法都没有违反约束。从图 4 中也可以看出，

在 15 次试验中，常规优化解的目标波动有 2 次超过了设计者设定的值，并且从总体上来说其目标函数的波动值都要比本文提出的 2 种目标函数稳健性方法的波动大。同时也可以看出，采用综合稳健方法求得的稳健解对目标函数值的“牺牲”较大。因此，在实际的工程优化中，要视具体的情况来选择稳健性指标，如果仅仅是目标函数或者约束的稳健性比较重要，可以仅采用一个稳健性指标，这样求得目标函数会相对好些。

表 1　焊接梁结构稳健优化结果

Tab.1　Robust optimal solutions of the welded beam

参数	常规优化	目标函数稳健	约束稳健	综合稳健
目标值 f	145.56	150.08	147.55	146.46
t/mm	210.60	210.60	211.52	211.52
b/mm	6.21	6.21	6.26	6.26
h/mm	6.21	4.69	6.26	4.48
l/mm	157.95	232.53	157.76	250.00

表 2　可行稳健性比较

Tab.2　Comparison of feasibility robustness

方法	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
常规优化	×(10)	×(10)	√	×(10)	√	√
约束稳健	√	√	√	√	√	√
综合稳健	√	√	√	√	√	√

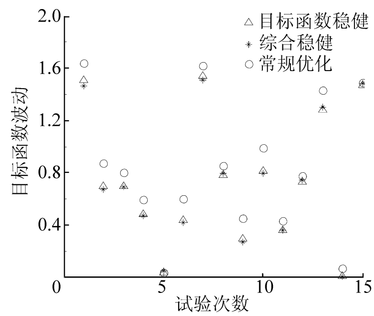

图 4　目标函数稳健性比较

Fig.4　Comparison of objective function robustness

3　结束语

提出了一种基于最大波动分析的确定性分析方法，在该方法中采用两级优化的方法来确保设计解的目标函数以及约束的稳健性。把所提方法应用到一个实际的工程优化问题中，从而验证了考虑稳健性的重要性以及所提方法的可行性。

参　考　文　献

1　Taguchi G. Quality engineering through design optimization[M]. New York: Krauss International Press, 1986.

2　Balling R J, Free J C, Parkinson A R. Consideration of worst-case manufacturing tolerances in design optimization[J]. ASME J. Mech. Des., 1986, 108(3): 438～441.

3　Belegundu A D, Zhang S. Robustness of design through minimum sensitivity [J]. ASME J. Mech. Des., 1992, 114(2): 213～217.

4　Zhu J, Ting K L. Performance distribution analysis and robust design[J]. ASME J. Mech. Des., 2001, 123(1): 11～17.

5　Eggert R J. Quantifying design feasibility using probabilistic feasibility analysis[C]// Proceedings of ASME Advances in Design Automation. New York: ASME, 1991: 235～240.

6　Du X, Chen W. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design[J]. ASME J. Mech. Des., 2000, 122(4): 385～394.

7　陈立周. 稳健设计[M]. 北京: 机械工业出版, 2000.

8　Chen W, Allen J K, Mistree F, et al. A procedure for robust design: minimizing variations caused by noise factors and control factors[J]. ASME J. Mech. Des., 1996, 118(4): 478～485.

9　许焕卫,黄洪钟,何俐萍.稳健设计中的稳健可行性分析[J]. 清华大学学报:自然科学版,2007,47(22):1 721～1 724. Xu Huanwei, Huang Hongzhong, He Liping. Feasibility robustness analysis in robust optimization designs[J]. J. Tsinghua University: Sci. & Tech., 2007, 47(22): 1 721～1 724. (in Chinese)

10　Xiong Y, Rao S S. Fuzzy nonlinear programming for mixed-discrete design optimization through hybrid genetic algorithm [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(2): 167～186.