

# $J$ 积分移动理论的单边径向裂纹轴校直行程算法<sup>\*</sup>

翟 华

**【摘要】** 依据弹塑性断裂理论和实验,研究了含裂纹轴中最危险的单边径向裂纹轴校直过程,提出了多步加载条件下的  $J$  积分移动理论和单边径向裂纹轴校直行程递推算法。含单边径向裂纹轴校直中,假设多步加载相互独立, $J$  积分包括  $J_e$  和  $J_p$  两项,微小递增的弹塑性载荷导致裂纹钝化有助于  $J_{IC}$  增加, $J$  积分值在多次加载中可缓慢向上移动。基于这一观点,结合校直行程递推算法,建立了单边径向裂纹轴的多步校直行程递推算法。对裂纹为3 mm 的单边径向裂纹轴实验的结果表明了  $J_{IC}$  移动现象,并且在实验轴4步校直后,初始0.13 mm 弯曲值可以减少到0.01 mm,而裂纹嘴张开位移限制在0.008 mm。

**关键词:** 轴 校直 裂纹 算法

**中图分类号:** TG356.25; O346.1<sup>+</sup>2

**文献标识码:** A

## Straightening Stroke Algorithm of Shaft with Single-edged Crack Based on $J$ -integral Moving Theory

Zhai Hua

(Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

### Abstract

The  $J$ -integral moving theory with multiple loading and shaft straightening stroke increasing algorithm with single-edged crack were presented according to the elastic-plastic fracture mechanic theory and experiments analysis. During multi-step straightening, with the assumption of independent multiple loading,  $J$ -integral including two items of  $J_e$  and  $J_p$ , and the crack blunting would promote the  $J_{IC}$  increasing, the  $J$ -integral could be considered to move up slowly. Based on this view, the multi-step straightening stroke algorithm was built up to the shaft with single-edged crack. The straightening experiment resulted to the shaft with 3 mm depth single-edged crack could prove the  $J_{IC}$  moving phenomenon, and after 4 steps straightening to the experimented shaft, the initial 0.13 mm bend value could be decreased to 0.01 mm, while crack mouth opening displacement could be limited to 0.008 mm.

**Key words** Shafts, Straightening, Crack, Algorithm

### 引言

由于轴类零件表面不可避免存在各种缺陷、损伤、微裂纹,这些缺陷或是材料夹渣引起,或是机械加工刀痕引起,或是材料内部空位、位错在外力作用下演变而成,或是类似于裂纹的零件表面设计要素,如键槽、退刀槽等,在较大外载作用下将起裂、扩展,导致零件报废,因此校直中必须考虑裂纹对轴类零

件影响。已有研究大多以传统强度理论作为依据,而且不考虑裂纹的存在。文献[1]依据弹塑性强度理论建立了校直行程经验公式。文献[2~3]假设轴类零件材料由理想弹塑性材料构成,建立了校直载荷和变形之间的方程。文献[4]根据实验假设轴类零件由幂强化材料构成,建立了基于行程控制校直行程计算公式。文献[5]讨论了异形薄壁管件的校直工艺问题,表明需经多步校直才能实现工艺要求。

收稿日期: 2007-08-13

<sup>\*</sup> 安徽省科技攻关项目(项目编号:06012019A)和安徽省高校青年教师科研资助计划项目(自然科学)(项目编号:2006jql020)

翟 华 合肥工业大学机械与汽车工程学院 副教授 博士, 230009 合肥市

文献[6]研究了单边径向裂纹轴校直行程可行域问题,但只涉及一步校直问题,多步校直过程没有讨论。现有国外引进的自动校直设备中含有裂纹检测装置,但仅对出现的裂纹进行检测并报警,并未考虑裂纹对校直工艺的影响。

本文根据弹塑性断裂力学中  $J$  积分理论和实验,针对含裂纹轴中最危险的单边径向裂纹轴多步校直过程进行研究,提出  $J$  积分移动理论,并建立含单边径向裂纹轴校直行程算法,经实验验证是有效的。

## 1 算法研究

### 1.1 含裂纹轴校直过程

轴类零件校直可简化为三点弯曲力学模型,如图1所示,校直过程经历弹性变形、弹塑性变形、弹性回复3个阶段,是非线性过程。根据反弯校直原理<sup>[2]</sup>,当轴类零件弹性回复后的塑性残余变形量和初始弯曲变形量相等时,零件能被校直。

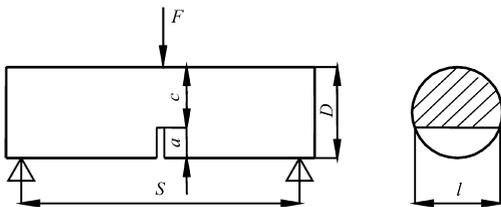


图1 单边径向裂纹轴校直力学模型

Fig. 1 Mechanic model of shaft with single-edged crack

### 1.2 裂纹控制参量 $J$ 积分移动理论

单边径向裂纹在校直过程中经历了大范围屈服变形过程,因此可用  $J$  积分作为裂纹尖端附近弹塑性应力、应变控制参量。目前,圆轴单边径向裂纹的  $J$  积分计算尚未有理想结论。

Rice、Paris 和 Merkle<sup>[7]</sup>讨论了如图2所示深裂纹弯曲试件  $J$  积分计算公式。

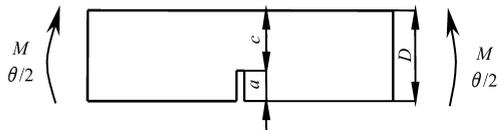


图2 单边径向裂纹轴纯弯曲力学模型

Fig. 2 Pure bend model of shaft with single-edged crack

$$J = - \int_0^\theta \frac{\partial M}{\partial a}(\theta, a) d\theta = \int_0^M \frac{\partial \theta}{\partial a}(M, a) dM \quad (1)$$

其中  $\theta = \theta_e + \theta_p$   
 式中  $M$ ——纯弯矩  $a$ ——裂纹深度  
 $D$ ——圆轴直径  $\theta$ ——转角  
 $\theta_e$ ——加载点处弹性变形相对转角  
 $\theta_p$ ——加载点处塑性变形相对转角

由于塑性变形的产生主要与无裂纹部分有关,

因此可以认为  $\theta_p$  仅与非裂纹深度  $c$  有关,由量纲分析可得

$$\theta_p = f\left(\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \quad (2)$$

由于  $a = D - c$ ,  $(\partial \theta_p / \partial a)_M$  可表示为

$$\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial a}\right)_M = - \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial c}\right)_M = - f' \left(\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \left(\frac{-2M}{\sigma_0 c^3}\right) \quad (3)$$

另一方面

$$\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial M}\right)_a = f' \left(\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \frac{1}{\sigma_0 c^2} \quad (4)$$

所以

$$\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial a}\right)_M = \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial M}\right)_a \frac{2M}{c} \quad (5)$$

因载荷  $M$  时弹性试件的  $J_e$  值<sup>[8]</sup> 为  $J_e = \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_e}{\partial a}\right)_M dM$ , 所以将式(5)代入式(1)后两边积分,得  $J$  积分表达式为

$$J = J_e + \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial M}\right)_a \frac{2M}{c} dM = J_e + \frac{2}{c} \int_0^{\theta_p} M d\theta_p \quad (6)$$

对图1所示中点作用集中力  $F$  的三点弯试件,仿照上述纯弯裂纹情况推导方法,可得  $J$  积分和位移  $\Delta$  之间近似公式为

$$J = J_e + J_p = \int_0^F \left(\frac{\partial \Delta_e}{\partial a}\right)_F dF + \frac{2}{c} \int_0^{\Delta_p} F d\Delta_p \quad (7)$$

式中  $\Delta_e$ ——弹性位移  $\Delta_p$ ——塑性位移

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_p$$

在线弹性状态下  $J_e = G$ ,  $G$  为能量释放率,由 Irwin-Kies 关系<sup>[9]</sup>得

$$G = \frac{F_c^2 dC}{2l da} \quad (8)$$

式中  $C$ ——试样柔度

$F_c$ ——裂纹产生钝化的集中载荷值

又由文献[9],得

$$J_p = \frac{1}{n+1} \sigma(a) \delta_p(a) \quad (9)$$

其中

$$\delta_p(a) = \frac{4r(2R_c - a)}{\Delta_p S}$$

式中  $n$ ——加工硬化系数

$\sigma(a)$ ——裂纹顶端应力

$\delta_p(a)$ ——裂纹顶端张开位移的塑性部分

$R_c$ ——裂纹尖端圆弧半径

$r$ ——旋转因子,  $r = 0.4 \sim 0.5$

$S$  为图1中两支点跨距,式(7)可表示为

$$J = G + \frac{1}{n+1} \sigma(a) \delta_p(a) \quad (10)$$

由  $J$  积分定义要求单调加载条件,对多次递增小步长加载,实现大弯曲变形校直过程, $J$  积分使用受到限制。但如果假设每次加载是相互独立的,则每次加载过程所定义的  $J$  积分都将符合式(10)的定义。由式(7)发现, $J$  积分值对应  $J_e$  和  $J_p$  两部分,并且分别由  $\Delta_e$  和  $\Delta_p$  决定。当相邻两次间加载的变形相差不大,由于加工硬化影响,可以将第  $k$  次总变形近似作为第  $k+1$  次总变形中的弹性变形部分,即

$$\Delta^{k+1} = \Delta_e^{k+1} + \Delta_p^{k+1} = \Delta^k + \Delta_p^{k+1} \quad (11)$$

故对应的  $J$  积分也有

$$J^{k+1} = J_e^{k+1} + J_p^{k+1} = J^k + J_p^{k+1} \quad (12)$$

从总体校直过程看,则可以认为  $J$  积分值是随弯曲变形减小的移动过程。

Begley 和 Landes<sup>[8]</sup> 根据实验提出  $J$  积分断裂准则,认为当

$$J \geq J_{IC} \quad (13)$$

裂纹体发生失稳断裂, $J_{IC}$ 是起裂韧度。

根据式(7), $J_{IC}$ 对应位移为  $\Delta^0$ ,即第一次校直变形  $y_1$  最大值。第 2 次校直变形  $y_2$  的最大值,则由式(12)确定的  $J_{IC1}$ 求得相应的  $\Delta^1$ 。依此类推,直到弯曲变形逐步消除。

### 1.3 校直行程递推算法

文献[4]建立了如图 1 所示无裂纹强化材料轴的校直行程  $y$  的计算公式

$$y = y_0 + \frac{F_0 S^3}{48EI} \left[ 1 + \left( \frac{48y_0 EI}{AF_0 S^3} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \quad (14)$$

式中  $A$ ——材料特性系数

$y_0$ ——初始弯曲变形

$F_0$ ——最大弹性极限载荷

$E$ ——弹性模量  $I$ ——截面惯性模数

同样对含单边径向裂纹轴校直情况, $F_0$ 为屈服材料屈服时对应的载荷值。当  $F = F_0$ ,含裂纹轴进入弹塑性变形。对递增小步长校直情形,其校直行程递推算法为

$$y^{k+1} = \begin{cases} \Delta^k & (y^* \geq \Delta^k) \\ \Delta^{k-1} + \nabla y^k & (y^* < \Delta^k) \end{cases} \quad (15)$$

式中, $y^*$ 为根据弯曲变形值计算求得的需要产生弹塑性变形值, $\nabla y^k$ 为第  $k+1$  步时校直行程递增量, $\nabla y^k = y^* - y^k$ ,要求  $\nabla y^k < \Delta^k - \Delta^{k-1}$ 。 $\Delta^k$ 由式(12)确定的  $J_{ICk}$ 代入式(7)求得。

## 2 实验研究

### 2.1 试件制备

采用试件材料为 35 号钢制备圆轴试件,轴直径

$D = 13$  mm,两支撑距离  $S = 213$  mm,裂纹深度分别为  $a = 1, 2, 3, 4$  mm。由线切割加工形成不同深度裂纹,并经调质处理。

### 2.2 校直实验

将式(1)推广到图 1 所示中点作用集中力  $F$  的三点弯试件,则

$$J = \int_0^{\Delta} \left[ -\frac{\partial(F/S)}{\partial a} \right]_{\Delta} d\Delta \quad (16)$$

可根据式(16),利用多个不同裂纹长度的试件实测  $F-\Delta$  曲线,实验数据如表 1 所示,可以计算不同裂纹深度的  $J-\Delta$  函数<sup>[9]</sup>。

$$J = 1.436\Delta^2 + 5.244\Delta - 0.358 \quad (a = 1 \text{ mm}) \quad (17)$$

$$J = 1.476\Delta^2 + 0.875\Delta - 0.129 \quad (a = 2 \text{ mm}) \quad (18)$$

$$J = 1.065\Delta^2 - 0.745\Delta + 0.0499 \quad (a = 3 \text{ mm}) \quad (19)$$

$$J = 0.495\Delta^2 - 0.427\Delta + 0.0455 \quad (a = 4 \text{ mm}) \quad (20)$$

又由表 1 可计算出试样柔度拟合计算公式,  $C = 0.735 + 1.1 \left( \frac{a}{2R} \right)^{0.5}$ ,代入式(8)可计算试件  $G$  值。

校直实验采用裂纹深 3 mm 轴作试件,已知  $l = 10.95$  mm,  $A = 0.52$ ,  $F_0 = 2\ 058.4$  N,  $n = 2.50$ ,  $F_c = 3\ 038.0$  N,通过夹式引伸计判断裂纹是否起裂<sup>[10]</sup>。

表 1 不同裂纹深度轴  $F-\Delta$  数据

Tab.1  $F-\Delta$  data of shaft with various depth single-edged crack N

$\Delta$	裂纹深度/mm			
	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$
1.2	2 096.2	1 699.3	1 935.5	1 847.3
1.6	2 562.7	2 396.1	2 352.0	2 251.1
1.8	2 799.9	2 605.8	2 540.2	2 446.8
2.0	2 998.8	2 911.6	2 749.9	1 821.7
2.2	3 176.2	3 159.5	2 940.0	2 807.7
2.4	3 311.4	3 298.7	3 126.2	2 991.0
2.6	3 413.3	3 527.0	3 285.9	3 159.5
2.8	3 502.5	3 728.9	3 440.8	3 316.3
3.0	3 575.0	3 905.3	3 559.4	3 458.4
3.2	3 693.6	4 074.8	3 646.6	3 574.1

将  $F_0$  代入式(14)计算校直行程下临界值<sup>[6]</sup>  $\Delta_{\min} = 1.5$  mm。将  $F_c$  代入式(8)可计算  $J_{IC} = G = 2.66$  kg/mm,则将  $J_{IC}$ 代入式(19)计算校直行程上临界值  $\Delta_{\max} = 1.95$  mm,则校直可行域是  $[1.5 \text{ mm},$

1.95 mm]。轴初始弯曲量  $y_0 = 0.13$  mm,由式(14)计算校直行程  $y = 2.36$  mm,因此需用式(15)进行多步校直。每次移动  $J$  积分结果  $J_{IC}$ 、相应裂纹钝化  $F_c$  值,计算行程  $y_k$ 、校直行程  $y'_k$  和校直后误差  $e$ 、裂纹嘴残余变形  $\delta$  等数据如表2所示。

由表2可见,按式(15)多步加载校直,可以将较大的弯曲变形分步校直,而裂纹不发生起裂现象。

### 3 结束语

通过  $J$  积分理论和实验研究,提出了  $J$  积分移动理论和适用于含单边径向裂纹轴校直的递推算方法。经对裂纹深3 mm,初始弯曲变形为0.13 mm

表2 含裂纹轴多步校直实验数据

Tab.2 Straightening experimental result of shaft with single-edged crack

次数	$J_{IC}$ /kg·mm <sup>-1</sup>	$F_c$ /N	$y_k$ /mm	$y'_k$ /mm	$e$ /mm	$\delta$ /mm
1	2.66	3 038.0	1.95	1.95	0.10	0
2	3.18	3 312.4	2.09	2.10	0.06	0
3	3.80	3 620.1	2.26	2.26	0.03	0
4	4.10	3 759.3	2.33	2.32	0.01	0.008

的单边径向裂纹轴进行校直实验,结果表明该方法是有有效的。

### 参 考 文 献

- 1 Kato T, Urata E. Measurement and control of straightening process for seamless pipes[J]. Journal of Engineering for Industry, 1993,115(3): 347~351.
- 2 崔甫. 矫直理论与参数计算[M]. 北京:机械工业出版社,1994.
- 3 翟华,韩春明,柯尊忠,等. 轴类零件精密校直行程算法研究[J]. 重型机械,2001(5):35~38.  
Zhai Hua, Han Chunming, Ke Zunzhong, et al. Research on stroke-algorithm of shaft-straightening[J]. Heavy Machinery, 2001(5):35~38. (in Chinese)
- 4 Zhai H. Research on straightening technology CAM system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 16(2): 65~68.
- 5 翟华,韩春明,柯尊忠. 异型薄壁管件截面校正工艺理论与实验研究[J]. 农业机械学报,2003,34(5):140~142.  
Zhai Hua, Han Chunming, Ke Zunzhong. Theoretical and experimental study on section straightening of special thin-walled tube[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2003,34(5):140~142. (in Chinese)
- 6 翟华,王芳,柯尊忠,等. 单边径向裂纹轴校直行程可行域计算及实验[J]. 农业机械学报,2003,34(2):123~125.  
Zhai Hua, Wang Fang, Ke Zunzhong, et al. Calculations and experiments of straightening feasible field of shaft with single-edged crack[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2003,34(2):123~125. (in Chinese)
- 7 Rice J R, Paris P C, Merkle J G. Some further results of J-integral analysis and estimates[J]. ASTM, STP, 1973, 536: 231~245.
- 8 黄克智,余寿文. 弹塑性断裂力学[M]. 北京:清华大学出版社,1985.
- 9 陈箴,蔡其凡,王仁智,等. 工程断裂力学[M]. 北京:国防工业出版社,1978.
- 10 赵建华. 断裂力学[M]. 合肥:中国科技大学出版社,1998.
- 11 Begley J A, Landes J D. The J-integral as a fracture criterion[J]. Fracture Toughness Proceeding of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II, ASTM, STP, 1972, 514: 1~20.