

一种结合稀疏表示和投影正则化的图像分解方法

江玲玲, 殷海青, 冯象初

(西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 结合稀疏表示和投影正则化方法, 提出了一种将图像分解为纹理和结构部分的新方法. 该方法的基本思想是用两个适当的字典: 一个用来描述纹理部分——对偶树复小波变换, 另一个用来描述结构部分——基于投影正则化方法的二代曲线波变换, 其中投影正则化方法可以很好地指引分解过程, 减少伪吉布斯现象. 这两个字典本身是互不相关的, 只对它们所描述的部分得到稀疏表示, 对另外一部分得不到稀疏表示. 实验结果表明, 该算法即节省了运算时间, 又很好地将图像的纹理和结构分开, 特别是当图像含有噪声时, 它可以很好地将纹理和噪声分开.

关键词: 曲线波; 对偶树复小波变换; 全变分; 纹理; 基跟踪

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2007)05-0800-05

Image decomposition based on sparse representations and a projected regularization method

JIANG Ling-ling, YIN Hai-qing, FENG Xiang-chu

(School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: A novel method is presented for separating images into texture and cartoon parts based on sparse representations and a projected regularization scheme. The basic idea presented in this paper is the use of two appropriate dictionaries, one for the representation of texture parts—the dual tree complex wavelet transform and the other for the cartoon parts—the second generation of curvelet transform followed by a projected regularization method which is employed to better direct the separation process and reduce the pseudo-Gibbs oscillations. Both dictionaries are chosen such that they lead to sparse representations over one type of image-content and several experimental results show that the algorithm's performance is validated.

Key Words: curvelet; dual tree complex wavelet transform; total variation; texture; basis pursuit

图像处理的一个重要目的是从图像中提取有用的信息, 这要把图像分解成有意义的部分. 近几年来, 基于全变分的结构——纹理分解模型得到了很好的发展. Meyer^[1] 建议用 G 范数刻画纹理部分, 但是该方法比较难实现. Vese-Osher^[2] 提出了用 $\text{div}(L^p)$ 范数逼近 G 范数, Osher-Sole-Vese^[3] 建议使用 H^{-1} 范数, Lieu-Vese^[4] 提出更一般的 H^{-s} 范数, Le-Vese^[5] 建议使用 $\text{div}(\text{BMO})$ 范数. 此外, Starck^[6] 等人提出了一种基于稀疏表示的图像分解方法, 此方法称为形态学成分分析方法 (MCA). 笔者结合 MCA 方法, 提出了一种新的图像分解方法. 选用两个适当的字典: 一个用来描述纹理部分——对偶树复小波变换 (DT CWT), 另一个用来描述结构部分——基于投影正则化方法的第二代曲线波变换. 实验表明, 该方法比 MCA 方法能得到更好的分解效果, 且运算时间较短.

1 新模型

首先简单介绍一下 MCA 图像分解方法. 假设输入图像的大小为 $N \times N$. 将该图像重新排序为一个长度

为 N^2 的一维矢量. 对于任意一幅包含纹理、结构和噪声的图像 f , 基跟踪方法^[7] 用 l^1 范数解下面的优化问题

$$\{\alpha_t^{\text{opt}}, \alpha_n^{\text{opt}}\} = \arg \min_{\{\alpha_t, \alpha_n\}} \|\alpha_t\|_1 + \|\alpha_n\|_1 + \lambda \|f - T_t \alpha_t - T_n \alpha_n\|_2^2, \quad (1)$$

其中 T_t, T_n 为两个互不相关的字典, $T_t \alpha_t$ 为纹理部分, $T_n \alpha_n$ 为结构部分.

为了使分解过程能很好地进行, 通过对上面的优化问题施加外力, 使 $T_n \alpha_n$ 和 $T_t \alpha_t$ 很好地适应它们相对应的部分. 下面对式(1)施加一个全变差权, 得到下面的优化问题

$$\{\alpha_t^{\text{opt}}, \alpha_n^{\text{opt}}\} = \arg \min_{\{\alpha_t, \alpha_n\}} \|\alpha_t\|_1 + \|\alpha_n\|_1 + \lambda \|f - T_t \alpha_t - T_n \alpha_n\|_2^2 + \gamma T_V \{T_n \alpha_n\}. \quad (2)$$

假定 X_t 和 X_n , 定义 $X_t = T_t \alpha_t$ 和 $X_n = T_n \alpha_n$. 通过 $\alpha_t = T_t^+ X_t$ 和 $\alpha_n = T_n^+ X_n$ 能恢复 α_t 和 α_n , 其中 T_t^+ 是 T_t 的逆变换. 则式(2)可再次写为

$$\{X_t^{\text{opt}}, X_n^{\text{opt}}\} = \arg \min_{\{X_t, X_n\}} \|T_t^+ X_t\|_1 + \|T_n^+ X_n\|_1 + \lambda \|f - X_t - X_n\|_2^2 + \gamma T_V \{X_n\}, \quad (3)$$

为实现上述算法, 应如何选择字典 T_n 和 T_t . 在文[6]中, 对结构部分选用一代曲线波变换; 对纹理部分选用离散余弦变换(DCT). 笔者对结构部分, 选用基于投影正则化方法的二代曲线波变换, 很好地减少了伪吉布斯现象, 且算法相对简单, 易实现; 对纹理部分, 选用 DT CWT, 它比 DCT 更稀疏, 非常适合纹理部分的描述.

1.1 表示结构部分的字典——二代曲线波变换

尽管一代曲线波有很好的性质, 但是它也有许多缺点: 它包含 7 个指标参考: 尺度、位置、脊尺度、脊位置、角尺度、角位置和一个记号. 一代曲线波是基于块脊波的, 应用受到限制. 相比之下, 二代曲线波^[8] 只有 3 个指标参数: 尺度、方向和平移, 形式上较容易实现.

假设 v 是一个偶的、光滑的窗函数, 它的支撑区间在 $[-\pi, \pi]$. 当 $\theta \in [0, 2\pi]$, 它满足

$$|v(\theta)|^2 + |v(\theta - \pi)|^2 = 1.$$

当 $j \geq 0, l = 0, 1, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1$ 时, 定义 $v_{j,l}(\theta) = v(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta - \pi l)$. 假设 w 是一个光滑的紧支撑函数, 满足

$$|w_0(t)|^2 + \sum_{j \geq 0} |w(2^{-j}t)|^2 = 1, \quad t \in \mathbf{R},$$

其中 w_0 是一个支撑在原点邻域的光滑函数. 当 $j \geq 2, l = 0, 1, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1$, 令

$$k_{j,l}(\xi) = w(2^{-j}|\xi|)(v_{j,l}(\theta) + v_{j,l}(\theta + \pi)), \quad \xi = |\xi| \exp(i\theta). \quad (4)$$

假设 $J = (j, l), j \geq 0, l = 0, 1, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1, \theta_j = \pi l 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}; \mu = (j, l, k), k = (k_1, k_2), k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. 当 $j \geq 2$ 时, $w(2^{-j}|\xi|)v(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta)$ 的支撑区间包含在一个矩形 $R_j = I_{1j} \times I_{2j}$ 里,

$$I_{1j} = \{\xi_1, t_j \leq \xi_1 \leq t_j + L_j\}, \quad I_{2j} = \{\xi_2, 2|\xi_2| \leq L_j\},$$

其中 $L_j = \delta_1 \pi 2^j, l_j = \delta_2 2\pi 2^{j/2}$. 假设 $\tilde{I}_{1j} = \pm I_{1j}$, 定义 $\tilde{R}_j = \tilde{I}_{1j} \times I_{2j}$, 则 $L_2(\tilde{R}_j)$ 的正交基为

$$u_{j,k}(\xi_1, \xi_2) = \frac{2^{-3j/4}}{2\pi(\delta_1 \delta_2)^{1/2}} \exp(i(k_1 + 1/2)2^{-j}\xi_1/\delta_1) \exp(ik_2 2^{-j/2}\xi_2/\delta_2), \quad k_1, k_2 \in \mathbf{Z}.$$

定义 $\hat{\gamma}_{\mu'}(\xi) = k_J(\xi)u_{j,k}(\mathbf{R}_{\theta_j}^T \xi)$, (5)

其中 $\mu' := \{(j, l, k): j \geq 2, l = -2^{\lfloor j/2 \rfloor}, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1, k \in \mathbf{Z}^2\}$, \mathbf{R}_{θ_j} 为角度 θ_j 的旋转矩阵. 令 $\hat{\gamma}_{\mu_1}(\xi) = 2\pi k_1(\xi)u_k(\xi)$, 其中 $\mu_1 := \{(1, 0, k): k \in \mathbf{Z}^2\}$, $k_1^2(\xi) = w_0^2(|\xi|) + w^2(|\xi|) + w^2(|\xi|/2)$, $u_k(\xi) = (2\pi\delta_0)^{-1} \cdot \exp(i(k_1 \xi_1/\delta_0 + k_2 \xi_2/\delta_0))$, $\delta_0 > 0$ 为常数.

对任意函数 $f \in L_2(\mathbf{R}^2)$, 有等式: $\sum_{\mu} |\langle f, \gamma_{\mu} \rangle|^2 = \|f\|_{L_2(\mathbf{R}^2)}^2$ 成立, 因此曲线波系统 $\{\gamma_{\mu}\}_{\mu}$ 是 $L_2(\mathbf{R}^2)$ 上的一个紧框架. 利用 Parseval 恒等式, 得到曲线波系数为: $c_{\mu}(f) := \langle f, \gamma_{\mu} \rangle, \mu = \mu' \cup \mu_1$.

1.2 表示纹理部分的字典——对偶树复小波变换

尽管离散余弦变换可以作为纹理部分的稀疏表示, 但是它也有一些缺点^[9]. 相比之下, DT CWT 有很好的方向选择性, 比 DCT 能更好地保护边缘. 此外, DT CWT 比 DCT 更稀疏.

离散小波变换在分解过程的下采样可导致其失去平移不变性, 而平移不变性对图像特征的检测、去噪等领域有着非常重要的意义. 许多小波技术, 包括复小波变换, 都被用来解决这个问题, 但是他们或者有较高的冗余计算成本, 或者不能很好地重构^[10]. 基于线性时不变系统的 z 变换理论, Kingsbury^[11] 提出了 DT

CWT. 它有很好的性质,如近似平移不变性、较好的方向选择性和计算效率高,使得 DT CWT 可以很好地表达纹理部分. DT CWT 是由两颗平行的小波树组成,每颗树对应的滤波器是传统小波变换的双正交滤波器,其中一颗树是奇数长的高通滤波器,其采样序列的中点偶对称;另一颗树是偶数长的高通滤波器,其采样序列的中点奇对称,它们交替奇偶滤波得到的输出分别对应的是复小波变换的实部和虚部. 如果将两颗小波树的输出分别解释为经由复小波变换而得到的实部和虚部的系数,则它可看作是特殊的复小波变换.

1.3 结构部分-基于投影正则化方法的二代曲线波变换

尽管二代曲线波变换有许多好的性质,如保护边缘和计算效率高等,但是它使得处理后的图像产生虚假的吉布斯现象. 在文[6]中,一个全变分项加到了一代曲线波阈值上,减少了伪吉布斯假象,使得分解过程能很好地进行. 不同于上面的思想,笔者建议用基于投影正则化方法的二代曲线波变换处理结构部分,它能在去除噪声的同时保护边缘,视觉效果较好.

$$\text{软阈值函数 } \tau \text{ 定义如下 } \tau(x) := \begin{cases} \text{sgn}(x) \cdot (|x| - \delta) & , \quad |x| \geq \delta \\ 0 & , \quad |x| < \delta \end{cases}$$

其中 δ 为阈值.

对函数 f 的曲线波系数应用软阈值,将软阈值后的曲线波系数指标集定义为

$$\Lambda := \{\mu: |c_\mu(f)| \geq \delta\} .$$

由于曲线波阈值会在不连续点附近产生虚假的吉布斯现象,为了减少这种现象,结合全变分和曲线波. 定义全变分函数: $T_V(f) = \int_\Omega |\nabla f(x)| dx$, 为了减少计算过程中出现的分母为 0 的情况,引入小的正参数 $\beta > 0$, 改写为

$$T_V(f) = \int_\Omega (|\nabla f(x)|^2 + \beta^2)^{1/2} dx .$$

对下面的优化问题求解

$$\min_u T_V(u) . \quad (6)$$

定义 $L^2(\Omega)$ 上函数的线性子空间: $V := \{v: c_\mu(v) = 0, \forall \mu \in \Lambda\}$, 给定正序列 $(t_l)_{l=0}^\infty$, 其中: $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = 0$,

$\sum_{l=0}^\infty t_l = \infty$. 则式(6)的基于投影正则化方法的曲线波阈值为

$$f^{(l+1)} = f^{(l)} - t_l P_V(g T_V(f^{(l)})) , \quad (7)$$

其中 $g T_V(f^{(l)}) = -\nabla(g(|\nabla f^{(l)}|)\nabla f^{(l)})$, $g(x) = 1/x$, $P_V(g)$ 为函数 g 在空间 V 上的投影. 假设 T 为曲线波变换, T^{-1} 为逆变换, 则 $P_V(g) = T^{-1} \tau^{-1} T(g)$, 其中 τ^{-1} 定义为逆阈值

$$\tau^{-1}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad |x| \geq \delta \\ \text{sgn}(x) \cdot (|x| - \delta) & , \quad |x| < \delta \end{cases}$$

1.4 算法

根据前面的描述,提出了一种新的图像分解模型

$$\{X_l^{\text{opt}}, X_n^{\text{opt}}\} = \arg \min_{\{X_l, X_n\}} \|T_l^+ X_l\|_1 + \|P_V T_n^+ X_n\|_1 + \lambda \|f - X_l - X_n\|_2^2 , \quad (8)$$

其中 T_l^+ 为 DT CWT, T_n^+ 为二代曲线波变换, $P_V T_n^+$ 为基于投影正则化方法的曲线波变换.

下面采用文献[12]中的块坐标松弛方法,给出求解式(8)最小值的算法:

(1) 选择参数: L_{\max}, t_l , 迭代次数 l ; 初始化: $X_n = f, X_l = 0$; 令阈值 $\delta = \lambda L_{\max}$.

(2) 进行 $l = 0, 1, \dots$, 次迭代算法:

A: 假设 X_l 固定, 求解 X_n :

① 计算残数 $R = f - X_l - X_n$.

② 假设 $X_n := X_n + R$:

(a) 假设 $g T_V(X_n) = g$, 计算 g , 求出 $P_V(g) := T_n \tau^{-1} T_n^+(g)$.

(b) 计算 $X_n = X_n - t_l P_V(g)$, 得到 X_n .

B: 假设 X_n 固定, 计算 X_l :

① 计算残数 $R = f - X_l - X_n$.

② 计算 $X_t + R$ 的 DT CWT, 得到 $\alpha_t = T_t^+(X_t + R)$.

③ 用阈值 δ 对系数 α_t 软阈值, 得到 $\hat{\alpha}_t$, 通过 $X_t = T_t \hat{\alpha}_t$, 重构得到 X_t .

(3) 上传阈值 $\delta = \delta - \lambda$.

(4) 如果 $\delta > \lambda$, 返回到第(2)步. 否则, 退出循环.

2 实验结果

用 MCA(3), 新模型(8)和 Vese-Osher 模型对给定的图像做分解和去噪, 表明新模型的有效性.

为了计算简单, 给定图像“Barbara”的一部分, 如图 1(a)所示. 在做图像分解时, 理想状态是只有桌子的纹理和衣服的条纹被提取出来. 在不加噪声的情况下, 与 MCA 方法相比, 新模型能较好地提取出纹理部分, 如图 1(c)和(d)所示. 在图 1(b)中, 为了比较 3 种模型的分解和去噪效果, 对部分“Barbara”图像加上了高斯噪声 ($\sigma = 20$). 图 1(e), (f)和(g)说明噪声的出现并不影响新模型的性质, 它能较好地分离纹理和噪声部分: 与 MCA 方法相比, 新模型提取出的结构部分含有较少的纹理; Vese-Osher 模型不能分离纹理和噪声部分. 表 1 给出了 MCA 方法和新模型的性能指标: 峰值信噪比 (PSNR), 均方根误差 (RMSE) 和运算时间. 这些结果都说明了新模型能在去除噪声的同时很好地分解图像, 即能将图像分解为结构、纹理和噪声 3 部分, 且运算时间较低.

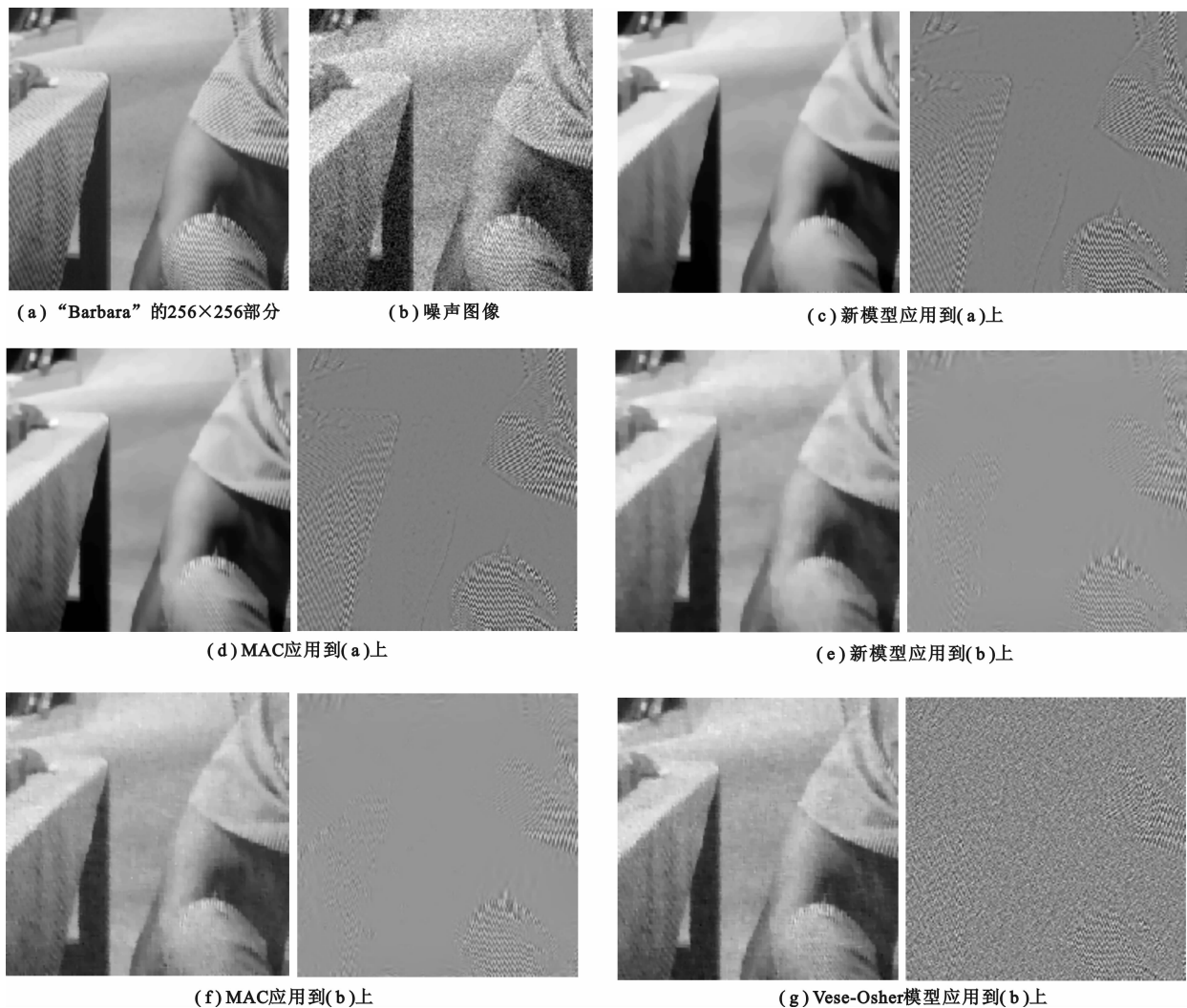


图 1 图像分解和去噪的比较结果

表 1 PSNR, RMSE 和运算时间的比较结果

Noisy Barbara (part)	σ	噪声图像		新模型 (8)			MCA 方法 (3)		
		PSNR/dB	RMSE/dB	PSNR/dB	RMSE/dB	时间/s	PSNR/dB	RMSE/dB	时间/s
	10	27.204	9.756	30.918	7.255	25.14	30.216	7.667	300.86
	20	23.819	17.812	26.555	12.425	30.75	25.898	12.932	321.71

3 结束语

提出了一种新的图像分解方法. 该方法结合基跟踪算法和全变差正则化方法, 用两个字典分别描述结构和纹理部分. 在分解过程中, 对结构部分选用基于投影正则化方法的二代曲线波变换, 这可以很好地减少虚假的吉布斯现象. 对纹理部分, 选用 DT CWT, 它比 DCT 能更稀疏地描述纹理. 将新模型用于去除噪声, 它能在去噪的同时很好地分离纹理和噪声部分. 下一步的工作是寻找一个刻画曲线波系数的空间来代替全变差的权项, 使得运算更为简单.

参考文献:

- [1] Meyer Y. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations [M]. Boston: University Lecture Series, American Mathematical Society, 2001.
- [2] Vese L, Osher S. Modeling Textures with Total Variation Minimization and Oscillating Patterns in Image Processing [J]. Journal of Sci Comput, 2003, 19(3): 553-572.
- [3] Osher S, Sole A, Vese L A. Image Decomposition and Restoration Using Total Variation Minimization and the H^{-1} Norm [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2003, 1(3): 349-370.
- [4] Lieu L, Vese L. Image Restoration and Decomposition Via Bounded Total Variation and Negative Hilbert-sobolev Spaces [EB/OL]. [2006-10-15]. <http://www.math.ucla.edu/~Uieu/ams-meeting/009-slides.pdf>.
- [5] Le T, Vese L. Image Decomposition Using the Total Variation Anddiv (BMO) [J]. SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 390-423.
- [6] Starck J L, Elad M, Donoho D L. Image Decomposition Via the Combination of Sparse Representations and a Variational Approach [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(10): 1570-1582.
- [7] Chen S, Donoho D, Saunder M. Atomic Decomposition by Basis Pursuit [J]. SIAM J Sci Comput, 1998, 20(1): 33-61.
- [8] Candes E J, Donoho D L. New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise- C^2 Singularities [J]. Comm Pure Appl Math, 2004, 57(2): 219-266.
- [9] Hu Y J, Huang J, Kwong S, et al. Image Fusion Based Visible Watermarking Using Dual-tree Complex Wavelet Transform [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2939(2): 86-100.
- [10] 冯象初, 杨永东, 王义龙. 基于小波尺度空间的中值函数 [J]. 西安电子科技大学学报, 2006, 33(2): 295-298.
- [11] Kingsbury N. Image Processing with Complex Wavelets [J]. Philos Trans Royal Society London A, 1999, 357(9): 2543-2560.
- [12] Bruce A, Sardy S, Tseng P. Block Coordinate Relaxation Methods for Nonparametric Signal De-noising [C]//Proc SPIE. Bellingham: ETATS-UNIS, 1998: 75-86.

(编辑: 齐淑娟)