

# 一种 FV-FD 混合算法仿真电磁散射问题

邓 聪, 尹文禄, 柴舜连, 毛钧杰

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 提出了一种连接在时间方向采用不同迭代格式的两种算法 (FVTD 和 FDTD) 的边界条件, 从而实现了一种 FV-FD 混合算法。用算例仿真了 TE 波入射下无限长圆柱的雷达散射截面, 表明了该方法可以提高计算精度, 并大大减少仿真时间和内存。

**关键词:** 时域有限体积-有限差分混合算法; 通量向量分裂算法; 雷达散射界面

中图分类号: TN95 文献标识码: A 文章编号: 1001-2400(2007)S1-0156-04

## An FV-FD hybrid method simulating EM scattering

DENG Cong, YIN Wen-lu, CHAI Shun-lian, MAO Jun-jie

(College of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

**Abstract:** An FV-FD hybrid method is proposed by presenting a novel connecting condition between the two algorithms which match in time in different schemes. The RCS of a 2-D PEC cylinder illuminated by the TE wave is calculated as a numerical example, which shows that the method has the advantages of higher accuracy, reduction in running time and saving of computational space.

**Key Words:** FV-FD hybrid method; flux-vector splitting algorithm; RCS

现代隐身飞机和导弹的设计要求使精确预估目标电磁散射的能力变得越来越重要, 这些都对计算电磁学的研究提出了更高的要求。传统的Yee格式的时域有限差分(FDTD)方法在模拟不能与坐标曲面共形的散射体时常常存在阶梯效应。目前通常采用的CPFDTD<sup>[1]</sup>方法或者非正交曲线坐标系下的广义时域有限差分方法<sup>[2]</sup>解决了这类问题。Shanker<sup>[3]</sup>和Shang<sup>[4]</sup>等首先将计算流体力学(CFD)中的时域有限体积方法(FVTD)成功应用于电磁散射和辐射问题的计算, Riley<sup>[5]</sup>等提出了一种电磁场不共点交错采样的FVTD方法, 它们都支持非结构化的共形网格。但是同传统的FDTD方法相比, 有限体积方法需要更多计算时间和内存空间。笔者提出了一种连接在时间方向采用不同迭代格式的两种算法(FVTD和FDTD)的边界条件, 从而实现了一种FV-FD混合算法。用算例计算了二维PEC圆柱的RCS, 同单独的FV/FD方法的比较表明了该方法有更好的精度, 并且大大地降低了计算时间和内存。

## 1 Maxwell 方程的有限体积离散与边界条件

### 1.1 空间非交错采样的通量向量分裂方法

电磁场满足时变Maxwell方程组。将Maxwell方程组的两个旋度方程在体积元 $V_i$ 内积分得到

$$-\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV_i = \int_{V_i} \nabla \times \mathbf{E} dV_i = -\oint_s \mathbf{E} \times d\mathbf{S}, \quad (1)$$

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV_i = -\int_{V_i} \mathbf{J} dV_i + \int_{V_i} \nabla \times \mathbf{H} dV_i = -\int_{V_i} \mathbf{J} dV_i - \oint_s \mathbf{H} \times d\mathbf{S}, \quad (2)$$

收稿日期: 2007-06-10

基金项目: 武器装备预研基金项目资助(51401030105KG01)

作者简介: 邓 聪(1980-), 男, 国防科技大学博士研究生。

其中  $s$  为  $V_i$  的边界,  $d\mathbf{S}$  是指向边界外法向的面矢量元。假设体积元  $V_i$  是有  $m_i$  个面的多面体,  $V_i$  内的介电常数  $\varepsilon_i$ , 磁导率  $\mu_i$  和电导率  $\sigma_i$  都为常数。可以将方程 (1), (2) 写成

$$\boldsymbol{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial t} \langle U_i \rangle = \frac{-1}{|V_i|} \sum_{k=1}^{m_i} \mathbf{A}_k \langle U_k^* \rangle |S_k| - \mathbf{C}_i \langle U_i \rangle, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{U} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z, \mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z)^T$ ,  $\langle U_i \rangle$  和  $\langle U_k^* \rangle$  分别为  $\mathbf{U}$  在  $V_i$  内和在面  $S_k$  上的平均值,  $|V_i|$  和  $|S_k|$  分别为  $V_i$  的体积和  $S_k$  的面积。而

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n_{kz} & -n_{ky} \\ 0 & 0 & 0 & -n_{kz} & 0 & n_{kx} \\ 0 & 0 & 0 & n_{ky} & -n_{kx} & 0 \\ 0 & -n_{kz} & n_{ky} & 0 & 0 & 0 \\ n_{kz} & 0 & -n_{kx} & 0 & 0 & 0 \\ -n_{ky} & n_{kx} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \cdot \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & \mu_i \cdot \mathbf{I}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i \cdot \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{I}_d$  为  $3 \times 3$  的单位阵,  $\{n_{kx}, n_{ky}, n_{kz}\} = \mathbf{a}_{nk}$  为  $S_k$  的单位外法矢。电场和磁场采样  $U_i$  共点于  $V_i$  的质心, 并作近似

$\langle U_i \rangle = U_i$ ,  $\langle U_k^* \rangle$  用  $S_k$  面心处场量  $U_k^*$  近似。对共  $S_k$  的  $V_i$  和  $V_k$  使用通矢量分裂方法<sup>[6]</sup>, 有

$$\mathbf{A}_k U_k^* = \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{T}^+ \mathbf{A}(\mathbf{a}_{nk})^+ U_k^{*i} + \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{T}^- \mathbf{A}(\mathbf{a}_{nk})^- U_k^{*k}, \quad (4)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}(\mathbf{a}_{nk})^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm a_3 c_\pm & \mp a_4 c_\pm & \mp a_5 c_\pm & 0 & \frac{n_{kz}}{\varepsilon_\pm} & \frac{-n_{ky}}{\varepsilon_\pm} \\ \mp a_4 c_\pm & \pm a_2 c_\pm & \mp a_6 c_\pm & \frac{-n_{kz}}{\varepsilon_\pm} & 0 & \frac{n_{kx}}{\varepsilon_\pm} \\ \mp a_5 c_\pm & \mp a_6 c_\pm & \pm a_1 c_\pm & \frac{n_{ky}}{\varepsilon_\pm} & \frac{-n_{kx}}{\varepsilon_\pm} & 0 \\ 0 & \frac{-n_{kz}}{\mu_\pm} & \frac{n_{ky}}{\mu_\pm} & \pm a_3 c_\pm & \mp a_4 c_\pm & \mp a_5 c_\pm \\ \frac{n_{kz}}{\mu_\pm} & 0 & \frac{-n_{kx}}{\mu_\pm} & \mp a_4 c_\pm & \pm a_2 c_\pm & \mp a_6 c_\pm \\ \frac{-n_{ky}}{\mu_\pm} & \frac{n_{kx}}{\mu_\pm} & 0 & \mp a_5 c_\pm & \mp a_6 c_\pm & \pm a_1 c_\pm \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{\mu_\pm}}{\sqrt{\varepsilon_\pm} + \sqrt{\mu_\pm}} \mathbf{I}_d & 0 \\ \sqrt{\varepsilon_\pm} + \sqrt{\mu_\pm} & \\ 0 & \frac{2\sqrt{\varepsilon_\pm}}{\sqrt{\varepsilon_\pm} + \sqrt{\mu_\pm}} \mathbf{I}_d \end{pmatrix},$$

$a_1 = n_{kx}^2 + n_{ky}^2$ ;  $a_2 = n_{kx}^2 + n_{kz}^2$ ;  $a_3 = n_{ky}^2 + n_{kz}^2$ ;  $a_4 = n_{kx} n_{ky}$ ;  $a_5 = n_{kx} n_{kz}$ ;  $a_6 = n_{ky} n_{kz}$ ;  $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。  $\varepsilon$ ,  $\mu$  和  $C$  的  $\pm$  下标表示  $\varepsilon$  和  $\mu$  取  $V_i$  或者  $V_k$  中的值。  $U_k^{*i,k}$  则表示  $S_k$  两侧邻近的场量, 可以分别取为  $U_i$  和  $U_k$ 。为了提高计算精度, 可以采用梯度估计的方法<sup>[4]</sup>重构界面两侧场量  $U_k^{*i,k}$  :

$$U_k^{*i,k} = U_{i,k} + \nabla U_{i,k} \cdot \mathbf{d}_{i,k}, \quad (5)$$

$\nabla U_{i,k}$  为  $U$  在  $V_i$  或者  $V_k$  质心处的梯度, 可以结合邻近单元质心的场量通过最小二乘法估算<sup>[7]</sup>;  $\mathbf{d}_{i,k}$  表示  $V_i$  或者  $V_k$  质心到  $S_k$  面心的矢量。将 (4) 代入 (3) 得到了具有迎风特性的空间离散形式。

### 1.2 时间离散

将(3)写成  $\frac{dU}{dt} = R(U)$  的形式,  $R$  为空间算子。时间推进采用 2 步 2 阶 Runge-Kutta 方法, 电磁场在时间方向非交错采样:

$$U^{(n+1)} = U^n + \Delta t R(U^n, t^n),$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2} (R(U^n, t^n) + R(U^{(n+1)}, t^{n+1})).$$

### 1.3 边界条件和激励源

PEC 边界需要特殊处理。假设  $S_k$  在 PEC-介质交界面上,  $V_i, V_k$  分别为介质和金属, 此时式(4)中  $U_k^{*k} = 0, T^+$  用  $\lim_{\mu \rightarrow 0} T^+$  替代。式(4)等号右端第 2 项表示从  $V_k$  通过  $S_k$  流入  $V_i$  的通量, 对于截断边界该项应为零, 即式(4)变为

$$A_k U_k^{*i} = \alpha_i T^+ A(a_n)^+ U_k^{*i}. \tag{6}$$

散射问题激励源的引入可以采用 FDTD 中常用的总场-散射场边界条件, 即在等效面上引入等效电磁流来等效入射波。

## 2 一种 FV-FD 混合算法

尽管 FVTD 方法可以支持共形网格, 但是计算量大, 主要是用最小二乘法估计(5)中的梯度十分耗时, 又需要存储网格的几何信息使得存储量大大增加。另外式(6)的截断条件仅能吸收垂直入射波, 因此带来的反射较大。为了保证计算精度必须增大散射体同截断边界的距离, 这样加重了计算量。而 FDTD 计算量相对小得多, 网格有较统一的几何信息且有成熟高效的截断边界。因此将两者结合, 预计会有较好的效果。以二维情况为例, 网格剖分如图 1 所示, 仅在散射体很邻近的区域有几层共形网格, 即图 1 中矩形 ABCD 内部区域, 用 FVTD 计算; 其余近场用结构化矩形网格的 FDTD 计算, 通过连接边界条件耦合两计算区域的场量。如图 2 所示, FVTD 的计算区域延伸到三角形外的几个矩形网格。为了降低反射, 界面 A 的右侧场量以及界面 B, C, D 的两侧场量的重构都采用式(7)所示的 MUSCL 方法, FVTD 计算区域其余边界场量重构仍然使用式(5)。

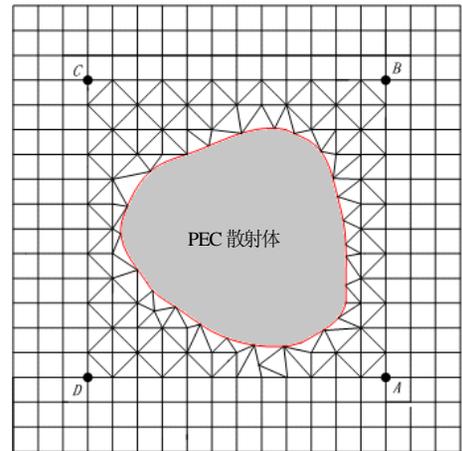


图 1 网格剖分示意图

$$U_c^{*c} = -\frac{1}{6}U_b + \frac{5}{6}U_c + \frac{1}{3}U_d; \quad U_c^{*d} = -\frac{1}{6}U_e + \frac{5}{6}U_d + \frac{1}{3}U_c. \tag{7}$$

假设已知:  $n$  时刻 FVTD 计算区域所有网格中心处的电场和磁场;  $n$  时刻 FDTD 计算区域所有网格棱边上的电场;  $n-0.5$  时刻 FDTD 计算区域所有网格中心处的磁场。用 FVTD 更新  $d$  点电磁场需要知道  $e$  和  $f$  点在  $n$  和  $n+1$  时刻的电磁场, 而  $d$  和  $f$  不在 FVTD 计算区域。用 FDTD 更新棱边  $C$  上电场  $E_y$ , 需要知道  $c$  点  $n+0.5$  磁场, 而  $c$  点不在 FDTD 计算区域。这里使用下面的步骤进行更新:

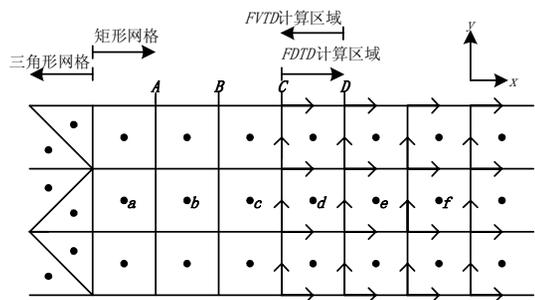


图 2 FV-FD 连接边界

- 1) 计算  $n+0.5$  时刻 FDTD 计算区域内所有网格中心处磁场;

2) 计算  $n+1$  时刻 FDTD 计算区域内所有棱边上的电场(不计算棱边  $C$  上电场  $E_y$ )；3) 根据 2) 的结果，空间内插  $n+1$  时刻  $e$  点和  $f$  点的电场；4) 用 FDTD 计算  $e$  点和  $f$  点在  $n+1.5$  时刻的磁场；5) 根据 1) 和 4) 的结果，空间内插求出  $n+1$  时刻  $e$  点和  $f$  点的磁场；6) 计算  $n+1$  时刻 FVTD 计算区域内所有网格中心处的电场和磁场；7) 利用 6) 的结果，空间内插求出  $n+1$  时刻棱边  $C$  上电场  $E_y$ ；8)  $n=n+1$  并回到 1) 循环。

推广到三维计算区域，图 1 中结构网格变为六面体，需要在结构-非结构网格交界面上散射体一侧加入一层同六面体有一个公共面的五面体过渡层，交界面内侧其余区域用四面体剖分。可以看到这种 FV-FD 混合算法也适用于三维计算区域。以下仅给出二维算例，计算三维物体散射的程序尚在调试。

### 3 数值算例

用 FVTD, FDTD 以及文中的 FV-FD 计算了直径  $1.6\lambda$  的无限长 PEC 圆柱在 TE 波照射情况的 RCS。圆柱轴向  $+z$  方向，平面波时域波形为正弦波，向  $+x$  方向入射，电场极化  $+y$  方向。3 种算法的入射场都是直接加在 PEC 表面。

仿真结果如图 3 所示。其中主图为三种算法得到的 RCS 随角度的变化，附图为三种算法结果的相对误差同角度的关系。所用网格棱边尺寸分别为  $0.025\lambda$ ， $0.0025\lambda$  和  $0.025\lambda$ 。计算所需 CPU 时间比约为 3:2:1；占用内存比例约为 5:1.5:1。

对于 FDTD 方法，网格剖分已经非常密，在大部分角度范围内误差也很低，但是在 RCS 零深处误差仍然有 5% 以上。FVTD 方法计算精度在大部分角度范围内较 FDTD 差，但零深处也能吻合得较好。由于使用了共形网格和高效的截断边界，FV-FD 方法结果最好，其计算区域也比 FVTD 小得多，因而减少了计算时间和内存。

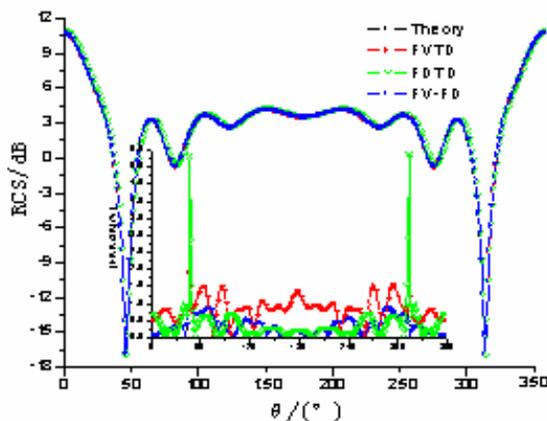


图 3 RCS 数值结果

### 参考文献

- [1] Jurgens T G, Taflove A, Umashankar K, et al. Finite-difference Time-domain Modeling of Curved Surfaces[J]. IEEE Trans on Antennas Propagat., 1992, 40: 357-366.
- [2] Holland R. Finite-difference Solution of Maxwell's Equations in Generalized Nonorthogonal Coordinates[J]. IEEE Trans on Nucl. Sci, 1983, NS-30: 4589-4591.
- [3] Shanker V, Hill W, Mohammanian A H. A CFD-based Finite Volume Procedure for Computational Electromagnetics-interdisciplinary Applications of CFD Methods[R]. AIAA 1989-1987-CP.
- [4] Shang J S, Gaitonde D. Characteristic-based Time Dependent Maxwell Equations Solver on a General Curvilinear Frame[R]. AIAA-93-3178.
- [5] Riley D J, Turner C D. Volmax: A Solid-model-based, Transient Volumetric Maxwell Solver Using Hybrid Grids[J]. IEEE Antennas Propagation Magazine, 1997, 39(1): 20-33.
- [6] Bonnet P, Ferrieres X, Michielsen B, et al. Time Domain Electromagnetics[M]. RAO S M, Ed. New York: Academic Press, 1997: 307-367.
- [7] Liu J, Zhang S J, Chen Y S. Rigorous Electromagnetic Modeling of Radiative Interactions with Microstructures Using the Finite Volume Time-domain Method[J]. International Journal of Thermophysics, 2004, 25(4): 1281-1297.